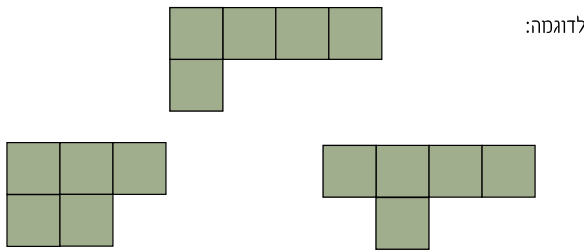


## המספר 12 ב-12 היבטים שונים

### 1 פנטומינו

פנטומינו הן צורות הבנויות מחמישה ריבועים חופפים, הצמודים זה לזה בצלעותיהם.



אפשר ליצור 12 צורות שונות של פנטומינו, שאינן חופפות זו לזו. מצאו את כל 12 הצורות.

### 2 הוא מספר הרשד (Harshad)

מספר המתחלק בסכום ספרותיו מכונה **מספר הרשד** (harshad) - מילה הודית שמשמעותה שמחה גדולה. ואמנם 12 הוא מספר כזה, שכן 12 מתחלק ב-3 ( $3 = 1+2$ ).

להלן מספרי הרשד הראשונים עד 50 (לפי בסיס 10):

**10, 12, 18, 20, 21, 24,  
27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50**

- נסו למצוא עוד מספרים כאלה.
- מספר יתחלק ב-3 אם סכום הספרות שלו מתחלק ב-3. אותו הדבר נכון גם לגבי 9. מספר יתחלק ב-9 אם סכום הספרות שלו מתחלק ב-9.

**האם די בכללי התחלקות אלה כדי לבדוק אם מספר נתון הוא מספר הרשד? (רמז: בדקו למשל את 99).**

(מתוך "בעקבות המספר 12", א' תורגמן (2006) גרסת טיוטה).

**המספר 12 - תריסר בארמית** - הוא מספר עתיר בתכונות מתמטיות, ואחד המספרים שניתן לומר עליהם שבכל תחום נוכל למצוא בו שימוש רב.

תריסר הוא אחד מאופני ההקבצה הקדומים ביותר. אולי משום שיש, בקירוב, תריסר מחזורים של הירח במחזור אחד של השמש. השימוש ב-12 כמספר בסיס, הידוע כשיטה הדואודצימלית, מקורו, כנראה, במסופוטמיה. המספר 12 משמש כבסיס ליחידות מידה, כמו, יחידות למדידת זמן ויחידות למדידת אורך. עד שנת 1971 שימש המספר 12 כבסיס ליחידות הכסף באנגליה, ועד היום יש הסבורים שהבסיס 12 יעיל יותר וטבעי יותר מהבסיס העשרוני.

שנים עשר בנים היו ליעקב אבינו מהם נוסדו "שנים עשר שבטי ישראל". 12 הסמלים של שבטי ישראל מעטרים בתי כנסת ומקומות ציבור רבים. החלוקה לשנים עשר שבטים קשורה ל-12 חודשי השנה והיא מאפיינת תרבות ריכוזית, שהיה לה מקדש אחד, מרכז שהיה צורך "להחזיק אותו" כלכלית. האחריות לכלכלת המקדש התחלקה בין השבטים - כל חודש היה אחראי שבט אחד. הכוהן הגדול במקדש לבש את החושן בו היו משובצות 12 אבני חן כנגד שנים עשר השבטים.

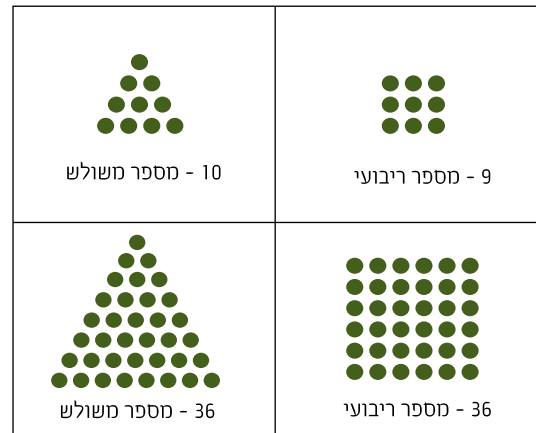
אחד מספרי התנ"ך הוא ספר תרי עשר (תרי עשר בארמית פירושו שנים עשר) שבו מופיעות נבואותיהם של 12 נביאים. גם במקרא מקבל המספר שנים עשר משמעות מיוחדת: בספר יהושע, פרק ד, מקים יהושע מצבת זיכרון בעלת שתיים עשרה אבנים בתוך נהר הירדן. כל אבן מייצגת את אחד משבטי ישראל. שתיים עשרה אבנים אלו מהוות מצבה לזכר הנס בו עברו בני ישראל בתוך נהר הירדן בעת שהגיעו לארץ ישראל. "למען תהיה זאת אות בקרבכם כי ישאלון בניכם מחר לאמר מה האבנים האלה לכם: ואמרתם להם אשר נכרתו מימי הירדן, מפני ארון ברית אדוני בעברו בירדן נכרתו מי הירדן, ויהיו האבנים האלה זיכרון לבני ישראל עד עולם". (יהושע ד, ז-ט). בגיל 12 בנות חוגגות "בת מצוה" ונהוג לאחל לכל אדם "עד 120 שנה" כסמל לאריכות ימים ובריאות.

