בעיות מחכימות

אברהם תורגמן

מבוא

מחקרים ודוחות לא מעטים מייחסים חשיבות רבה לשימוש בחידות ובבעיות אתגר בהוראת המתמטיקה. חידות ובעיות אתגר תורמות רבות להוראה וללומדים. להלן כמה אזכורים מהספרות:
הוועידה הלאומית של מורי המתמטיקה (NCTM, 1989) קובעת כי: פתרון בעיות מהווה נקודה מרכזית בתכנית הלימודים במתמטיקה והוא מטרה ראשונית בהוראת המתמטיקה. כן קבעה הוועדה, כחלק מהסטנדרטים להוראת המתמטיקה (NCTM, 1991), כי: פתרון בעיות תורם לשיפור הביטחון, ליכולת התקשורת המתמטית ולפיתוח חשיבה חוקרת ותהליכי חשיבה גבוהים יותר. חוקרים רבים, ביניהם וקפילד, פנמה, קמי ואחרים ימצאו כי חשוב לעודד שימוש בכישורי חשיבה טבעית בכדי להתמודד ולפתור בעיות. וכי: בעיות אתגר תורמות לשיפור הידע וההבנה המתמטית.

במאמר זה אנו מציעים לעשות שימוש בחידות ובעיות אתגר בליווי פעילויות, ככלי עזר בהוראה. הבעיות המוצגות כאן הן מסוג בעיות-חידות, שיש להן ערך מוסף מעבר לפן השעשוע והחשיבה שיש בפתרון חידה או בעיית אתגר. כל בעיה יכולה לשמש גם כאמצעי להעמקה ולהכללה מעבר לפן המשעשע שבה. להל"ן נציג שלוש בעיות מסוג זה משלושה תחומים שונים: גאומטריה, חשבון לוגי ושקילות ובדרך חשיבה שונה.
הבעיות במאמר זה, ובעיות רבות אחרות, הן פרי התנסות רבת שנים במסגרות הוראה, בהכשרת מורים ובהשתלמויות. כל בעיה מתחילה בהתנסות לפתור אותה. בהתנסות מופיעים השלבים הבאים: ניתוח הבעיה ובחירת האסטרטגיה לפתרון, אם בדיון קבוצתי במקרה פרטי והכללתו, ואם בדרך חשיבה אחרת או שונה, לא שגרתית, לא "במתמטיקה רגילה" אך עדיין בגדר השגה, היכולה להוביל ליותר מפתרון אחד. המשותף לשלושת הבעיות הוא יכולת ההרחבה והתרומה לנושאי הלימוד בכיתה שהן מספקות.

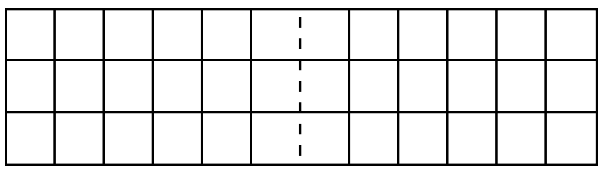
בעיה 1: ממלבן לריבוע

פעילות 1

לפניכם מלבן שצלעותיו הן $4n \times n$. האם וכיצד ניתן להפוך מלבן זה לריבוע בעל אותו שטח בדיוק על-ידי גזירה של המלבן לשני חלקים, כך שאם נצמיד אותם יתקבל הריבוע הרצוי? פעילות זו נכונה לכל n, לא בהכרח טבעי.

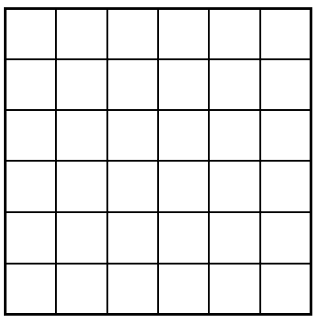
פתרון

1. נתחיל במקרה פרטי, מלבן שצלעותיו הן 12×3 (איור 1)



איור 1

2. שטח המלבן הנתון הוא 36 - (12×3), לכן גם על שטח הריבוע הרצוי להיות 36. כלומר, על צלע הריבוע להיות 6 שהוא השורש החיובי של 36 (איור 2).



