גישות בהוראה

מדוע קשה לְלַמֵּד שברים?

רון אהרוני

הקדמה

במוזיאון הלובר נמצא מסמך מעניין מן המאה החמש עשרה: אב מבקש עצה מידידו לאיזו אוניברסיטה לשלוח את בנו. הידיד משיב לו: אם אתה רוצה שילמד שברים היטב, כדאי לך לשלוח את הילד לאוניברסיטה זו וזו. כן, השברים היו עד לפני זמן לא רב כל כך, באופן יחסי, נושא לימוד באוניברסיטה. ואכן, זהו הנושא התובעני ביותר במתמטיקה של בית-הספר היסודי. השברים הם, כידוע, "נקודת השבר" בהוראת החשבון.

מדוע בעצם? הרי שברים אינם אלא חילוק. ואף כי החילוק היא הפעולה הקשה ביותר בין ארבע פעולות החשבון הבסיסיות, היא אינה מציבה בעיות כה קשות כמו השברים. במאמר זה ננסה להבין את הסיבות לקושי, ולהציע לו פתרונות. הפתרון העיקרי הוא ללמד חילוק ושברים יחד, ולהימנע מן ההפרדה ביניהם, שהיא ברובה מלאכותית. ננסה להבין את מקורה של ההפרדה (המקובלת בכל העולם).

הנושאים שבהם נעסוק הם:
1. הקשר בין החילוק ובין השבר;
2. חילוק של צורות, ולקיחת שבר מקבוצה;
3. הקשר בין השארית של החילוק ובין השבר;
4. מהות השלם עבור השבר היא כמו הכינוי לִמְנִיָּה;
5. כפל הוא בעצם מנייה;
6. שתי משמעויות של השבר, והקשר שלהן לחוק החילוק הכפלי.

פרופ' רון אהרוני
מרצה בפקולטה למתמטיקה בטכניון. מזה כשש שנים מקדיש, בהתנדבות, חלק גדול מזמנו לחינוך מתמטי בבתי-ספר יסודיים ובחטיבות ביניים. ממייסדי העמותה הישראלית לקידום החינוך המתמטי לכל (המפיצה את ספרי "מתמטיקה יסודית"), והיועץ המדעי שלה. כתב את "חשבון להורים" - ספר להורים ולמורים על חינוך מתמטי בגילאים הצעירים (הוצאת שוקן).

שתי הערות על מינוח

א **"שבר ממספר", או "שבר מקבוצה"?** כמו בהוראת כל נושא אחר, גם בהוראת החשבון פותחים במוחשי, ולא במופשט. מתחילים מ- "3 תפוחים", ולא מן המספר המופשט "3". בהוראת הכפל מתחילים מ-"2 פעמים 3 תפוחים", ולא מ-"2 פעמים 3". כך גם בשברים - מתחילים מ-$\frac{3}{4}$ מ- 8 תפוחים, ולא מ-$\frac{3}{4}$ מ- 8. כלומר, המושג שממנו מתחילים הוא שבר מקבוצה, ורק אחר כך עוברים לשבר ממספר. לאורך המאמר נשתמש בשני המושגים האלו בצורה חליפית. כשנדבר על "שבר ממספר" ברור יהיה מכך שבשלב ראשון של ההוראה יהיה מדובר ב"שבר מקבוצה בת מספר זה של איברים".

ב **"לחשב שבר מ..." או "לקחת שבר מ..."?** ההבחנה בסעיף הקודם קשורה למונח נוסף: אנחנו מחשבים שבר ממספר, אבל לוקחים שבר מקבוצה. אנחנו מחשבים $\frac{3}{4}$ מ- 8, אבל לוקחים $\frac{3}{4}$ מ- 8 תפוחים. ושוב, אנו נשתמש בשני המונחים, מתוך הנחה שבשלב ראשון של ההוראה לוקחים שברים מקבוצות, ובשלב מתקדם מחשבים שברים ממספרים.

