

# ההסבר האלגברי למשימות ומשחקי חשבון מפתיעים

משה סטופל וגלעד הר-שפר

## משימה מס' 1

### יחי המהירות

מבקשים לבחור מספר דו-ספרתי ולהכריז עליו. התחרות היא למצוא במהירות מרבית את הסכום של המספר הנבחר עם תשעת המספרים העוקבים שלו.

לדוגמה:

יהא המספר הנבחר 63, יש למצוא את סכום המספרים:

$$63 + 64 + 65 + \dots + 72$$

כמובן אפשר לחבר את המספרים אחד אחרי השני אך זוהי דרך ארוכה. דרך קצרה יותר היא להשתמש בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

$$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

( $a_1$  - איבר ראשון,  $a_n$  - איבר אחרון,  $n$  - מספר איברים), עבור הדוגמה הנ"ל הסכום הוא 675, לפי:

$$\frac{(63 + 72) \cdot 10}{2} = 675$$

למעשה, לכל מספר נבחר יש לחבר את המספר האחרון בסדרה ולהכפיל את התוצאה ב-5, כי מחברים 10 מספרים. האם זאת הדרך הקצרה ביותר למציאת הסכום במהירות המרבית? התשובה לא. מתברר שמיידית עם הכרות המספר הנבחר ניתן להכריז על הסכום שלו עם תשעת המספרים העוקבים וזאת ללא שימוש במכשירי כתיבה או חשבון.

כדי לגלות את השיטה אפשר להציג כמה מספרים נבחרים ואת הסכומים המתקבלים.

### הקדמה

פעמים רבות, בעת הצגת משימות ומשחקי חשבון, במסגרת השתלמויות של מורים לחשבון מהחינוך היסודי, ביקשו המורים להבין ולקבל את ההסבר המתמטי שעומד מאחורי המשימה או המשחק, בבחינת "למה זה יוצא כך?"

ברוב המקרים ההסברים מבוססים על אלגברה יסודית של כיתה ז, ברמה שאף תלמידים מצטיינים מהכיתות הגבוהות של ביה"ס היסודי, המשתתפים בחוגי מצוינות למיניהם, מסוגלים להתמודד אתם.

דוגמאות למשימות מסוג זה הן המשימות של הוכחת התחלקות של ביטוי במספר מסוים. במשימות אלה לא נחוץ להשתמש בכלי של אקסיומת האינדוקציה (הנושא מופיע בתכנית הלימוד לבגרות של 4 ו-5 י"ל) ואף לא בטכניקה אלגברית. לדוגמה, כשמבקשים להוכיח שבעבור כל מספר טבעי הביטוי  $n^2 + n$  מתחלק ב-2 מספיק להכיר ולהבין את השפעת פעולות החשבון על מספרים זוגיים ואי-זוגיים, ואין צורך לבטא את הביטוי בצורה  $n(n+1)$  - מכפלה של שני מספרים עוקבים. גם כשמבקשים להוכיח כי הביטוי  $10^n + 2$  מתחלק ב-3 עבור כל  $n$  טבעי, מספיק לנמק שהערך המספרי של הביטוי מורכב תמיד מספרה אחת של המספרים 1 ו-2 ושאר הספרות 0. משום כך סכום ספרותיו הוא 3 וזה הסימן להתחלקות ב-3. סביר מאוד, שאנו זוכרים מהילדות משימות מהסגנון: בחר מספר תכפיל אותו ב-5 וכ'...

במאמר זה נציג משימות "מפתיעות" בליווי דוגמאות וההסבר המתמטי-אלגברי של מרביתן, כדי להבליט את הקשר בין המשימה להסבר המתמטי שלה - בבחינת לדעת מה להשיב לתלמידים.



משימה מס' 2

**תמיד 1089**

יש לבחור מספר תלת-ספרתי שספרת האחדות שלו שונה מאפס וכן שההפרש בין ספרת האחדות לספרת המאות, או להפך, גדול מ-1. לאחר בחירת המספר יש לרשום את המספר הבנוי מאותן הספרות אך בסדר הפוך. מהמספר התלת-ספרתי הגדול מביניהם יש להחסיר את המספר הקטן. מתקבל מספר תלת-ספרתי חדש.

(א) מהי תמיד ספרת העשרות של המספר? בדקו ונמקו.  
 (ב) אם מחברים את המספר התלת-ספרתי החדש עם מספר הבנוי מאותן ספרות אך בסדר הפוך, מהו המספר שיתקבל תמיד? בדקו ונמקו.