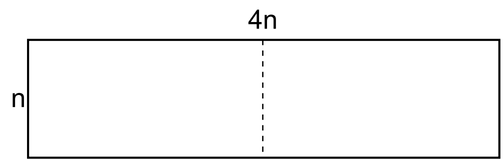
איור 2

3. מצעדים 1 ו- 2 עולה כי כדי לקבל את הריבוע הרצוי יש להקטין פי 2 את הצלע הארוכה של המלבן הנתון (12:2=6), מאידך יש להגדיל פי 2 את הצלע הקצרה של המלבן (3x2=6)

4. דבר זה אפשרי אם נגזור את המלבן הנתון בקו אנכי במרכז המלבן, לאורך הקו המקווקו באיור 1, והצמדת שני החלקים זה על גבי זה, כמתואר באיור 2, ובכך מתקבל הריבוע הרצוי.

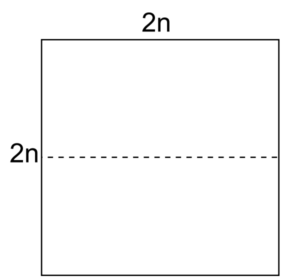
5. מוצע לנסות עוד מקרים פרטיים כגון המלבנים: 4x1, 8x2, 12x3, 16x4, 20x5, 24x6 וכן הלאה, כדי להיווכח כי הפתרון זהה תמיד וגם כדי לעבור לפתרון הכללי.

6. במקרה הכללי, **כל מלבן שצלעותיו הן 4n x n** (איור 3) **ניתן להפוך אותו לריבוע בעל אותו שטח על-ידי גזירה בקו אנכי באמצע המלבן,** אם נבצע אותם שלבים בדיוק. ואכן:



איור 3

7. שטח המלבן הנתון הוא $4n \times n=4n^2$, ולכן גם על שטח הריבוע הרצוי להיות $4n^2$. כלומר, על צלע הריבוע להיות 2n - השורש החיובי של $4n^2$ (איור 4).

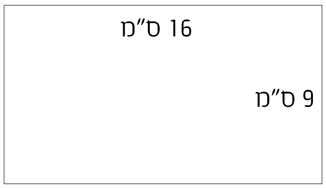


איור 4

8. לשם כך יש להקטין פי 2 את הצלע הארוכה של המלבן הנתון ל- 4n:2=2n, וכן להגדיל פי 2 את הצלע הקצרה של הנתון ל- nx2=2n. ואמנם דבר זה תמיד אפשרי אם נגזור בקו אנכי את המלבן הנתון במרכזו - הקו המקווקו באיור 3 - ונצמיד את שני החלקים זה על גבי זה, כבאיור 4, ובכך נקבל את הריבוע הרצוי.

פעילות 2:

1. לפניכם מלבן שמידותיו 16ס"מ ו-9 ס"מ. גיזרו אותו לשני חלקים כך שיהיה אפשר לחברם שוב באופן שיתקבל ריבוע.



איור 5

2. לאחר התנסויות, בדרך כלל ללא הצלחה, לבצע גזירות באלכסון לאורך ולרוחב, כדאי להציע לעבור לדף משובץ ולרמוז כדלקמן:

א. אין הכרח לגזור את המלבן לשניים בקו ישר (שלא כמו במקרה הקודם!).

ב. יש לנסות למצוא את אורך צלע הריבוע המבוקש, שכן מדובר בדיוק באותו שטח של המלבן הנתון (אותו רעיון כמו במקרה הקודם!).

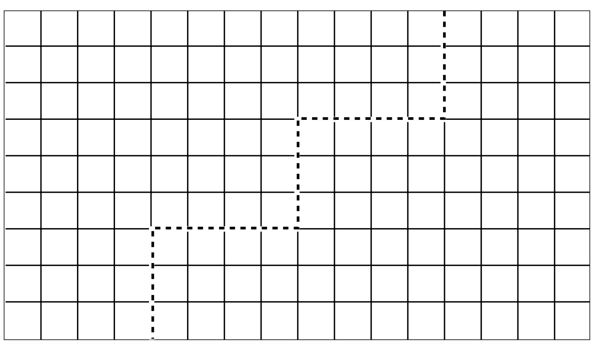
ג. לאחר מציאת אורך צלע הריבוע הדרוש יש לגלות את הקשר בינו לבין אורכי צלעות המלבן הנתון.