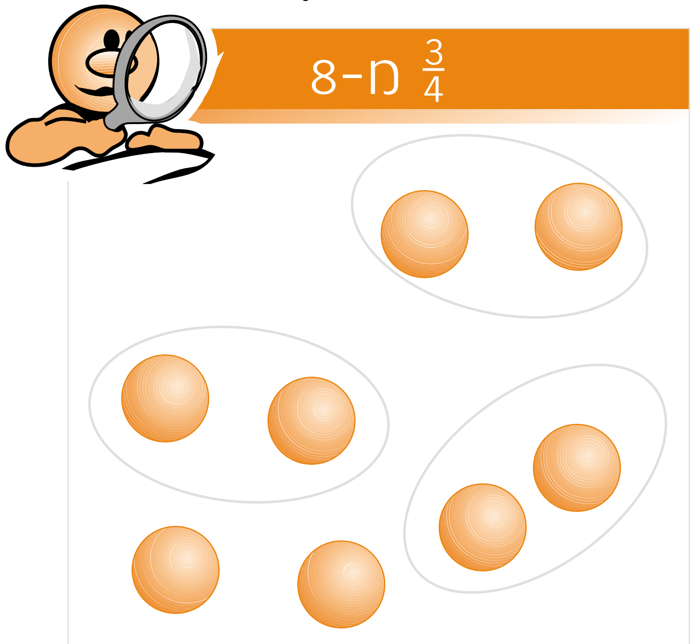
1. הקשר בין החילוק ובין השבר

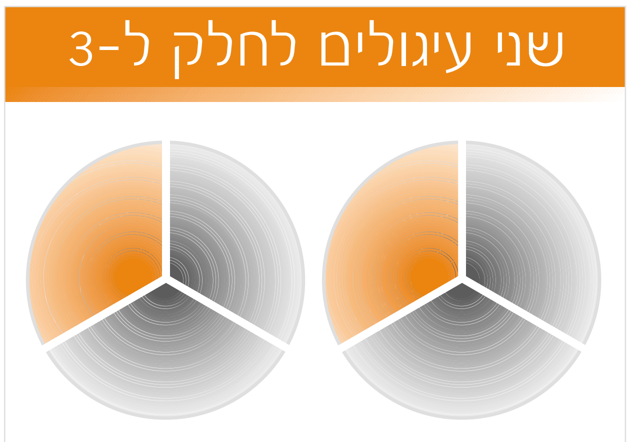
השבר נולד מן החילוק. הוא מקבל את משמעותו מן החילוק, והוא הכלי השיטתי לטיפול בחילוק. השימוש בשברים מאפשר לחלק כל מספר טבעי בכל מספר טבעי (פרט ל- 0). "שליש" פירושו חילוק של השלם ל- 3 חלקים שווים, ולקיחת אחד מהם. את הקשר של השבר $\frac{2}{3}$ לחילוק אפשר לראות בשתי דרכים. האחת - $\frac{2}{3}$ מתקבל מחלוקת השלם לשלושה חלקים שווים, ולקיחת 2 מן החלקים האלה; השנייה - $\frac{2}{3}$ מתקבל מחילוק 2 ב- 3. אבל אם שברים אינם אלא חילוק, מניין הקושי בהוראתם? אם "שליש" אינו אלא תוצאה של חילוק ב- 3, מדוע הוא נחשב לקשה יותר? וכן, מדוע מפרידים בתכנית הלימודים

בין השברים והחילוק, ומדוע נלמדים השברים הרבה יותר מאוחר מלימוד החילוק?

2. חילוק של צורות, ולקיחת שבר מקבוצה

ההפרדה בעיתוי ההוראה באה לעולם יחד עם הפרדה אחרת: את לימוד החילוק מתחילים **מחילוקם של מספרים** (שכפי שהערנו בפתיחה, משמעותו בתחילה היא חילוק של קבוצות של עצמים), כמו למשל 12:3; 40:4 וכו'. את לימוד השבר מתחילים **מלקיחת שבר מצורה**.





