מסע אל המספר 1

אברהם בלוך

במאמר זה אציג עיבוד של רעיון מתמטי והתאמתו למשחק לשיעור חשבון.
"מגרש המשחק" יהיה קבוצת המספרים הטבעיים, כלומר, המספרים:
1, 2, 3, . . . , 2006, 2007, וכו'.
בשלב ההכנה למשחק ובמהלכו נחשפים התלמידים לנושאים לימודיים כגון:
זוגיות ואי-זוגיות,
סדר ביצוע פעולות חשבון,
רישום מושכל של נתונים מספריים,
אלגוריתם חישובי ולולאה לוגית.

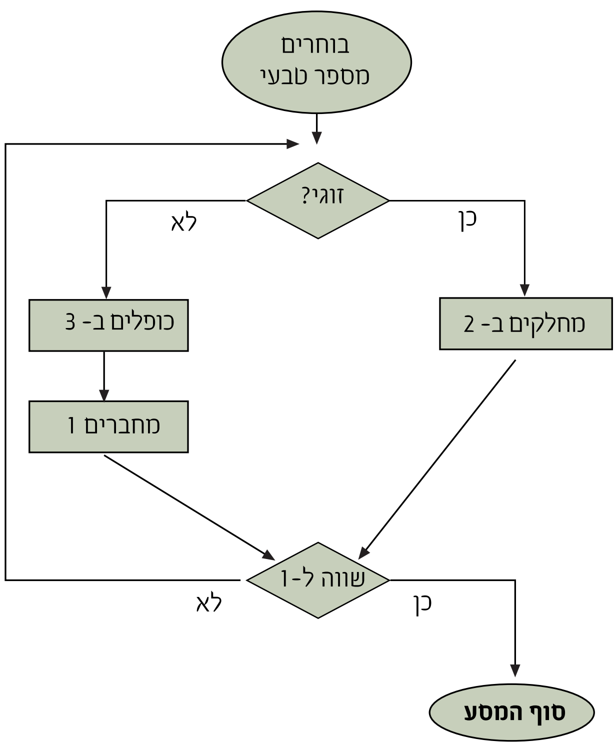
המשחק

שלב ראשון - בוחרים:
מספר טבעי גדול מ- 1.

שלב שני - בודקים:
אם המספר שבחרנו הוא זוגי, נחלק אותו ב- 2 ונרשום את התוצאה;
אם המספר שבחרנו הוא אי-זוגי, נכפיל אותו ב- 3, למכפלה נחבר 1 ונרשום את התוצאה.

שלב שלישי - בודקים:
אם התוצאה שרשמנו בסיום השלב השני שונה מ- 1, יש לחזור ולהפעיל על תוצאה זו את השלב השני.
אם התוצאה שרשמנו בסיום השלב השני שווה ל- 1 רושמים: סוף המסע.

תרשים זרימה של שלבי המשחק



דוגמה
בחרתי במספר **5**

המספר שבודקים	זוגי או אי-זוגי?	אז מה עושים?	התוצאה שקיבלנו
5			

שורה ראשונה בטבלה:
נרשום בעמודה השנייה "אי-זוגי". נרשום בעמודה השלישית את התרגיל **5x3+1** ונרשום 16 בעמודה הרביעית.

שורה שנייה בטבלה:
נרשום 16 בעמודה הראשונה.

המספר שבודקים	זוגי או אי-זוגי?	אז מה עושים?	התוצאה שקיבלנו
5	אי-זוגי	5x3+1	16
16			

נרשום "זוגי" בעמודה השנייה, תרגיל מתאים בעמודה השלישית, והתוצאה גם בעמודה הרביעית וגם בעמודה הראשונה של השורה הבאה.

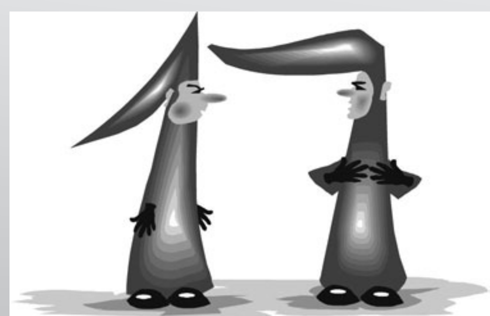
המספר שבודקים	זוגי או אי-זוגי?	אז מה עושים?	התוצאה שקיבלנו
5	אי-זוג	5x3+1	16
16	זוגי	16:2	8
8			

הטבלה במלואה נראית כך:

המספר שבודקים	זוגי או אי-זוגי?	אז מה עושים?	התוצאה שקיבלנו
5	אי-זוגי	5x3+1	16
16	זוגי	16:2	8
8	זוגי	8:2	4
4	זוגי	4:2	2
2	זוגי	2:2	1 - סוף המסע