**כמו בגיליונות הקודמים נציג גם בגיליון זה את מספרו של הגיליון בהיבטים שונים.**

3 12 הוא מספר מחומש

**מספר מצולע** הוא מספר שניתן לארגנו בצורה של מצולע משוכלל (הבנוי מנקודות). למשל, מספר משולש הוא מספר שניתן לייצגו על-ידי משולש שווה צלעות, ואילו מספר ריבועי הוא מספר שניתן לייצגו על-ידי ריבוע. להלן כמה דוגמאות:

איור 1: מספרים מצולעים



איור 2: 5 המספרים המחומשים הראשונים



**נוסחה אלגברית ליצירת מספרים מחומשים:**

הנוסחה האלגברית ליצירת מספרים מחומשים נתונה על-ידי.

$$P(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

עבור  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  טבעי  $n$

12 מתקבל כאשר  $n=3$

בדקו זאת ובדקו את הנוסחה לגבי המספרים הנ"ל ואחרים.

(מתוך "בעקבות המספר 12", א' תורגמן (2006) גרסת טיוטה)

הערה: המספר 1 מוגדר כמספר מצולע בכל ממד ומיוצג על-ידי נקודה אחת ●. באיור 2 מובאים חמשת **המספרים המחומשים** הראשונים שהם: **1, 5, 12, 22, 35**. בהצגתם הגיאומטרית.

4 12 הוא מספר נעלה (sublime number)

**מספר מושלם (perfect number)** הוא מספר שלם חיובי כך שהוא סכום של כל מחלקיו ממש (המחלקים ממש הם כל המחלקים מלבד המספר עצמו).

אז: מספר מושלם הוא מספר שלם, חיובי שסכום המחלקים ממש של מחציתו שווה למחציתו. המספר המושלם הקטן ביותר הוא 6, ואכן -  $6=1+2+3$  או  $6:2=3=1+2$

המספר המושלם הבא בתור הוא 28, ואכן -  $28=1+2+4+7+14$  בדקו לפי ההגדרה השנייה והיווכחו.

**מספר נעלה (Sublime)** הוא מספר שלם חיובי שאחד ממחלקיו (כולל הוא עצמו) הוא מספר מושלם וגם סכום כל מחלקיו (כולל הוא עצמו) הוא מספר מושלם. ואמנם בין המחלקים של 12 (ראו לעיל) קיים המספר 6 שהוא, אכן, מספר מושלם. וגם סכום כל המחלקים של 12 שהוא:  $28=1+2+3+4+6+12$  הוא מספר מושלם.

שימו לב! ידועים רק שני מספרים כאלו - הראשון הוא 12 והשני הוא (זו לא טעות!):

**6086555670238378989670371734243169622657830773351885970528324860512791691264**

(מתוך "בעקבות המספר 12", א' תורגמן (2006) גרסת טיוטה)

## 8 המספר 12 כבסיס ליחידות מידה

■ אפלטון, פילוסוף יוני, שחי במאה הרביעית לפני הספירה והיה מהממשיעים ביותר בתולדות הפילוסופיה המערבית ומייסד האקדמיה באתונה, בתארו את המדינה האידיאלית, ביסס את שיטת המטבע, את המשקלות, את המידות ואפילו את הקנסות שיוטלו בגין עבירות שונות, על כפולות של 12. גם אזורי הבחירה והייצוג באסיפה הכללית היו מבוססים על כפולות של 12.

■ קרל הגדול, גדול שליטי אירופה בימי הביניים, שבעקבות כיבושו שלט על ממלכה שהשתרעה על רוב שטחה של אירופה המערבית, קבע את שיטת המטבע שהיא:

$$1 \text{ ליברה} = 20 \text{ דינר}$$

$$1 \text{ סולידי} = 240 \text{ דינר}$$

שיטה זו מבוססת על שילוב שבין הבסיס העשרוני לבסיס 12.