זוהי אחת הסיבות לרפיפות הקשר, גם בדרך ההוראה וגם בידע של התלמידים, בין החילוק ובין השבר. מי שמעולם לא חילק צורות במסגרת לימוד החילוק, יתקשה להבין ששליש מריבוע אינו אלא הריבוע מחולק ל- 3. מי שלומד זמן ארוך שברים רק כחלק מצורה, יתקשה אחר כך במעבר לחישוב שבר מקבוצה.

ההפרדה הזאת היא בעייתית. אבל מצד שני, בוודאי יש לה סיבות. הרי היא נעשית בכל העולם. מהן הסיבות האלה? מדוע בשברים מתחילים עם צורות, ומגיעים לקבוצות כל כך מאוחר? ומנגד - מדוע בלימוד החילוק מלמדים חילוק של מספר, ולעולם אין מזכירים חילוק של צורות?

לפני שננסה להשיב על כך, הנה סיפור על ניסיון שלי בהוראה שבה לא נעשית הפרדה כזו.

התנסות בחילוק ובשברים בכיתה ב

בכיתה ב התחלנו בלימוד החילוק על-ידי התנסויות. לכל קבוצת ילדים נתתי אובייקט, שאותו הם היו אמורים לחלק ביניהם באופן שווה. חלק מן הקבוצות קיבלו עצמים: קבוצה בת 3 ילדים קיבלה 7 מקלות ארטיק; קבוצה בת 4 ילדים קיבלה 6 טושים; קבוצה בת 5 ילדים קיבלה 10 קשיות שתייה. קבוצות אחרות קיבלו צורות: עיגול, או ריבוע, או שני ריבועים.

הילדים התלהבו מאוד. כל קבוצה תיארה לכל הכיתה כיצד חילקה. בכוונה דאגתי לכך שבחלק מן הקבוצות החלוקה לא תהיה מדויקת, ותישאר שארית. שיתפתי את כל הכיתה בשאלה מה לעשות עם השארית הזאת. כמו כן ערכנו דיון משותף בבעיית החלוקה הקשה ביותר מבין אלו שניתנו: כיצד לחלק בין 3 ילדים שני ריבועים.

לאחר שהסתיים השיעור הלכתי לכיתה אחרת. כשחזרתי בהפסקה הבאה לראות מה קרה בכיתה הראשונה, התברר שהילדים דרשו מן המורה שעה נוספת של חילוק. הם ביקשו ממנה עוד ועוד אובייקטים, שיוכלו לחלק אותם ביניהם. ילדים אוהבים מאוד חילוק, גם משום שזה מעניין, וגם משום שה"חלוקה שווה בשווה" לקוחה מעולמם. את האהבה הזאת כדאי לנצל ללימוד החילוק והשברים.

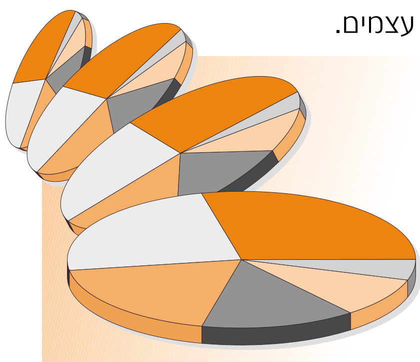
אני נוהג לקשר את לימוד החילוק עם לימוד שברים. הישר מתחילת לימוד החילוק כאשר מחלקים ריבוע לשני חלקים שווים, אנחנו אומרים שכל חלק הוא חצי מן הריבוע. אנחנו

לומדים את הסימון "$\frac{1}{2}$", ומסבירים מניין ה- 1 במונה (כי חילקנו משהו אחד), ומניין ה- 2 במכנה (חילקנו ל- 2 חלקים). אחר כך, כשעוברים לחלוקה ב- 3, התלמידים מגלים את הסימון ל- $\frac{1}{3}$ בעצמם.

