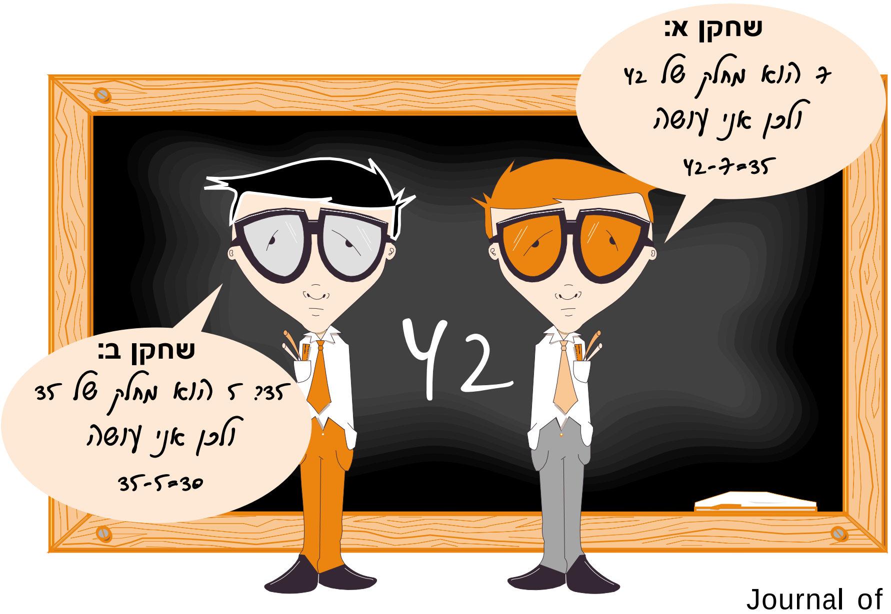
משחקי מתמטיקה

משחקי חשבון

אבי ברמן



אחת הדרכים היותר נעימות ללמד מתמטיקה היא בעזרת משחקים. במאמר זה אתאר שני משחקים בהם השתמשנו בהשתלמויות מורים בטכניון, במסגרת תכנית ההתמקצעות במתמטיקה. המשחק הראשון נוסה בשיעור של ד"ר גרייסי ויניצקי ואת המשחק השני, שהוא וריאציה של הראשון, הפעלתי בשיעור שלי.

המקור למשחקים אלו הוא מאמר של דויד סילברמן המופיע ב:
Journal of Recreational Math, October 1970.
מקור נוסף, מלא וגדוש במשחקים מתמטיים הוא:
http://www.trottermath.com

משחק א: החסר גורם קטן מ- N

המשחק הוא משחק לשני משתתפים.

הוראות המשחק

בהינתן מספר טבעי N, על השחקן הראשון לבחור מספר טבעי R, שמחלק את N וקטן ממנו, ולחשב את ההפרש N - R. את המספר שהוא ההפרש הוא מוסר לשחקן השני. נקרא למספר זה, ההפרש R - N צאצא של N. השחקן השני עושה פעולה דומה עם הצאצא N - R וכך הלאה. שחקן שקיבל מחברו את המספר 1 אינו יכול להמשיך, ולכן הוא המפסיד וחברו המנצח.

לדוגמה: נניח שניתן המספר 60.

שחקן א: מפעיל על המספר 60 את המחלק 30, כלומר, מבצע 30-60 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 30.
שחקן ב: מפעיל על המספר 30 את המחלק 1, כלומר, מבצע 1-30 ולכן מוסר לשחקן א את המספר 29.
שחקן א: מפעיל על המספר 29 את המחלק 1, כלומר, מבצע 1-29 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 28.
שחקן ב: מפעיל על המספר 28 את המחלק 14, כלומר, מבצע 14-28 ולכן מוסר לשחקן א את המספר 14.
שחקן א: מפעיל על המספר 14 את המחלק 7, כלומר, מבצע 7-14 ולכן מוסר לשחקן ב את- המספר 7.
שחקן ב: מפעיל על המספר 7 את המחלק 1, כלומר, מבצע 1-7 ולכן מוסר לשחקן א את המספר 6.
שחקן א: מפעיל על המספר 6 את המחלק 3, כלומר, מבצע 3-6 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 3.
שחקן ב: מפעיל על המספר 3 את המחלק 1, כלומר, מבצע 1-3 ולכן מוסר לשחקן א את המספר 2.
שחקן א: מפעיל על המספר 2 את המחלק 1, כלומר, מבצע 1-2 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 1.

פרופ' אבי ברמן
פרופ' מן המנין בפקולטה למתמטיקה בטכניון ובעל השתייכות משנית במחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים בטכניון.