■ באנגליה, עד לשנת 1971 הייתה נהוגה שיטת מטבע שלפיה: 12 פני = 1 שילינג ו-12 שילינג = 1 לירה אנגלית. מידות אורך בריטיות הן אינץ' ורגל, 12 אינץ' = 1 רגל. נוהגים לאפיין את גודל מסך הטלוויזיה או המחשב באינצ'ים: 21 אינצ'ס, 27 אינצ'ס וכדומה. (זהו אורך האלכסון של המסך באינצ'ים).

בשנת 1944 הוקמה האגודה הדואודצימלית (תריסרית) שמטרתה לערוך מחקרים ולחנך את הציבור לשימוש בבסיס 12 בשיטת הספירה, המדידות והמתמטיקה הטהורה.



■ בשנה העברית, הגרגוריאנית והמוסלמית יש 12 חודשים. ביממה יש 24 שעות, 12 שעות יום ו-12 שעות לילה, כשהיום והלילה שווים. ביהדות הייתה מקובלת חלוקה של היום (שעות האור) ל-12 "שעות" במהלך כל השנה. ל"שעות" אלו קוראים "שעות זמניות". כלומר, "שעה זמנית" =  $1/12$  מהיום.

## 5 12 ילדים משחקים בכדור

12 ילדים עמדו במעגל ושיחקו בכדור. בהתחלה העביר כל ילד את הכדור לשכנו משמאל. לאחר מכן החליטו שמעבירים את הכדור לכל ילד שני. ואז, שמו לב שרק חצי ממספר הילדים משחקים, לכן החליטו שיעבירו את הכדור לכל ילד שלישי. האם עכשיו ישחקו כל הילדים? הסבירו. הציעו כללים להעברת הכדור כך שכל הילדים ישתתפו במשחק. (ע"פ "מתמטיקה בהנאה", אביטל (1991) עמ' 101)

## 6 משחקים במספרים וזוכרים כפולות

נסתכל בספרות לפי הסדר 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

קיים:  $12 = 3 \times 4$   
וגם:  $56 = 7 \times 8$

אפשר להשתמש בעובדה זו כדי לזכור למכפלת 7 ב-8, שהיא אחת הקשות לזיכרון, אך היא נכונה רק לשני מקרים אלו של ארבע ספרות עוקבות.

## 7 "מספרים מתהפכים"

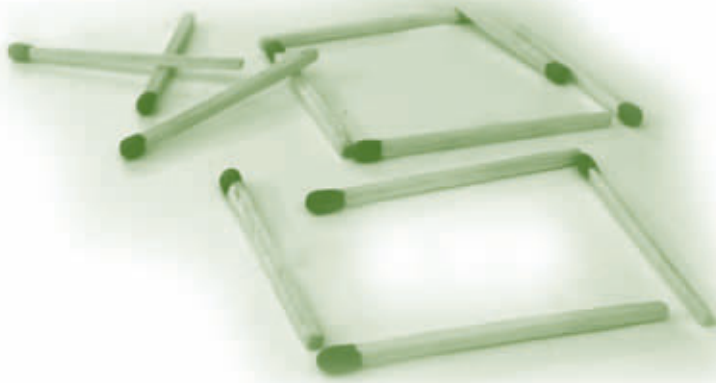
$$144 = 12^2 \quad \text{וגם:} \quad 441 = 21^2$$

מצאו עוד מספרים שאם נהפוך את סדר הספרות שלהם, ריבוע המספר החדש שנקבל יהיה בנוי מאותן ספרות שבנוי ריבוע המספר המקורי אבל בסדר הפוך.

בחורף שעה זמנית היא פחות מ- 60 דקות, ובקיץ השעה הזמנית היא יותר מ- 60 דקות. רק פעמיים בשנה שעה זמנית תהיה שווה לשעה רגילה, בימי השוויון באביב ובסתיו. שעות זמניות משמשות ביהדות לחישוב זמנים של מצוות שונות, כמו, תפילות, סוף זמן קריאת שמע, זמן הנחת תפילין, סוף זמן אכילת חמץ ועוד.

12 תריסרים ( $12^2 = 144$ ) ידוע בכינוי גרוס (Gross).  
 12 גרוס ( $12^3 = 1,728$ ) נקרא גרוס גדול (Great gross), שהוא מונח המשמש להעברה או קנייה של מוצרים באריזות גדולות.

(מתוך "בעקבות המספר 12", א' תורגמן (2006) גרסת טיוטה.)