מדוע לוקחים שברים רק מצורות?

דרך ההוראה שלעיל מחייבת לימוד של חילוק צורות ושל עצמים (כמו למשל, תפוחים, או מקלות ארטיק). כך הילדים לומדים שאפשר לקחת כל אובייקט: צורה, עצם או קבוצה של עצמים, ולחלק אותו. כך מופנם המסר, המופשט למדיי, שה"שלם" יכול להיות קבוצה. ראוי גם כאן לשוחח עם הילדים: האם אי פעם כבר עשינו זאת? האם לקחנו כמה עצמים, וקראנו להם "משהו אחד"? כמובן - בשיטה העשרונית. שם קיבצנו עשרה פריטים לדבר אחד, שקראנו לו "עשרת".

כאן טמונה התשובה לשאלה מדוע מוגבלת תחילת לימוד השברים ללקיחת חלקים מצורות. הסיבה העיקרית היא שה"שלם", שממנו נלקח השבר, נתפס בתור יחידה אחת - תפוז אחד, מלבן אחד, או עיגול אחד. לקחת קבוצה של 4 תפוחים ולתפוס אותה בתור "שלם" הוא עניין מופשט. לכן טבעי להתחיל מלקיחת חלק מיחידה אחת. אבל על כך אפשר להתגבר, בכך שעושים את ההפשטה הזאת כבר בלימוד החילוק. כבר שם אפשר לדבר על ה"שלם" - הרי את השלם מזכירים גם בהוראת החיבור והחיסור. ואם בהוראת החילוק מחלקים צורות בצד קבוצות, מבהירים בכך שה"שלם" יכול להיות כל דבר - עצם, צורה או קבוצה של צורות או עצמים.



זהירות: מודלים

הצורה המפורסמת ביותר שאותה מחלקים היא כמובן העיגול - "חלקי הפיצה" המפורסמים. יש לכך סיבה טובה. גם ריבוע, או מלבן, אפשר לחלק בקלות בצורה שווה למספר כלשהו של חלקים. אבל בציור הם לא נראים סימטריים: יש חלקים קיצוניים, וחלקים פנימיים, והמסר "כל החלקים שווים" הוא אז פחות ברור למסתכל. זוהי הסיבה לשימוש ב- pie charts ("דיאגרמות עוגה") לתיאור של התפלגות (חלוקה) של גדלים כמו הוצאות, או הרכבי אוכלוסייה.

יש הרואים ב"חלקי הפיצה" יותר מאשר דוגמה לצורה שאותה אפשר לחלק - הם רואים בהם מודל. אותם אנשים מניחים שאם רק ילמדו הילדים הרבה זמן על חלקי פיצה, הם ישליכו מכך יותר מאוחר על השברים בכלל. אבל במודלים יש סכנה של זיהוי המודל עם הדבר עצמו. לאחר לימוד ממושך עשויים הילדים להאמין ששבר יכול להילקח רק מעיגול.

במערכון טלוויזיוני של "קצרים" דנה קבוצת מנהלים בכובד ראש בדיאגרמת "חלקי פיצה" המוקרנת על מסך, עד שלבסוף מתברר שהם מדברים באמת על פיצה, ודנים איזה חלק ממנה יהיה עם זיתים, איזה חלק עם בצל וכו'. בעינינו, המבוגרים, זה מצחיק, משום שאנו מכירים דיאגרמות כאלה היטב, ויודעים שהן מודל - במערכון יש בלבול בין מודל לבין הדבר עצמו. לילד הדבר אינו ברור, והוא עלול לעשות את הבלבול הזה, במיוחד אם אין מסבירים לו שמדובר רק במודל.

3. הקשר בין השארית של החילוק ובין השבר

את לימוד החילוק נהוג לפתוח בחילוק ללא שארית, ולהמשיך בכך זמן רב. לדעתי, לילדים עשוי להישאר "כתם לבן" - הם לא דנים בשאלה מה קורה כשאין התחלקות לחלקים שווים. לדעתי כאשר עורכים התנסויות בחילוק, כדאי לדאוג לכך שבעיית השארית תעלה, ושייערך בה דיון.