דוגמה:

המספר הנבחר 358 והמספר בסדר ספרות הפוך 853. שלבי החיסור והחיבור מתוארים:

שלב א:

$$\begin{array}{r} 853 \\ - 358 \\ \hline 495 \end{array}$$

שלב ב:

$$\begin{array}{r} 594 \\ + 495 \\ \hline 1089 \end{array}$$

בשלב א מתקבל תמיד מספר שספרת העשרות שלו 9. בתום שלב ב מתקבל תמיד המספר 1089, עבור כל בחירה של מספר נבחר.

המספר הנבחר	סכום המספר הנבחר עם תשעת העוקבים
20	245
32	365
58	625
99	1035

רואים שבכל סכום, ספרת האחדות היא 5, וספרת העשרות והמאות הוא המספר הנבחר בתוספת של 4. מכאן מוצאים בקלות את הסכום עבור כל מספר נבחר.

**ההסבר המתמטי**

יהא  $a$  המספר הנבחר, אז הסכום שלו עם תשעת המספרים העוקבים הוא:

$$a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+9) = 10a + 45$$

כלומר, כדי לקבל את הסכום יש להכפיל את המספר הנבחר ב-10 (להוסיף לו אפס כספרת אחדות) ולהוסיף לתוצאה 45, פעולה שניתן לבצע בקלות ובמהירות בראש.

בהמשך למשימה זו אפשר להציג לתלמידים את השאלות הבאות:

- האם השיטה המהירה שהוצגה, מתאימה לחישוב הסכום כאשר המספר הנבחר, יהיה תלת-ספרתי או ארבע-ספרתי?
- האם השיטה המהירה שהוצגה, מתאימה גם לחיבור המספר הנבחר עם תשעת המספרים העוקבים שקדמו לו?
- האם קיימת גם שיטה מהירה לחישוב הסכום של המספר הנבחר עם חמשת המספרים העוקבים שלו?

משימה מס' 3

מציאת גילו של אדם בדרך עקיפה

כשאדם מסרב לגלות את גילו (אולי מחשש מעין הרע), אפשר באמצעות תרגיל מתמטי פשוט לגלות את גילו. להלן ההליך: מבקשים מהאדם להכפיל את גילו פי 10 (פשוט להוסיף ספרת אחדות 0). אחרי זה מבקשים ממנו לחסר מהתוצאה כפולה קטנה של 9 (81, . . . , 36, 27, 18, 9) כפי שיבחר לעצמו. כעת מבקשים ממנו לגלות את התוצאה הסופית (כזכור, לא ידוע הגיל ולא גודל המכפלה ב-9 שהופחתה). על-סמך התוצאה הסופית ניתן לגלות את גילו של האדם.

דוגמאות:

התוצאה הסופית 432 הגיל 45.

התוצאה הסופית 671 הגיל 68.

באופן מעשי - עם קבלת התוצאה הסופית מוסיפים את ספרת האחדות לחלק השמאלי של יתרת המספר ומתקבל הגיל.

למשל, אם גילו של האדם 37, לאחר הכפלה ב-10 והפחתה של 36 (4 x 9) מקבלים 334, והגיל הוא 33+4=37.

ההסבר המתמטי

יהא גיל האדם  $x$  ו- $m$  מספר טבעי בתחום  $1 \leq m \leq 9$  התוצאה הסופית היא,  $10x - 9m$ , או בצורת רישום אחרת,  $10x - 10m + m = 10(x - m) + m$ . כלומר, מהגיל הורידו את גורם המכפלה ואת התוצאה הכפילו ב-10. התקבל מספר שהחלק השמאלי (ללא ספרת האחדות) קטן ב- $m$  מגיל האדם. כשמוסיפים לחלק זה את  $m$  מקבלים את הגיל.

ההסבר המתמטי

יהא המספר הנבחר  $\overline{abc}$  שערכו  $100a + 10b + c$ . המספר הבנוי בסדר הפוך הוא  $\overline{cba}$  וערכו:  $100c + 10b + a$ .

מניחים ש-  $\overline{abc} > \overline{cba}$  ומחשבים את ההפרש ביניהם,  $\overline{abc} - \overline{cba} = 99a - 99c = 99(a - c)$  הערך של ההפרש הוא 99 פעם ההפרש שבין ספרת המאות לספרת האחדות של המספר הנבחר (או ההפך). ההפרש  $(a - c)$  מקבל את הערכים: 9, . . . , 2, 3, מכאן, תשעת הערכים היחידים שיתקבלו להפרש המספרים הם: 891, 792, 693, 594, 495, 396, 297, 198. מכאן רואים שהתשובה לסעיף א היא, שבכל אחד מהמספרים ספרת העשרות היא 9.