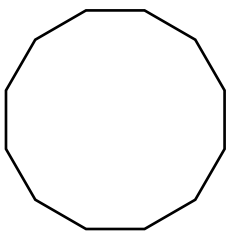
## 9 בנייה מ-12 גפרורים

א. סדרו מ- 12 גפרורים 3 ריבועים.

ב. סדרו מ- 12 גפרורים 6 ריבועים.

## 10 דודקגון משוכלל - הוא מצולע משוכלל בעל 12 צלעות. (regular dodecagon)

איור 3: דודקגון משוכלל



לדודקגון יש 12 צלעות שכולן שוות ו- 12 זוויות שוות, כל אחת בת  $150^{\circ}$ .

### איך לסרטט דודקגון משוכלל על-ידי מחוגה וסרגל בלבד ב- 4 צעדים?

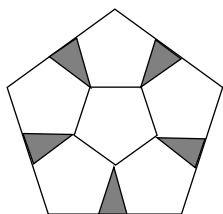
1. פתחו מחוגה ברדיוס כלשהו וסרטטו מעגל. (תחילה סמנו את נקודת המרכז).
2. מבלי לשנות את הרדיוס במחוגה סמנו נקודה כלשהי על המעגל, והקצו החל ממנה, באופן עוקב, 6 נקודות על המעגל. (מתקבלות בדיוק 6 קשתות שוות! מדוע?)
3. חלקו כל קשת (כמו בחצייה של קטע) לשני חלקים שווים.
4. חברו באופן עוקב את כל 12 הנקודות שעל המעגל. התקבל דודקגון משוכלל. מדוע?

- בתוך הדודקגון סרטטו משושה משוכלל (כך שיהיה חסום על-ידי הדודקגון). הסבירו כיצד הגעתם לכך.
- מה הקשר בין שני המצולעים?
- כמה משושים שונים אפשר לסרטט בתוך הדודקגון? הסבירו.
- חלקו את הדודקגון ל- 12 משולשים חופפים. מהו סוג המשולש שקיבלתם?
- חשבו את סכום כל הזוויות הפנימיות של הדודקגון. הסבירו את דרך החישוב.

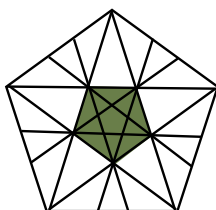
(מתוך "בעקבות המספר 12", א' תורגמן (2006) גרסת טיוטה.)

ב. שרטטו גם במחומש הקטן שקיבלתם את כל האלכסונים והמשיכו את הקווים שהאלכסונים מונחים עליהם (איור 6).  
 הקווים שהמשיכתם יוצרים, בין השאר, חמישה משולשים שווי-שוקיים חדי-זווית (איור 7).

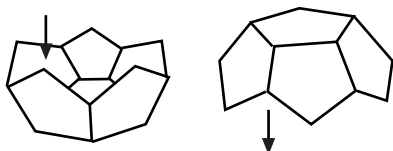
איור 7



איור 6

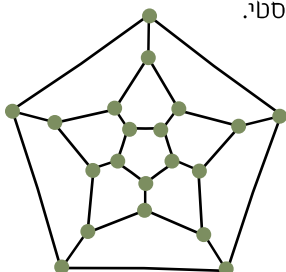


גזרו את המשולשים האלה ו"סגרו את החור שנוצר" כך שתקבלו מעין קערה. הצמידו את שתי ה"קערות" וקבלו תריסרון (איור 8).



איור 8

ההוראות לבניית התריסרון לקוחות מפעילות "חומשי" מאת ג'רי רוזן.  
 ג. את התריסרון ניתן להפוך לצורה מישורית על-ידי מתיחה-אם "נעשה חור" באחת הדפנות ונמתח כל הזמן את צלעות הדופן ואתן את כל התריסרון עד שתתקבל הצורה המישורית (איור 9). הדבר אפשרי באופן תיאורטי ובאופן מעשי, אם נניח שהתריסרון עשוי מחומר אלסטי.



איור 9

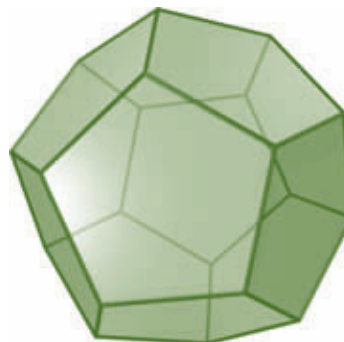
צורה מישורית של התריסרון ע"י מתיחה

הצורה המישורית מוצגת גם כלוח משחק שיצר המתמטיקאי וויליאם המילטון - משחק המילטון או Icosian Game

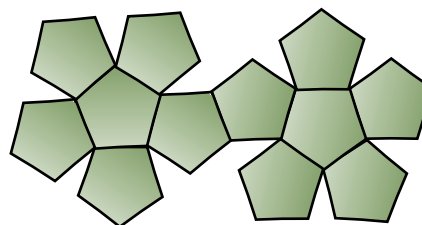
(מתוך "בעקבות המספר 12", א' תורגמן (2006) גרסת טיוטה).