באחת מכיתות ב שבהן עשיתי זאת, רציתי לומר לילדים איך קוראים לשארית. המורה עצרה אותי וטענה שהילדים יגיעו לכך בעצמם. שאלנו אותם איך קוראים לאוכל שנשאר אחרי הארוחה, מה שלא אכלו. הם אמרו "שיריים", ואנחנו הוספנו - "או שאריות", וכך הגענו למילה שארית. זוהי גם ההזדמנות ללמוד את הסימון לשארית 7:2=3(1), 14:3=4(2). (או סימון מקובל, ומבהיר יותר, הוא : 14:3=4 (שארית 2).)

התנסות מרובה בחילוק עם שארית היא הכנה חיונית ללימוד החילוק הארוך, בשלבים מאוחרים יותר. זהו גם פתח טוב ללימוד השברים. הילדים מגלים, בעצמם, שעם השארית אפשר לעשות אחד משני דברים: או להשאיר אותה בצד, או, במקרה שהדבר אפשרי, לחלק גם אותה. לא תמיד זה אפשרי, למשל, גולה אי-אפשר לחלק בין שני ילדים. אבל מקל ארטיק, עם מעט מאמץ ובעזרת מספריים, אפשר. עוד יותר טוב לעשות זאת עם קשיות פלסטיק, שאותן קל לגזור.

4. מהות השלם עבור השבר היא כמו הכינוי למנייה

שליש של תפוח דומה ל- 3 פעמים תפוח: בשניהם מתחילים מאובייקט, שנקרא ה"שלם". במנייה חוזרים עליו; בשברים לוקחים ממנו חלק. וכפי שבמנייה נחוץ להקפיד ולשים לב מה מונים, כך בשבר נחוץ להכיר את מהות השלם. הדבר חשוב במיוחד בשלבים הראשונים של הוראת השבר. חצי משתי עוגות הוא דבר אחר לגמרי מאשר חצי מעוגה אחת. על הקשר הזה כדאי לשוחח עם הילדים. הנה דוגמה לדיאלוג אפשרי.

מורה: יש לי כאן תפוחים. מי רוצה למנות אותם?

תלמידים: 1, 2, 3, 4.

מורה: נכון, יש כאן 4. ארבעה מה?

תלמידים: 4 תפוחים.

מורה: בביטוי "4 תפוחים" 4 הוא המספר. מי יודע מהי המילה "תפוחים"?

תלמידים: כינוי.

מורה: נכון. הכינוי אומר מה מונים. עכשיו בואו ניקח את אחד התפוחים, ונחתוך אותו לארבעה חלקים שווים (עושה זאת). איך קוראים לכל חלק?

תלמידים: רבע.

מורה: רבע מה?

תלמידים: רבע תפוח.

מורה: המילה "רבע" אומרת איזה חלק מן התפוח לקחנו. "כמה תפוח". מהי המילה "תפוח"?

תלמידים: זהו הכינוי.

מורה: נכון. כשאמרנו "ארבעה תפוחים", התפוח היה הכינוי. אם כן, גם ב"רבע תפוח" התפוח הוא הכינוי. אבל בשיעור שעבר קראנו לזה בשם קצת אחר. איך קראנו לדבר שאותו חילקנו? כשחילקנו תפוח לארבעה חלקים, מה היה התפוח?

תלמידים: השלם.

מורה: נכון. אם כן, במקרה של השבר שמו של השלם הוא הכינוי. "רבע משלם" דומה ל"ארבע פעמים השלם". בשניהם השלם הוא הכינוי.

הדו-שיח הקטן הזה לימד את הילדים את הדמיון בין המנייה לבין לקיחת שבר. הוא מסביר מדוע שבר הוא בעצם מספר, על אף שנולד מחילוק.

