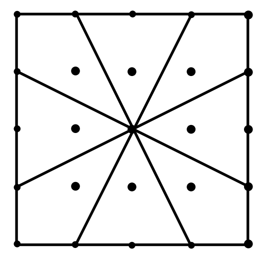
בעיית השמיניות - בעיה אחת... תשובה אחת... ודרכים רבות

חנה לב - זמיר

במאמר של Watanabe (1996) "Ben's Understanding of One-Half" - **ההבנה של בן מהו חצי** שתורגם לעברית ומופיע באתר מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי והקדם יסודי, הוצגה הבעיה הבאה.

לוח מסמרים זה מחולק לשמונה חלקים.
האם ניתן לומר שכל אחד מהחלקים מהווה שמינית מהריבוע?



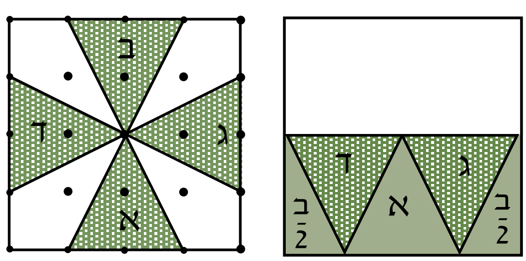
נכון לשאול: האם כל החלקים שווים בשטחם? או, האם כל חלק מהווה **שמינית** משטח הריבוע? אולם מכיוון שבדרך כלל, אנו מסתפקים בשאלה כמו: "האם החלקים שווים?" התפיסה הרווחת, קושרת את המונח "שוויון" עם חפיפה, ועל כן תלמידים רבים (ביניהם גם פרחי הוראה ומורים), טוענים שלוח המסמרים אינו מחולק לשמיניות, משום שהחלקים אינם חופפים זה לזה ולכן אינם שווים בגודלם.

סביר להניח שתפיסה זו ניזונה לא במעט משימוש במודלים המחולקים לחלקים חופפים, ומיעוט המפגשים עם יחידות שלמות המחולקות לחלקים שווי שטח אך לא חופפים וגם, כמובן, לשימוש מועט מדי בהתייחסות להגדרה ברורה של המושג "שוויון".

במהלך שיעורי הדידקטיקה במכללה, ובמסגרת השתלמויות בנושא מהות השבר הפשוט, אני נוהגת להציג בעיה זו, ולפתוח אותה לדיון. כשהבעיה מוצגת בתחילת הוראת הנושא, נשמעות תשובות רבות בסגנון: " החלקים לא שווים ולכן לא מדובר כאן בשמיניות", או "ארבעת המשולשים שווים וכך גם ארבעת הדלתונים, אבל מכיוון שמדובר בדלתון ומשולש, אין הם שווים".

כשהבעיה מוצגת לאחר מספר פעילויות, המפגישות יחידות שלמות המחולקות לחלקים שאינם חופפים, התגובות זהירות יותר.
מרבית התגובות הן מן הסוג: "אם החלקים שווים בשטחם, אז ייתכן שמדובר בשמיניות", או "צריך לבדוק אם שטח המשולש שווה לשטח הדלתון". מכאן אנו יוצאים לבדיקה ולהוכחה, וכדי לעודד את החשיבה והיצירתיות, אני נוהגת לבקש להוכיח שוויון או אי-שוויון שטחים בשתי דרכים שונות .
קיימות מספר הוכחות, וכל הוכחה מביאה לידי ביטוי ידע שונה ומיומנויות חשיבה ברמות שונות.
להלן מספר הוכחות שליקטתי במהלך הדיונים, אני מניחה שישנן דרכים נוספות ואשמח להוסיפן למאגר.

אפתח בהוכחה של תלמידת כיתה ה, המתבססת על גזירה וריצוף:
"אספתי את כל המשולשים וסידרתי אותם באופן שהם כיסו בדיוק חצי ריבוע ומכיוון שכולם זהים, כל אחד מהם "תופס" שמינית מהריבוע (ארבעה משולשים על חצי ריבוע). מכיוון שנותרו עוד ארבעה דלתונים זהים, גם בלי לבדוק ברור שישלימו בשטחם את הריבוע, מה שאומר שכל דלתון "תופס" שמינית מהריבוע, לכן כל חלק הוא **שמינית** מהריבוע השלם". (איור 1)