ד. בשלב זה, אם טרם ניתן פתרון, מוצע להסביר את דרך הפתרון כדלקמן:

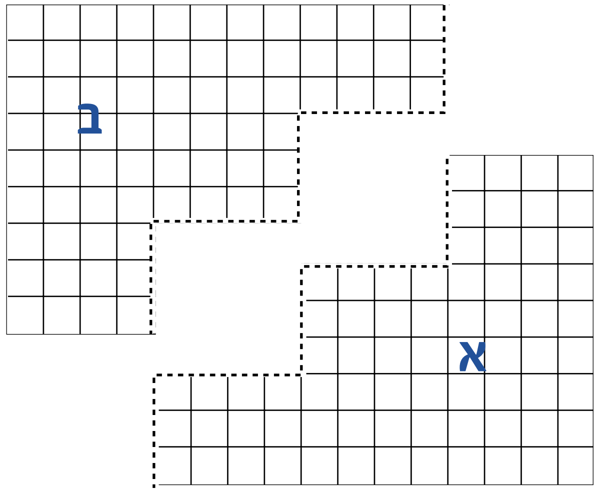
■ שטח המלבן הוא 144 סמ"ר (16x9). לכן, גם שטח הריבוע צריך להיות 144 סמ"ר, ולכן צלעו צריכה להיות השורש החיובי של 144, היינו, 12 ס"מ.

■ כלומר, עלינו מחד, לקצר את הצלע הארוכה של המלבן הנתון ב- 4 ס"מ, מ- 16 ל- 12, ומאידך, להאריך את הצלע הקצרה שלו ב- 3 ס"מ, מ- 9 ל- 12.

נסמן זאת על הדף המשובץ (איור 6) על-ידי גזירה מדורגת גובה המדרגה 3 ורוחבה 4 (מדוע?).

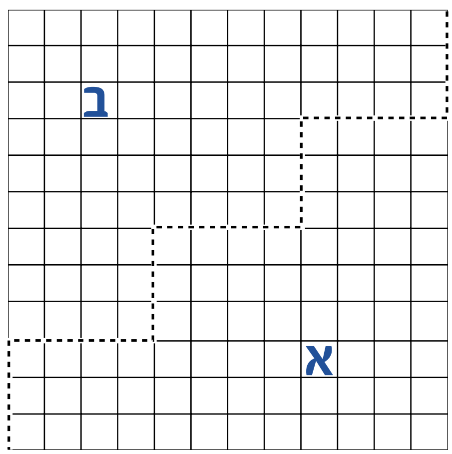

איור 6

כדי להבליט את הפתרון, רצוי לבצע גזירה בפועל של מלבן העשוי בריסטול לפי אותם שלבים. גם כאן הגזירה וההפרדה מומחשות באיור 7.



איור 7

כעת נלביש את שני החלקים זה על זה על-ידי הזזה של חלק ב ב- 3 יחידות כלפי מעלה והצמדתו לחלק א. בכך נקבל ריבוע כמתואר באיור 8 ובכך פתרנו את הבעיה.



איור 8

הכללה

1. שימו לב: המלבן שצלעותיו הן 24x6 (אחד המקרים הפרטיים בסדרה של פעילות א' , צעד 5) שטחו הוא 144, בדיוק כשטח המלבן של פעילות זו. בשני המקרים ניתן להופכם לריבוע ששטחו זהה לשטח המלבן הנתון, אולם הפתרונות שונים, כאן הפתרון- חיתוך מדורג, בעוד שבפעילות א' החיתוך אנכי.

2. האם יש עוד מלבנים מהדוגמאות שבפעילות זו שאפשר להפכם לריבוע על-ידי חיתוך מדורג כפי שראינו בפעילות זו? אם כן, מצאו אותם ואת צורת החיתוך, ואם לא, נמקו לגבי כל מלבן מדוע לא. מה יהיה לגבי מלבנים נוספים בסדרה הנ"ל? (בידקו את יחס הצלעות בהשוואה לפעילות זו!).