5. כפל הוא בעצם מנייה

בכתיבה האלגברית המודרנית, 2x מציין "2 פעמים x", כלומר, "2x". הפעולה היא כפל, אבל סימן אַין! בין ה- 2 ובין ה -x אין שום סימן פעולה! האם יש בכך היגיון?

ההודים, למשל, חשבו שכן. בכתב יד הודי קדום נמצא הסימן הבא: "4 3". אנחנו היינו קוראים זאת כ"ארבעים ושלוש", אבל ההודים התכוונו ל"4 פעמים 3", כלומר "4 כפול 3". ממש כמו ב- "2x".

ההודים צדקו. "2 כוכבים" אנחנו כותבים כך: "2☆", בלי סימן פעולה. אם כן, "2 פעמים 3" היה אמור להיכתב כ- "2•3". כאמור, איננו עושים זאת כדי לא לבלבל עם "עשרים ושלוש", אבל את "2 פעמים x" אפשר לכתוב כ: "2x".

פירוש הדבר הוא שכפל ומנייה אינם אלא אחד. "2 תפוחים", "2 פעמים תפוח" ו- "2 כפול תפוח" הם אותו דבר. כלומר, בין המספר 2 לבין כפל ב- 2 אין הבדל רב. כמו מנייה, הכפל הוא חזרה על דבר מה. כשם ש"2 תפוחים" פירושו לחזור 2 פעמים על תפוח, כך "2 כפול 3" פירושו לחזור פעמיים על המספר 3.

כפל בשברים

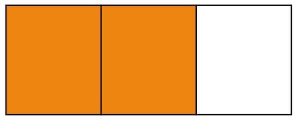
לקיחת שבר משלם דומה למנייה - "$\frac{3}{4}$ תפוח" מקביל ל-"3 תפוחים". אם אמרנו ש- "3 תפוחים" הם "3 כפול תפוח", הרי $\frac{3}{4}$ תפוח הם $\frac{3}{4}$ כפול תפוח.

עניין זה מבהיר את אחד הדברים שבעיני התלמידים הוא החידתי ביותר - מדוע לקחת שבר ממספר הוא כפל במספר? מדוע $\frac{3}{4}$ מ- 20 הוא 20 x $\frac{3}{4}$? התשובה היא - בדיוק כשם ש- 3 פעמים 20 הוא 3x20.

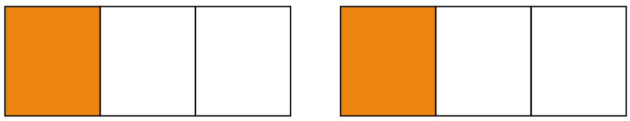
6. שתי משמעויות של השבר והקשר שלהן לחוק החילוף הכפלי

אני אוהב להיכנס לכיתות ד ו- ה ולערוך בהן דיון במשמעות השבר. מה פירושו של "$\frac{2}{3}$"? מה אומר לנו ה- 2 במונה, ומה אומר ה- 3 במכנה? באשר למכנה, כולם יודעים: הוא אומר לכמה חלקים מחלקים. במקרה זה - ל- 3 חלקים. באשר למונה, אני מקבל שתי תשובות. האחת, שמונה 2 פירושו הוא שלוקחים 2 מבין 3 החלקים. השנייה - שאנחנו לוקחים 2 עצמים, ומחלקים אותם ל- 3. המשמעות הראשונה היא המקובלת יותר: אנחנו מחלקים ל- 3 חלקים, ומהם לוקחים 2. זהו מקור השם "מונה": הוא מונה לנו כמה פעמים אנחנו לוקחים את החלק. זהו גם מקור השמות "שני שלישים", ו"שניים חלקי שלוש" - "חלקי שלוש" פירושו שלישים. אבל גם המשמעות השנייה נכונה. הרי קו השבר נקרא גם "קו חילוק", ונקרא גם "שתיים