דוגמה נוספת: בחרתי במספר **17**.
במקרה זה המסע יהיה יותר ארוך וכך תיראה הטבלה בסופו:

המספר שבודקים	זוגי או אי-זוגי?	אז מה עושים?	התוצאה שקיבלנו
17	אי-זוגי	17x3+1	52
52	זוגי	52:2	26
26	זוגי	26:2	13
13	אי-זוגי	13x3+1	40
40	זוגי	40:2	20
20	זוגי	20:2	10
10	זוגי	10:2	5
5	אי זוגי	5x3+1	16
16	זוגי	16:2	8
8	זוגי	8:2	4
4	זוגי	4:2	2
2	זוגי	2:2	1 - סוף המסע



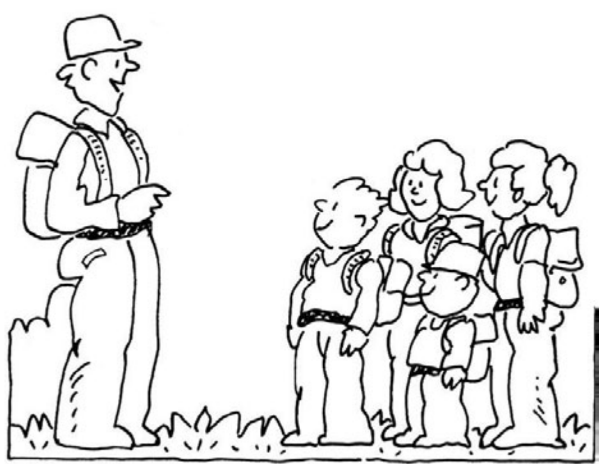
הצעות דידקטיות

1. ניתן לחלק את הכיתה לקבוצות, ולערוך בין הקבוצות מסע תחרותי אל המספר 1. אורך המסע, כלומר, מספר השורות שיש למלא עד שמגיעים לסוף המסע, תלוי במספר שהוכרז בתחילת המסע. לדוגמה, מסע קצר מתקבל כשבוחרים, למשל, בשלב הראשון ב-11 או 12 או 13 או 17 או 21.
מסע באורך בינוני מתקבל כשבוחרים, למשל, 18 או 29 או 23 או 35 או 61. מסע ארוך מתקבל כאשר המסע מתחיל, למשל, מ- 25 או 33 או 19, או 325.
קבוצה שתחשב את השלבים במהירות מרבית תנצח.

2. אפשר גם לערוך תחרות שונה על אורך המסע, שבה יש לבחור במגבלות נתונות את המספר שעבורו יש מספר מינימלי/מקסימלי של חישובים. למשל, מבין כל המספרים הטבעיים שנמצאים בין 10 לבין 20, איזה מספר מתחיל את המסע הארוך ביותר? או, מבין כל המספרים שנמצאים בין 20 לבין 30, איזה מספר מתחיל את מסע הקצר ביותר?

3. במקרה של מסע ארוך, ובהנחה שהתלמידים כבר הבינו והפנימו את רעיון המשחק, אפשר לוותר על הטבלה ולסמן את הצעדים בעזרת חיצים. למשל, אם המסע מתחיל מהמספר 70, הרישום המקוצר יהיה:

70 ← 35 ← 106 ← 53 ← 160 ← 80 ← 40 ←
20 ← 10 ← 5 ← 16 ← 8 ← 4 ← 2 ← 1



מבט מתמטי על המושגים שהופיעו במסע

מספר זוגי ניתן לזיהוי במספר אופנים שונים, שקולים זה לזה: מספר זוגי הוא סכום של שני מספרים טבעיים שווים, למשל, המספר 6 הוא זוגי משום שהוא תוצאה של 3+3. מספר זוגי הוא גם כפולה של המספר 2, למשל - המספר 6 הוא זוגי כי הוא תוצאה של **3x2**.
וכן מספר זוגי מתחלק ב-2 עם שארית אפס, למשל - המספר 6 הוא זוגי כי מתקיים (**שארית 0**) **6:2=3**. בנוסף, מספר הוא זוגי, אם ורק אם סיפרת האחדות שלו היא אחת מבין הספרות 0, 2, 4, 6, או 8, למשל, 16 הוא מספר זוגי כי ספרת האחדות שלו היא 6.

מספר אי-זוגי ניתן לזיהוי בדרך השלילה: זהו מספר טבעי שאינו זוגי, למשל - כל האפשרויות לקבל 7 כתוצאה של חיבור בין שני מספרים טבעיים: **0 + 7, 1+6, 2+5, 3 +4** . מכיוון שלא ניתן לקבל 7 כתוצאה של חיבור בין שני מספרים טבעיים שווים, הרי המספר 7 הוא אי-זוגי. סימן ההיכר מאפשר זיהוי ישיר: מספר הוא אי-זוגי, אם ורק אם ספרת האחדות של המספר היא אחת מהספרות 1, 3, 5, 7 או 9.