שחקן ב אינו יכול להמשיך, **ולכן שחקן ב הפסיד ושחקן א ניצח.**

המשחק יכול להוות כלי תרגולי נחמד שבמהלכו התלמידים מאתרים מחלקים של מספרים ומבצעים חישובים בעל-פה. תלמידים שישחקו מספר פעמים יוכלו לפתח במשך הזמן תחושה לגבי אילו מספרים כדאי להם למסור ליריב כדי לנצח. בהתאם לכך יפעילו את המחלק הכדאי ביותר. את התחושה ניתן להסביר בעזרת מתמטיקה פשוטה.

מהי האסטרטגיה לניצחון במשחק?

נשים לב שמכל מספר זוגי n **ניתן** להגיע למספר אי-זוגי על-ידי בחירת המחלק 1.

כמו כן ברור שמכל מספר אי-זוגי **תמיד נגיע** למספר זוגי. זאת משום שכל מספר אי-זוגי הוא מכפלה של שני מספרים טבעיים אי-זוגיים. אם נחסר ממספר אי-זוגי מחלק שלו שהוא מספר אי-זוגי הרי שנקבל כהפרש מספר זוגי. מכאן נובע שאסטרטגיית הניצחון במשחק היא למסור ליריב בכל השלבים מספר אי-זוגי, ולהמשיך לעשות כך עד שהיריב יקבל את המספר 1 ויפסיד.

N ייקרא **מספר מנצח** אם לשחקן שמקבל אותו ומשתמש באסטרטגיית הניצחון, מובטח ניצחון במשחק. במשחק שתיארנו המספרים המנצחים הם המספרים הזוגיים בעוד שהמספרים האי-זוגיים הם **מספרים מפסידים**, כי כפי שהוסבר לעיל הצאצאים שלהם הם זוגיים ולשחקן שמקבל אותם מובטח ניצחון אם ישחק נכון. בדוגמה שראינו אמנם השחקן הראשון ניצח, אבל המשחק ששיחק לא היה מוצלח כי כבר במהלך הראשון הוא מסר ליריב מספר זוגי. היריב לא ניצל זאת וגם הוא בהמשך מסר לשחקן א מספר זוגי, כשהיה באפשרותו למסור לו מספר אי-זוגי ובדרך זו להבטיח לעצמו את הניצחון. ננסה לתאר את המהלך המנצח, אילו היה מתרחש.

שחקן ב: מפעיל על המספר 28 את המחלק 7 (ולא 14 כפי שעשה), כלומר, מבצע 28-7 ולכן מוסר לשחקן א את המספר 21.
שחקן א: מפעיל על המספר 21 את המחלק 7, כלומר, מבצע 21-7 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 14.
שחקן ב: מפעיל על המספר 14 את המחלק 7, כלומר, מבצע 14-7 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 7.
שחקן א: מפעיל על המספר 7 את המחלק 1, כלומר, מבצע 7-1 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 6.

שחקן ב: מפעיל על המספר 6 את המחלק 3, כלומר, מבצע 6-3 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 3.
שחקן א: מפעיל על המספר 3 את המחלק 1, כלומר, מבצע 3-1 ולכן מוסר לשחקן ב את המספר 2.
שחקן ב: מפעיל על המספר 2 את המחלק 1, כלומר, מבצע 2-1 ולכן מוסר לשחקן א את המספר 1.

שחקן א אינו יכול להמשיך, **ולכן שחקן א הפסיד ושחקן ב ניצח**. (מצב הפוך ממה שקרה כששחקן ב הפעיל על המספר 28 את 14 ולא את 7).

פתיחה טובה יותר של המשחק הייתה יכולה להיות אם שחקן א היה מפעיל על המספר 60 את המחלק 15, כלומר, היה מבצע 60-15 והיה מוסר לשחקן ב את המספר 45. במקרה זה גם אם כל אחד מהמשתתפים היה שומר על העיקרון של מסירת מספר אי-זוגי ליריב, עדיין הניצחון היה מובטח לשחקן א. (נסו)

משחק ב: החסר גורם קטן מ- N וגדול מ- 1

הוראות המשחק

בהינתן מספר טבעי N, על השחקן הראשון לבחור מספר טבעי R, שמחלק את המספר N, קטן ממנו, וגדול מ-1, ולחשב את ההפרש R - N . את המספר שהוא ההפרש הוא מוסר לשחקן השני.

נשים לב שלעומת משחק א, במשחק ב על המחלק להיות גם גדול מ-1. כלומר, אם במשחק הקודם ניתן היה להפעיל על המספר 4 את 1 ואת 2 ולקבל כצאצאים את 2 ו- 3, הרי שבמשחק ב ניתן להפעיל על 4 רק את 2 ולקבל כצאצא רק את 2.