לחלק ל- 3", כלומר, הוא תוצאת החילוק של $2:3=\frac{2}{3}$. כיצד זה ששתי המשמעויות מצביעות בסופו של דבר על אותו מספר? הסיבה היא חוק החילוף של הכפל והחילוק. לחשב שני שלישים ממשהו אפשר בשתי דרכים, האחת: קודם לחלק ל- 3 ואחר כך לכפול ב- 2, והשנייה היא קודם לכפול ב- 2 ואחר כך לחלק ב- 3. בדרך הראשונה, כאשר מחלקים ל- 3 מקבלים שלישים, ומהם לוקחים שניים. זוהי המשמעות של "שני שלישים". בדרך השנייה מקבלים קודם פעמיים השלם, ואת שני השלמים שקיבלנו מחלקים ל- 3. זוהי המשמעות של "2 לחלק ל- 3".
בואו נדגים זאת כאשר השלם הוא מלבן. בדרך הראשונה, מחלקים את המלבן ל- 3, ולוקחים 2 חלקים:



בדרך השנייה כופלים את המלבן ב- 2 ואז מחלקים כל מלבן ל- 3:



מדוע הדקות הזאת משמעותית? ראשית, משום שהילד נתקל בה. בשלב מאוחר יותר הוא לומד ש- $2:3=\frac{2}{3}$, והוא צריך להבין מדוע. שנית, הוראת דקויות מועילה תמיד. לרוב פעולות החשבון יש יותר ממשמעות אחת, ובכל מקרה כזה נחוץ ללמד את כל המשמעויות, כדי לא לגרום לילדים תחושת ערפול כאשר הם פוגשים בשני דברים הנראים שונים לכאורה, ובכל זאת קוראים להם באותו שם. אני גם פוגש במבוכה של מורות - הן אומרות לילדים ש"קו השבר הוא קו חילוק", אבל אינן יודעות להסביר מדוע. ריבוי משמעויות לאותה פעולה פירושו הוא שלאותה תוצאה אפשר להגיע בשתי דרכים: לשבר אפשר להגיע משני כיוונים שונים. כדי להבהיר לילדים את העניין הזה, אני עורך בכיתה "פעילות מטפורית", על ריבוי משמעויות. אני מבקש מאחד הילדים לבוא לקדמת הכיתה, מעמיד אותו בפינת שולחן, ומבקש ממנו ללכת לפינה הנגדית של השולחן. אחר כך אני שואל את הכיתה - האם הילד היה יכול ללכת בדרך אחרת? כן, הם עונים, הוא היה יכול ללכת מן הצד השני. ואז בדרך כלל יש המוסיפים - כן, הוא היה יכול ללכת מסביב לכל הכיתה, ואז להגיע לצד השני.

סיכום

במאמר הזה ניסיתי להתחקות על כמה נקודות שנראות בעיניי חשובות בלימוד השברים. חלקן תיאורטיות, וחלקן מעשיות. ההמלצות המעשיות הנובעות מן הדברים הן אלה:

- ללמד חילוק ושברים יחד.
- לפתוח את הוראת החילוק והשברים בהתנסות ממושכת בחילוק עצמים.
- ללמד חילוק של צורות, לא רק של מספרים.
- הפן השני של אותו עניין - ללמד שבר מקבוצה, הישר מתחילת לימוד השברים.
- ללמד חילוק עם שארית הישר מתחילת הוראת החילוק. ללמד את שתי האפשרויות לטיפול בשארית - להשאירה כשארית, או להמשיך לחלק ולקבל שברים.
- ללמד את הקשר בין מנייה ובין כפל. להסביר מדוע "3 פעמים תפוח", "3 כפול תפוח" ו"3 תפוחים" הם אותו דבר, ומכאן להגיע לכך ש"שליש ממשהו" ו"שליש כפול אותו משהו" הם היינו הך.
- לדון עם הילדים בשתי המשמעויות של השבר, ולהראות את הקשר של היחס ביניהן עם חוק החילוף הכפלי.