בכל אחד מהמספרים שהתקבלו לאחר שלב א, סכום ספרת האחדות וספרת המאות הוא 9. לכן, כאשר מחברים בשלב ב את המספר שהתקבל בשלב א עם המספר הרשום בסדר הפוך, הסכום של ספרות האחדות בשניהם וגם סכום ספרות המאות בשניהם הוא 9. הסכום של ספרות העשרות הוא 18, דבר המגדיל ב-1 את ספרת המאות ומתקבל המספר 1089.





משימה מס' 4

לגלות את המספר שנבחר

מבקשים מתלמיד לבחור מספר (שלם), להכפיל אותו ב-2, מהתוצאה להפחית 1, את התוצאה החדשה להכפיל ב-6, ולאחר מכן להוסיף 9. כעת על התלמיד לגלות את התוצאה הסופית. על סמך תוצאה זו אפשר בקלות לגלות את המספר שנבחר. אם נניח שהתוצאה הסופית היא 63, אזי המספר הנבחר הוא 5. הכיצד?



משימה מס' 5

גילוי תאריך הלידה, יום וחודש

מבקשים מהאדם שאת תאריך הלידה שלו מבקשים לגלות, להכפיל את יום הלידה ב-3. למכפלה להוסיף 5, את התוצאה להכפיל ב-4, לתוצאה להוסיף את יום הלידה, אחר כך להוסיף את חודש הלידה, ומהתוצאה הסופית לחסר 20. אם נניח שהתוצאה הסופית היא 280, הרי שמדובר על אדם שנולד ב-21 ליולי. הכיצד?

ההסבר המתמטי

יהא  $x$  יום הלידה ו- $y$  חודש הלידה. ערך התוצאה הסופית יהיה בהתאם לשלבים שהופעלו,  
 $4(3x+5)+x+y-20=13x+y$   
 במקרה זה,  $x$  וגם  $y$  מספרים שלמים. חלוקת התוצאה הסופית ב-13 תניב במנה מספר שלם שהוא יום הלידה והשארית היא חודש הלידה.  
 בדוגמה שהוצגה: (שארית 7)  $280:13=21$

במקרה שיש לגלות מספר נעלמים שערכיהם מספרים חד-ספרתיים, יש לבחור גורמי מכפלה מתאימים, ולהחסיר מהתוצאה הסופית מספר מתאים כך שבתוצאה הסופית הנעלמים יופיעו לפי סדר. ההדגמה תתבצע במשימה הבאה.

ההסבר המתמטי

יהא המספר הנבחר  $a$ , ערך התוצאה הסופית יהיה בהתאם לפעולות שהופעלו על המספר הנבחר,  
 $6 \times (2a-1) + 9 = 12a + 3$   
 מאחר שהמספר הנבחר שלם, הרי שכדי לגלות אותו יש לחלק את התוצאה הסופית ב-12. מנת החלוקה ללא השארית היא המספר שנבחר.  
 על עיקרון זה ניתן לבנות משימות מפתיעות דומות. יש לתת את הדעת שבחלוקת התוצאה ב-12 הערך השלם במנה הוא החשוב ואילו השארית אינה רלוונטית. מסיבה זו, תוצג משימה שגם לערך השלם שבמנה וגם לשארית ישנה חשיבות.



הגיל

משימה מס' 7

היחידה הצבאית של אריאל שרון

מבקשים לבחור מספר דו-ספרתי שספרת האחדות שלו אינה 0. יש לבנות את המספר הדו-ספרתי ההפוך, ולהכפיל את המספרים זה בזה. מהמכפלה יש להחסיר את המכפלה של סכום ריבועי הספרות של המספר הנבחר במספר 10. את התוצאה יש לחלק בספרה הראשונה של המספר הנבחר, ואת התוצאה שהתקבלה להמשיך ולחלק בספרה השנייה של המספר הנבחר. תמיד יתקבל אותו מספר ללא תלות במספר הנבחר. מפתיע, הכיצד?

(מתוך "מחשבה תחילה" בן-עזרא)

המספר שיתקבל הוא 101 שזהו מספרה של יחידת הצנחנים, שנלחמה במסתננים (מחבלים) של שנות החמישים, שמקימה ומפקדה הראשון היה אריאל שרון. דוגמה: יהיה המספר הנבחר 67.