גם במקרה זה טבעי לשאול **מהי אסטרטגיית הניצחון? מה הם המספרים המנצחים ומה הם המספרים המפסידים?**

כמו במשחק א, N ייקרא **מספר מנצח** אם לשחקן שמקבל אותו ומשתמש באסטרטגיית הניצחון מובטח ניצחון במשחק. כלומר, אם למספר N יש צאצא שהוא מספר מפסיד. ואילו **מספר מפסיד** הוא מספר שכל הצאצאים שלו הם מנצחים.

במשחק הקודם שתיארנו המספרים המנצחים הם המספרים הזוגיים בעוד שהמספרים האי-זוגיים הם המספרים המפסידים.

במשחק זה המספרים הראשוניים יהיו מספרים מפסידים,

כי אם לא ניתן להפעיל עליהם את הגורם 1 או את עצמם, הרי שתמיד לא יהיו להם צאצאים. נשאלת השאלה **אילו מספרים נוספים יהיו מספרים מפסידים?** ננסה לבדוק זאת בצורה שיטתית על-ידי מספר דוגמאות.

המספר	
1	מפסיד (לא ניתן להפעיל עליו אף מספר).
2	מפסיד (ראשוני)
3	מפסיד (ראשוני)
4	מספר מנצח (במהלך הראשון אפשר לתת ליריב רק את 2 ולנצח).
5	מפסיד (ראשוני)
6	מספר מנצח (במהלך הראשון ניתן לתת ליריב את 3 ולנצח).
7	מפסיד (ראשוני)
8	מפסיד (הצאצאים של 8 הם 6 ו- 4. שניהם מספרים מנצחים ולכן 8 הוא מספר מפסיד).

נתאר את מהלך המשחק אם המספר הפותח הוא 8.

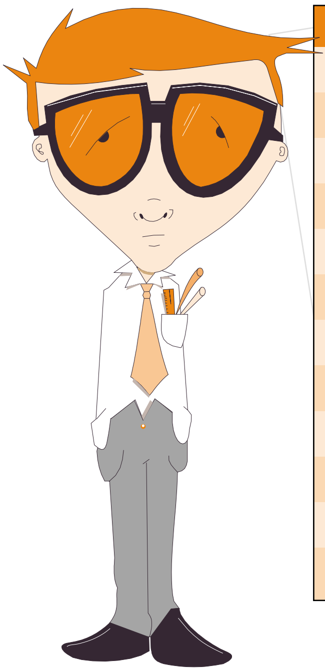
שחקן א: יכול להפעיל על המספר 8 את המחלק 4, כלומר, לבצע 4-8 ולמסור לשחקן ב את המספר 4. לחילופין הוא יכול להפעיל על המספר 8 את המספר 2, לבצע 2-8 ולמסור לשחקן ב את 6.

שחקן ב: אם קיבל את 4 הוא יכול להפעיל עליו רק את 2, לבצע את 2-4 ולמסור לשחקן א את 2. שחקן א אינו יכול להמשיך ולכן שחקן ב ניצח ושחקן א הפסיד. אם קיבל את 6 הוא יכול להפעיל עליו את 3, לבצע: 3-6 ולמסור לשחקן א את 3. גם במקרה זה שחקן א אינו יכול להמשיך ולכן שחקן א הפסיד ושחקן ב ניצח. לחילופין שחקן ב יכול להפעיל על 6 את 2, לבצע 2-6 ולמסור לשחקן א את 4. ושוב, שחקן א אינו יכול להמשיך, הוא הפסיד ושחקן ב הוא המנצח. כלומר, השחקן שקיבל את המספר (שחקן א), בכל אסטרטגיה שיפעל ובכל האפשרויות הוא תמיד יפסיד. לכן מספר 8 הוא מספר מפסיד.

בחרו כמספר פותח מספר **זוגי** גדול מ- 8 (בעשרת השנייה) ובדקו לגביו את כל האפשרויות, כשאתם משתמשים באסטרטגיה של מסירת מספר אי-זוגי ליריב. האם שחקן א שקיבל את המספר יכול לנצח?

בחרו כמספר פותח גם מספר **אי-זוגי** בעשרת השנייה ובדקו לגביו את כל האפשרויות, כשאתם משתמשים באסטרטגיה של מסירת מספר אי-זוגי ליריב. האם שחקן א שקיבל את המספר יכול לנצח?