11 תריסרון - דודקהדרון dodecahedron

איור 4



א. התריסרון



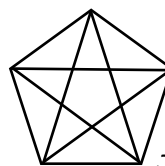
ב. פריסה של התריסרון

**תריסרון הוא פאון (גוף תלת-ממדי) שכל פאה שלו היא מחומש משוכלל (איור 4).** לתריסרון יש 12 פאות (מכאן השם תריסרון), 20 קדקודים, ו-30 צלעות (מקצועות). התריסרון הוא אחד מ-5 פאונים משוכללים המכונים הגופים המשוכללים של אפלטון.

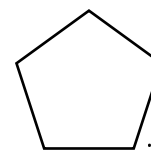
**כיצד לבנות תריסרון ממחומשים משוכללים?**

א. שרטטו את כל האלכסונים של שני מחומשים משוכללים (איור 5). קיבלתם מחומש משוכלל קטן נוסף שצלעותיו הן קטעים מתוך האלכסונים.

איור 5



ב.

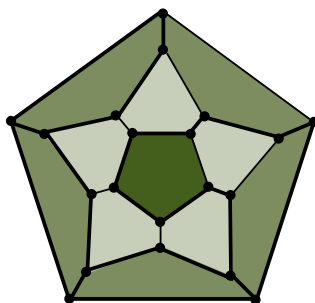


א.



## 12 משחק המילטון

בעיה זו נחשבת כקשה, ועד היום טרם נמצא לה פתרון מלא (תנאי הכרחי ומספיק) וגם לא אלגוריתם טוב למציאת המסילה או המעגל, גם כאשר ידוע שהם קיימים. במקרה שלנו, אם נהפוך את התריסרון לצורה מישורית, בלי לחתוך או לנתק שום קדקוד זה מזה, אז כפי שמתואר באיור 9, נקבל צורה מישורית שנוצרה על-ידי מתיחה. הבעיה המבוקשת היא למצוא מעגל המילטון שיעבור דרך כל הקדקודים, דרך כל קדקוד בדיוק פעם אחת, ויחזור לנקודת המוצא. הדבר אפשרי! להלן באיור 10 פתרון אחד. נסו למצוא פתרונות אחרים. נסו להסביר כיצד אתם פועלים.



איור 10:  
פתרון למשחק המילטון

(מתוך "בעקבות המספר 12", א' תורגמן (2006) גרסת טיוטה.)

המתמטיקאי וויליאם המילטון (1805-1865) פיתח משחק המבוסס על בעיה בתורת הגרפים, הנושאת גם היא את שמו - מסילת המילטון או מעגל המילטון. להבנת הבעיה נציג, דווקא, את המשחק תחילה, בעקבותיו הבעיה תובן ביתר קלות.

### המשחק - בעיית הסוכן הנוסע

לתריסרון יש, כזכור, 20 קדקודים (איור 4). נתאר לעצמנו כי התריסרון מייצג את כדור הארץ ועליו נבחרו 20 מהערים החשובות בעולם. כל עיר מיוצגת על-ידי קדקוד אחד, ואילו הצלעות מייצגות את קווי התחבורה שבין עיר לרעותה. הבעיה - על הסוכן לערוך סיור בכל הערים הללו, באופן שיבקר בכלן, בכל עיר בדיוק פעם אחת, ואז עליו לחזור לנקודת המוצא. התנועה היא רק דרך הקווים הקיימים. האם הדבר אפשרי?

כמובן, לבעיה זו יכולות להיות ואריאציות רבות ושונות. למשל, // אתרים שונים במקום כלשהו המקושרים ביניהם ברשת כבישים ידועה ונתונה. והבעיה היא האם ניתן למצוא מסלול המתחיל ומסתיים באותו אתר באופן שיעבור בכל האתרים, בכל אתר בדיוק פעם אחת ויחזור לנקודת המוצא? מסלול כזה נקרא בתורת הגרפים - מעגל המילטון. אם לא נדרש לחזור לנקודת המוצא, אלא אפשר להתחיל במקום אחד ולסיים במקום אחר, המסלול נקרא מסילת המילטון.