סדר ביצוע פעולות החשבון יכול להשפיע על תוצאת החישוב. מקובל לשים בתוך סוגריים את הפעולה אותה מתכוונים לבצע ראשונה. למשל - **7x(3+1)= 28** מבצעים קודם את פעולת החיבור ואז כופלים את התוצאה ב-7.
בתרגיל **(7x3)+1= 22** מבצעים קודם את פעולת הכפל ומחברים לתוצאה 1. בתרגיל האחרון מקובל להשמיט את הסוגריים מכוח ההסכם שפעולת הכפל קודמת לפעולת החיבור.

לרישום מושכל של נתונים מספריים יש ערך חינוכי-דידקטי. הוא מאפשר לעקוב אחר התפתחות החישוב, לבקר את נכונותו ולגלות דפוסים ומגמות מתמטיות של התהליך. דוגמה לרישום מושכל של נתונים, הוצגה במשחק בצורת טבלה.

ניתן להסביר את משמעות המושג **אלגוריתם** על-ידי שימוש במתכון מדויק ומפורט להכנת עוגה. מתכון כזה הוא למעשה סדרה של הוראות ברורות (קח 200 גרם קמח, 100 גרם חמאה וכו' ...) כדי לבצע משימה מסוימת.

מקור המילה אלגוריתם הוא בשמו של המתמטיקאי הפרסי אל חווארizmi מהמאה התשיעית.

ניתן לתאר את האלגוריתם באמצעות **תרשים זרימה**. שלבי המשחק "מסע אל ה- 1" תוארו גם על-ידי תרשים זרימה שבו יש גם **לולאה לוגית**; לוקחים נתון (במקרה שלנו מספר טבעי), מבצעים אתו סדרה של פעולות ואז התוצאה המתקבלת מחליפה את הנתון המקורי, כלומר, מבצעים על התוצאה את אותה סדרה של פעולות שקודם ביצענו על הנתון המקורי. לאחר מכן, התוצאה החדשה מחליפה את הקודמת. לולא הייתה ההוראה להפסיק את המשחק כאשר מקבלים תוצאה שווה לאחד, אזי הייתה מתקבלת באלגוריתם לולאה לוגית אינסופית: כאשר מתקבלת התוצאה 1 ולא מפסיקים את המשחק, בהיות המספר 1 אי-זוגי מבצעים, **1+3x1**, מקבלים 4, מחלקים ב-2, מקבלים 2 שאותו שוב מחלקים ב-2, מגיעים ל-1 שהוא אי-זוגי וכך עד אינסוף.

אורך המסע כפונקציה של המספר ההתחלתי הוא בגדר תעלומה. גם **קיום** הפונקציה הוא בגדר תעלומה, אין עד היום הוכחה שה"מסע" יגיע לסופו.

כאשר ניסיתי לחקור את ה"מסע" גיליתי שעבור כל n שלם וגדול מ-1 המספר $\frac{4^n-1}{3}$ הוא מספר שלם אי-זוגי.

כלומר, כשמספר מסוג $\frac{4^n-1}{3}$ נבחר כהתחלתי, המסע מתחיל בכפל ב-3 וחיבור של 1 לתוצאה. לאחר מכן, "נכנסים למנהרה" של חילוק ב-2 (כל הזמן) עד סוף המסע. זה מה שקורה כאשר המספר ההתחלתי הוא 5 או 21 או 85 או 341 למשל.

ההוכחה היא פשוטה אבל דורשת "ציוד אלגברי" כמו אינדוקציה או חילוק רב-איבר בדו-איבר, שמקומם לא במאמר זה. אולם, "גילוי" זה הוא מאוד חלקי וכמעט אפסי לגבי התעלומה, ונשארת השאלה:

האם המסע (שמתנהל לפי כללי המשחק המקוריים) יגיע תמיד אל המספר1 יהיה אשר יהיה המספר ההתחלתי?

לפי מיטב ידיעתי לשאלה זאת אין עד היום תשובה. עדיין אין הוכחה שהמסע תמיד יגיע אל המספר 1, יהיה אשר יהיה המספר ההתחלתי, וגם לא נמצא מספר התחלתי שעבורו המסע לא יגיע ל-1.

מפליא הדבר שבעיה מתמטית הבנויה מ"חומרי גלם" הנלמדים בבית הספר היסודי, ממשיכה להיות בלתי פתורה.

על מחבר המאמר:

אברהם בלוך

מורה, פנסיונר, בן 84. עלה לארץ בשנת 1964 עבד בבית ספר "בסמת", בקיבוצים יגור, גשר-הזיו ומעגן-מיכאל ובמכללת אורנים בה לימד גננות ומורים, לכל שכבות הגיל, במחלקות להוראת המדעים, מתמטיקה ופיסיקה.