שלבי הפעולה:

$$67 \times 76 = 5,092$$

$$10(6^2 + 7^2) = 850$$

$$5,092 - 850 = 4,242$$

$$4,242 : 6 = 707$$

$$707 : 7 = 101$$

ההסבר המתמטי

יהא  $\overline{ab}$  המספר הנבחר. ערך המכפלה שלו במספר  $\overline{ba}$  הוא:  $(10a+b)(10b+a) = 101ab + 10(a^2 + b^2)$ . ערך התוצאה לאחר החיסור של  $10(a^2 + b^2)$  הוא  $101ab$ . לאחר החלוקה ב-  $a$  והמשך החלוקה ב-  $b$  מקבלים 101.



משימה מס' 6

גילוי המספרים שהתקבלו בהטלת קובייה

הטילו קוביית משחק 3 פעמים, פעם אחר פעם. יש לגלות את התוצאות שהתקבלו בכל אחת מההטלות. לאחר ההטלות מבקשים לבצע את פעולות החשבון הבאות: להכפיל ב- 2 את המספר שהופיע בהטלה הראשונה, להוסיף 5, את התוצאה שהתקבלה להכפיל ב- 5. כעת להוסיף את התוצאה של הטלת הקובייה השנייה. לבסוף להכפיל את התוצאה ב- 10 ולהוסיף את תוצאת ההטלה השלישית. בשלב זה מבקשים לגלות את התוצאה הסופית. נניח שהתוצאה הסופית היא 412, אזי תוצאות ההטלות הן כדלקמן: הטלה ראשונה - 1, הטלה שנייה - 6, הטלה שלישית 2. הכיצד?

(מתוך אלף אפס, גליון 10 עמ' 13)

ההסבר המתמטי

מסמנים את תוצאות ההטלה לפי הסדר ב-  $x, y, z$ . בהתאם לפעולות שבוצעו על תוצאות ההטלה, יהיה ערך התוצאה הסופית,  $10\{5(2x + 5) + y\} + z = 100x + 10y + z + 250$  אם מהתוצאה הסופית מחסרים 250, מקבלים מספר תלת-ספרתי שספרת המאות שלו היא תוצאת ההטלה הראשונה, ספרת העשרות היא תוצאת ההטלה השנייה, וספרת האחדות היא תוצאת ההטלה השלישית. רואים שבחירת פעולות חשבון מתאימות, מאפשרת הזזת תוצאות ההטלה השנייה והראשונה למקומות של ספרות העשרות והמאות. משימות דומות למשימה האחרונה, ניתן למצוא בספר "שעשועי חץ". בין המשימות המופיעות בו: מציאת תאריך הלידה (כולל שנת לידה), גילוי הגיל ומספר הבית, מציאת מספר הנקודות בשני חלקי אבן-דומינו ועוד. לפי פעולות החשבון בכל משימה ניתן לקבוע את ערך הביטוי של התוצאה הסופית, ולהסיק ממנו כיצד מגיעים לנתונים שיש לגלות.



משימה מס' 8

בסוף תמיד 1, 2, 4, 8

יש לבחור מספר כלשהו. במידה והוא זוגי מחלקים אותו ב-2, כמה פעמים שניתן. עם קבלת מספר אי-זוגי מכפילים אותו ב-3 ומוסיפים לתוצאה 1. לאחר הפעולה התקבל מספר זוגי ששוב מחלקים אותו ב-2 כמה פעמים שניתן. במידה ונבחר מספר אי-זוגי, מתחילים עם הכפלה ב-3 והוספת 1. בסופו של כל "טיול", לאחר הפעלת פעולות החשבון על המספרים מתקבל, 1, 2, 4, ...

דוגמאות:

המספר הנבחר 60.

"הטיול"

60, 30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

המספר הנבחר 9.

"הטיול"

9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

ישנם מקרים שבעקבות בחירת המספר, "הטיול" קצר ובמקרים אחרים "הטיול" ארוך מאוד אך סופי.

ההסבר המתמטי

גם אם "הטיול" יהיה ארוך, כמו שקורה כשבחרים את המספר 27, בשלב מסוים של "הטיול", עוברים דרך אחת מהתחנות: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, שממנה מגיעים על-ידי חלוקה רצופה ב-2 אל השלישייה הסופית 1, 2, 4.