3. האם מלבן שצלעותיו הן כפולות של המלבן, 16x9 כלומר, מלבן שצלעותיו הן 9k X 16k כאשר k - מספר טבעי גדול או שווה ל- 2, ניתן להפוך לריבוע בחיתוך מדורג כמו המלבן המקורי? אם כן הסבירו והדגימו ואם לא נמקו. (בדקו האם יחס הצלעות נשמר וכיצד הדבר משפיע על אופן החיתוך!).

4. נסו להפוך מלבן שצלעותיו הן 9X4 לריבוע . היעזרו במלבן משובץ.

5. מצאו פתרון לפעילות זו על-ידי שני חיתוכים, שלושה חיתוכים.

הערות

■ בעיה זו הנה דוגמה לבעיה - חידה המתחילה כשעשוע של קיפולים, שרטוטים וגזירה ומתפתחת לניתוח כללי ומקיף של הנושא.

■ הרווח כמובן רב, גם הנאה, גם עניין וגם העמקה והבנה של נושא הנדסי - שטחים.

■ השימוש בבעיה זו אפשרי בכל רמה, וכמובן גם בבית ספר יסודי.

■ בעיה הנדסית נוספת בעלת אופי דומה בתרומתה היא בעיית העכביש והזבוב. (ראו למשל, *Mathematical Recreation & Essays, University of Toronto Press,1974, p. 120)*

בעיה 2: אשכול הבננות והקוף

הבעיה הבאה היא דוגמה לחידה שכל ניסיון לפתור אותה על ידי "מתמטיקה רגילה" נדון לכישלון, ולמרות כן היא תמיד מתקבלת בחיוך ובהנאה. דרך הפתרון שלה, כפי שנראה להלן, היא מסוג הבעיות הנפתרות מהסוף להתחלה, ויש לה יותר מפתרון אחד.

א. הסיפור

לשלושה סוחרים שחזרו מיריד היה אשכול בננות משותף אותו תכננו לחלק ביניהם. בנוסף היה להם גם קוף שליווה אותם כל הדרך. בשל אורך הדרך, בהגיעם בערב עייפים למלון דרכים החליטו, בשל עייפותם, ללכת לישון מוקדם מאוד ורק למחרת בבוקר לחלק ביניהם את הבננות. בשעה 10.00 בערב התעורר אחד הסוחרים וחש רעב, על כן החליט לאכול את חלקו בבננות ולספר על כך לחבריו בבוקר. לפני שאכל הוא מנה את הבננות שבאשכול וגילה כי המספר לא מתחלק ב- 3. הוא נתן בננה אחת לקוף, אכל שליש מהבננות והלך חזרה לישון. בחצות (שעה 12.00 בלילה), התעורר השני, שלא ידע מאום על חברו שהתעורר לפניו. גם הוא חש רעב והחליט לאכול את חלקו בבננות ולספר על כך לחבריו בבוקר. הוא מנה את הבננות שבאשכול ושוב מצא כי המספר לא מתחלק ב- 3, הוא נתן אחת לקוף, אכל שליש מהבננות הנותרות והלך להמשיך בשנתו. בשעה 02:00 אחר חצות התעורר הסוחר השלישי, שלא ידע דבר על קודמיו, ומאחר שגם הוא היה רעב הוא החליט לאכול את חלקו ולספר על כך לחבריו בבוקר. הוא מנה את הבננות שבאשכול והנה שוב אין המספר מתחלק ב- 3. גם הוא נתן בננה אחת לקוף אכל שליש והלך לישון. בבוקר כשכולם קמו, ראו את האשכול המצומק אך איש לא פצה פיו שכן כל אחד סבר כי רק הוא התעורר ואכל מהבננות. לכן החליטו לחלק את מה שנשאר. הם מנו את הבננות שנותרו ושוב המספר לא התחלק ב- 3. הם נתנו בננה אחת לקוף וכל אחד קיבל שליש מהבננות הנותרות המעטות והלך לדרכו.

השאלה: כמה בננות היו באשכול בהתחלה?