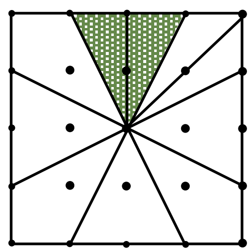


איור 1

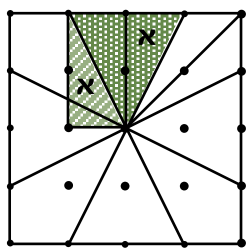
כל ההוכחות הבאות הן של סטודנטיות ומורות

1. שלוש הוכחות המתבססות על יחידות שטח ריבועיות

א. שטח הריבוע 16 יחידות ריבועיות, שטח כל משולש הוא 2 יחידות ריבועיות (איור 2). ניתן להדגים זאת באמצעות גזירת המשולש על קו הסימטריה והעתקת המשולש באמצעות סיבוב, וכך לבנות מלבן ששטחו בדיוק 2 יחידות שטח (איור 3), מכיוון שבריבוע השלם יש 4 משולשים חופפים, שטחם הכולל הוא 8 יחידות שטח ריבועיות. נותרו 8 יחידות שטח ריבועיות לארבעת הדלתונים ומכיוון שהם חופפים, שטח כל אחד מהם 2 יחידות ריבועיות. מכאן ששטח המשולש שווה לשטח הדלתון, אף כי אינם חופפים, וניתן לומר ששטח כל אחד מהחלקים מהווה שמינית משטח הריבוע הגדול.

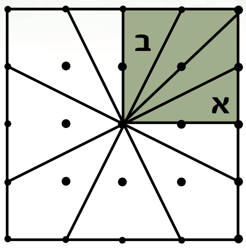


איור 2

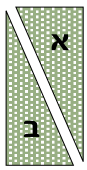


איור 3

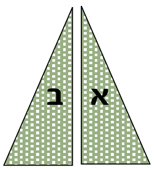
ב. אפשר לחלק את הריבוע השלם לארבעה ריבועים (איור 4), שטחו של כל ריבוע הוא **רבע** משטח הריבוע הגדול, כלומר: 4 יחידות ריבועיות. משני המשולשים ישרי-הזווית, ניתן לבנות מלבן ששטחו 2 יחידות ריבועיות (איור 5), מכאן ששטח הדלתון גם הוא 2 יחידות ריבועיות. מאותם שני המשולשים ניתן לבנות את המשולש שווה השוקיים (איור 6), מכאן ששטח הדלתון שווה לשטח המשולש, ושטח כל אחד מהם הוא **שמינית** משטח הריבוע.



איור 4



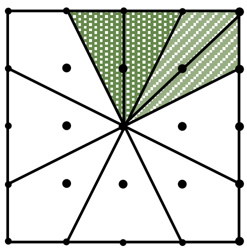
איור 5



איור 6

א

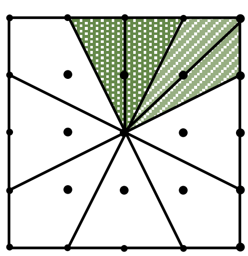
ג. ניתן לחלק את הריבוע לארבעה מרובעים חופפים (איור 7), שטח כל אחד מהם מהווה **רבע** משטח הריבוע הגדול, ובדומה לדרך הקודמת, מוכיחים ששטח הדלתון שווה לשטח המשולש ועל כן כל אחד מהם מהווה **שמינית** משטח הריבוע.



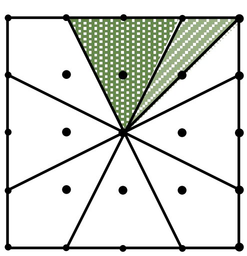
איור7

2. הוכחות המתבססות על נוסחת חישוב שטח משולשים

א. המשולש בנוי משני משולשים ישרי-זווית חופפים, הדלתון בנוי משני משולשים קהי-זווית חופפים (איור 8), הבסיסים של המשולש ישר-הזווית והמשולש קהה-הזווית שווים באורכם ולשניהם אותו גובה (הגובה של המשולש קהה-הזווית הוא הניצב של המשולש ישר-הזווית (איור 9), ולכן שטחם שווה, ומכאן ששטח הדלתון הבנוי משני משולשים קהי-זווית חופפים, שווה לשטח המשולש שווה-השוקיים הבנוי משני משולשים ישרי-זווית חופפים, וכל אחד מהם מהווה **שמינית** משטח הריבוע השלם.

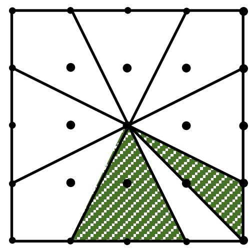


איור 8



איור 9

ב. אורך הבסיס של המשולש שווה השוקיים: 2 יח', וגבהו: 2 יח', ועל-פי חישוב, שטחו 2 יח' שטח (איור 10). את הדלתון ניתן לחלק לשני משולשים חופפים. אורך הבסיס של כל אחד מהם יח' אחת וגובהם 2 יח', מכאן ששטח כל אחד מהם יח' שטח אחת ושטחו הכולל של הדלתון 2 יח' שטח. מכאן ששטח המשולש שווה לשטח הדלתון וכל אחד מהם מהווה שמינית משטח הריבוע השלם.