הצעות דידקטיות להפעלת משחק זה בכיתה ניתן למצוא במאמר "מסע אל המספר 1", מאת אברהם בלוק, במדור "משחקי מתמטיקה" בגיליון זה. עמ' 22.

משימות 9 ו-10 שיוצגו להלן תובאנה ללא ההסבר המתמטי-אלגברי. הקוראים מוזמנים למצוא בעצמם את ההסבר המתמטי-אלגברי.

משימה מס' 9

חזרה למספר המקורי במספר משוכפל

יש לבחור מספר תלת-ספרתי כלשהו ולשכפל אותו למספר שש-ספרתי, כלומר, מהמספר התלת-ספרתי  $\overline{abc}$  בונים את המספר השש-ספרתי  $\overline{abcabc}$ . את המספר השש-ספרתי המשוכפל מחלקים תחילה ב-7, את התוצאה מחלקים ב-11 ושוב מחלקים את התוצאה ב-13.

מהי התוצאה הסופית? מפתיע! מה ההסבר המתמטי לכך? השאלה מופנית לקורא. לאחר הבנת ההסבר המתמטי, סביר להניח ששתי המשימות הבאות תפתרנה בקלות.

משימת המשך למשימה 9

א. המספר הדו-ספרתי  $\overline{ab}$  שוכפל למספר הארבע-ספרתי  $\overline{abab}$

באיזה מספר יש לחלק את המספר המשוכפל כדי לחזור למספר הדו-ספרתי המקורי? יש למנות לפחות שלושה מאפיינים של המספר המחלק.

ב. המספר הארבע ספרתי  $\overline{abcd}$ , שוכפל למספר השמונה-ספרתי  $\overline{abcdabcd}$

באיזה מספר יש לחלק אותו כדי לחזור למספר הארבע-ספרתי המקורי?

מי הם שני המספרים הראשוניים המחלקים אותו?

משימה מס' 10

**תחום ערכי המספר הנבחר**

יש לבחור מספר דו-ספרתי. לחסר מהמספר הנבחר את סכום ספרותיו. את התוצאה לחלק ב-9. התקבלה המונה 7.

א. האם בחלוקה נותרה שארית? הסבירו.

ב. באיזה תחום ערכים נמצא המספר הנבחר?

מספר דוגמאות נוספות למשימות שהוצגו, ניתן למצוא בספריו של בן-עזרא "מחשב תחילה" ו"שיעור חופשי", בספרי חידות ושעשועי מתמטיקה, וכן באתרים שונים באינטרנט.

**סיכום**

אנו סבורים, שישנה חשיבות רבה, להצגת משימות מהסוגים שהובאו כאן, בפני תלמידים. לדעתנו הדבר גורם להם הנאה, תורם לחיבוב החשבון והמתמטיקה, ומקרב אותם לתכונות המאפיינות מספרים שונים. מעבר לכך, חשובה מאוד ההתייחסות להסברים המתמטיים שעומדים מאחורי כל משימה מפתיעה, כדי שלא להותיר את התלמיד עם התשובה "ככה זה יוצא".

הדוגמאות שהוצגו יכולות גם להוות בסיס לפיתוח של משימות דומות על-ידי המורים, וזאת לשם השבחת הוראת החשבון.

על מחברי המאמר:

**ד"ר משה סטופל**

פיסיקאי ומתמטיקאי בעל תואר שלישי בהנדסת חומרים מהטכניון. ראש החוג למתמטיקה במכללה האקדמית הדתית שאנן בקרית שמואל, חיפה. בעבר מנהל בית-ספר תיכון דתי לבנות



**ד"ר גלעד הר-שפר**

בעל תואר שלישי במנהל ציבורי מאוניברסיטת קונקורדיה בארה"ב. משמש כרכז מחשוב וכמרצה במכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" בקרית שמואל, חיפה. כמו כן מרצה בתחומי המנהל ומנהל עסקים, מעביר סדנאות בנושאי חשיבה שונים. חובב חידות ופתרוןן ואתגרי חשיבה במתמטיקה.



**מקורות**

- אלף אפס שעשועי מתמטיקה, (1998) כתב-עת בהוצאת מכללת ירושלים ומשרד החינוך, גיליון 10, עמ' 13.
- שעשועי חן, ספר חידות ושעשועי מתמטיקה, הוצאת רפאל, רמת-גן.
- בן עזרא, א'. מחשב תחילה, זכרון יעקב: הוצאת קורטוב.
- בן עזרא, א' (1994). שיעור חופשי, זכרון יעקב: הוצאת קורטוב.