אם נמשיך ונבדוק בצורה שיטתית נראה כי:



המספר	
9	מפסיד
10	מנצח
11	מפסיד
12	מנצח
13	מפסיד
14	מנצח
15	מפסיד
16	מנצח
17	מפסיד
18	מנצח
19	מפסיד
20	מנצח

כפי שרואים בדיקת המספרים המנצחים והמספרים המפסידים בעשרת השנייה מעלה שהמספרים הזוגיים הם מספרים מנצחים והמספרים האי-זוגיים הם מספרים מפסידים. אולם, אם נמשיך ונבדוק מספרים גדולים יותר, נבחין, למשל, שהמספר 32 הוא מספר מפסיד, על אף היותו מספר זוגי.

כאשר ביצענו את החקירה בשיעור ובדקנו מה הם המספרים המנצחים ומה הם המספרים המפסידים, הועלתה ההשערה הבאה: **המספרים המנצחים** הם המספרים הזוגיים שאינם חזקות אי-זוגיות של 2, (למשל 6, 12, 14) כלומר כל המספרים הזוגיים שיש להם גורם אי-זוגי גדול מ-1, והמספרים שהם חזקות זוגיות של 2 (למשל 4, 16, 64).

המספרים המפסידים הם המספרים האי-זוגיים (שאין להם גורם זוגי) והמספרים שהם חזקות אי-זוגיות של 2 (למשל 8, 32).

כדי להפוך את ההשערה למשפט יש להוכיח אותה.

הוכחת ההשערה

א. אם N הוא מספר אי-זוגי אז הוא ראשוני או שיש לו גורם אי-זוגי a שונה מ-1 ($1<a<N$).

במקרה הראשון, שבו N הוא ראשוני - אין ל- N צאצאים.

במקרה השני, N הוא מספר אי-זוגי פריק: $N=ab$ ו-$(N - a)$ הוא מספר זוגי. $N - a=ab - a=a(b-1)$, כלומר, $(N - a)$ הוא מספר זוגי שאינו חזקה של 2.

דוגמאות: $15-5=5\times2$, $15-3=3\times4$.

ב. אם N הוא חזקה אי-זוגית של 2, $N=2^{2k+1}$ אז $N=2$ או $k > 1$.

במקרה הראשון, שבו $N=2$, N הוא ראשוני ואין לו צאצאים.

במקרה השני, N הוא מספר זוגי פריק: $N=ab$, וגם $a=2^m$ כש: $1 \le m \le 2k$.

אם: $m=2k$, אז $N - a = 2^{2k+1} - 2^{2k} = 2^{2k}$.

כלומר, חזקה זוגית של 2.

דוגמה: $32-16=16$

אם $m < 2k$, אז $N - a = 2^{2k+1}-2^m=2^m(2^{2k+1-m}-1)$.

כלומר, מספר זוגי שאינו חזקה של 2.

דוגמאות: $32-8=8\times3$, $32-4=4\times7$, $32-2=2\times15$

ג. אם N הוא מספר זוגי שאינו חזקה של 2, אז N הוא מספר זוגי פריק: $N=ab$, כש- a זוגי ו- b אי-זוגי. ואז, $(N - b)$ הוא אי-זוגי.

דוגמה: $6-3=3$, $2\times3=6$.

ד. אם N הוא חזקה זוגית של 2, $N=2^{2k}$, אז $a=2^{2k-1}$ הוא גורם של N וגם $N - 2^{2k-1}=2^{2k}-2^{2k-1}=2^{2k-1}$

דוגמה: $16-8=8$.

נחלק את כל המספרים הטבעיים לשתי קבוצות:

קבוצה 1: המספרים האי-זוגיים והחזקות האי-זוגיות של 2.

קבוצה 2: חזקות זוגיות של 2 ומספרים זוגיים שאינם חזקות של 2.

הראנו שלכל מספר בקבוצה 1 אין צאצאים או שכל הצאצאים שלו הם מספרים בקבוצה 2.

כמו כן הראנו שלכל מספר בקבוצה 2, יש צאצא בקבוצה 1.

לכן, המספרים בקבוצה 1 הם ה"מפסידים" והמספרים בקבוצה 2 הם ה"מנצחים".

סיכום

בשני המשחקים בהם דנו, ניתן להכיר ולתרגל מושגים ופעולות כגון: חיסור, מציאת גורמים של מספר, מספרים זוגיים ואי-זוגיים, מספרים ראשוניים, חזקות, ובנוסף לכך להתנסות בהשערות ובהוכחות.
התלמידים יכולים לשער את ההשערה הנכונה בשני המשחקים, ותלמידים טובים לא יתקשו להוכיח את ההשערה במשחק הראשון. תלמידים טובים יותר יעשו זאת גם במשחק השני.
אני מזמין את הקוראים להתנסות במשחק עם תלמידים, עמיתים, ילדים או נכדים.