איור 10

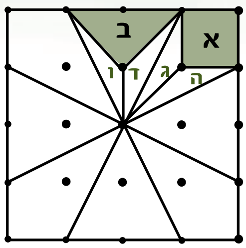
3. הוכחה המשלבת שטח, תכונת האלכסון במקבילית וחפיפת משולשים

שטח הריבוע הקטן בדלתון (**א**), שווה לשטח משולש (**ב**) במשולש שווה השוקיים, שטחו של כל אחד מהם יחידה ריבועית אחת (איור 11). יש להוכיח ששטח הדלתון הבנוי ממשולשים **ג + ה**, שווה לשטח הדלתון הבנוי ממשולשים **ד + ו**.

האלכסון הראשי בכל דלתון מהווה גם ציר סימטריה, מה שאומר שזוג המשולשים **ג** ו- **ה** הם חופפים, כנ"ל לגבי המשולשים **ד** ו- **ו** ועל כן מספיק להוכיח את שוויון השטחים של המשולשים **ג** ו- **ד**. משולשים **ג** ו- **ד** יוצרים מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות שוות, על-פי אורכי הקטעים בלוח המסמרים), האלכסון במקבילית מחלק אותה לשני משולשים חופפים המתקבלים זה מזה בסיבוב, מכאן שמשולש **ג** שווה בשטחו למשולש **ד**. משולש **ג** חופף למשולש **ה** ומשולש **ד** חופף למשולש **ו** ועל כן ניתן לומר ששטח הדלתון שווה לשטח המשולש.

ניתן להוכיח את חפיפת המשולשים **ג** ו- **ד** באמצעות משפט החפיפה המתייחס לשוויון של שלוש הצלעות. בהוכחה זו, אין צורך להתייחס למספר יחידות השטח של הדלתון ושל המשולש.

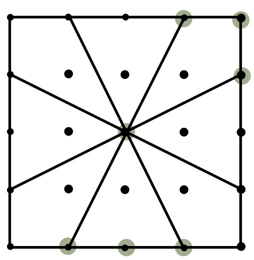
מכיוון שיש ארבעה דלתונים וארבעה משולשים ששטחם שווה, ניתן לומר שכל חלק מהווה **שמינית** מהשלם.



איור 11

4. הוכחה הנשענת על חוק פיק לחישוב שטח מצולעים על לוח מסמרים

גם למשולש וגם לדלתון 4 נקודות שפה (נקודות בהיקף). לשניהם נקודת פנים (נקודות בתוך המצולע) אחת, ועל-פי הנוסחה של פיק לחישוב השטח, שטחם זהה (איור 12).



איור 12

נוסחת פיק לחישוב שטח מצולעים: $S = \frac{x}{2} - 1 + y$

x - מספר נקודות על ההיקף.

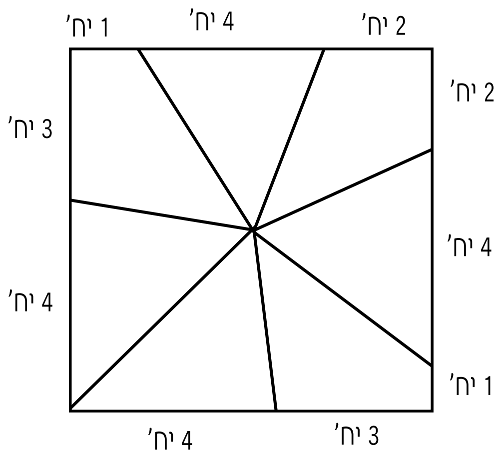
y - מספר נקודות פנים.

לכל אחת מההוכחות שהובאו - על-ידי תלמידת כיתה ה, פרחי ההוראה והמורים, יש לגייס ידע שונה וברמה שונה בנושאים: חישוב שטחים (בדרכים שונות וברמות שונות), חפיפת משולשים, ויישום הידע על תכונות המקבילית, סימטרייה שיקופית (במשולש שווה השוקיים, בדלתון), סימטרייה סיבובית (במקבילית, במרובע השלם), נוסחת פיק ויישומה (נושא שנלמד בדרך כלל במסגרות העשרה).

לסיום בעיה דומה.
נסו אותה עם תלמידיכם.

למסיבת יום ההולדת של רותם, הגיעו 6 חברים. אמה אפתה עוגה ריבועית שמידותיה 7x7. היא חשבה איך לחלק את העוגה ל- 7 חלקים, שמתחברים אל נקודת המרכז של העוגה, והחליטה על החלוקה הבאה:

אך... האם החלקים שווים?
האם כל חלק הוא שביעית מהעוגה?



מקורות:

Spitler, G. (1982). The Shear Joy of Area. *Arithmetic Teacher*, April.
Watanabe, T. (1996). Ben's Understanding of One-Half, *Teaching Children Mathematics*, April.
Litwiller, B.H., & Duncan, D.R. (1983). Areas of Polygons on Isometric Dot Paper: Pick's Formula Revised. *Arithmetic Teacher,* April.

על מחברת המאמר:

חנה לב-זמיר

מורה לדידקטיקה של הוראת המתמטיקה במכללת אורנים ומייעצת לסטודנטים ומורים במרכז לחינוך מתמטי באורנים.