שימו לב, רק דבר אחד ידוע בבטחה - הקוף קיבל 4 בננות, כל סוחר שהתעורר בתורו נתן לו אחת ובבוקר קיבל עוד אחת. מלבד לכך לא ידוע דבר.

ב. דיון

1. בדרך כלל התגובה הראשונה המתקבלת היא: "אי-אפשר לדעת" או "חסר נתונים", "אין פתרון". המענה לתגובות אלו להרגיע ולהבטיח כי לבעיה זו יש פתרון ואף יותר מפתרון אחד! וזאת בניגוד לבעיות אחרות שלהן אכן אין פתרון.

2. בשלב זה מנסים רובם ככולם לפתור את הבעיה בקביעת ניחוש למספר הבננות שהיה באשכול כשהגיעו למלון, אולם אז, עד מהרה מתקבלים ביטויים (או משוואות, לאלה שיודעים אלגברה) מסובכים מאוד מהם לא ניתן לצאת. נסו גם אתם!

3. כאן על המורה לוודא כי התלמידים מבינים את הבעיה החשבונית/המתמטית שבפניהם: מספר הבננות המקורי N שהיה שבאשכול, N פחות מספר הבננות שהסוחר הראשון שהתעורר מנה באשכול, היה כפולה של 3 ועוד 1.
(כלומר, $N=3n+1$). כך היה המצב גם לאחר שהראשון נתן בננה אחת לקוף ואכל את השליש שלו. כלומר, גם השני שהתעורר ב- 12:00 גילה כי גם מספר הבננות שנותר באשכול הוא כפולה של 3 ועוד 1 , כך היה גם אצל השלישי וכך היה גם בבוקר, כשכולם קמו.

4. למעשה באופן מתמטי, אנו מחפשים מספר N שהוא כפולה של 3 ועוד 1, כך שאם 4 פעמים מפחיתים ממנו, בכל שלב, 1 ועוד שליש מההפרש, בכל פעם מתקבל שוב מספר שהוא כפולה של 3 ועוד 1.

5. לאחר זמן מה, או לאחר שרואים כי התלמידים מתחילים להתייאש, מנחים אותם לא ללכת בדרך המקובלת, כפי שהם ניסו, וכפי שכל אדם רגיל היה מנסה להתחיל, אלא לנסות להתחיל מהסוף. כלומר, לחשוב - מהו מספר הבננות שכל אחד מהסוחרים קיבל בבוקר, ואז לנסות לשחזר לאחור את מספר הבננות שבאשכול בכל שלב, עד לאשכול המקורי. כמובן אין לשכוח את הבננה שקיבל הקוף בכל שלב.

6. כדי להגיע לפתרון, נתחיל מהמספר הקטן ביותר שכל אחד יכול היה לקבל בבוקר- בננה אחת! לפי זה היו באשכול בבוקר 4 בננות (1+3), נתנו אחת לקוף וכל אחד קיבל 1. אך אם זה היה המצב פירוש הדבר כי 4 הבננות שהיו באשכול בבוקר הן שני שליש מהבננות שהיו באשכול לפני שהשלישי אכל את חלקו בשעה 02:00 אחר חצות. כלומר, היו בו 6 בננות. אולם, יש לזכור גם את הבננה שהוא נתן לקוף בטרם אכל את חלקו. זאת אומרת, כאשר הוא התעורר הוא מצא באשכול 7 בננות.

7. אבל אם זה המצב, הרי שבאותו אופן המספר 7 צריך להיות שני שליש מהבננות שהיו באשכול בטרם הסוחר השני אכל את חלקו. אלא שדבר זה לא יכול להיות, כי 7 הוא מספר אי-זוגי והוא לא יכול להיות שני שליש של אף מספר שלם אחר.

8. הצעד הבא יהיה להתחיל מחדש ולהניח כי, בבוקר קיבל כל אחד 2 בננות. זה אומר כי באשכול היו בבוקר 7 בננות ($3x2+1=7$), דבר שלא ייתכן מהנימוק שהוסבר בצעד באחרון.

9. הניסיון הבא יהיה לבדוק האם ייתכן כי כל אחד קיבל בבוקר 3 בננות, כלומר, בבוקר היו באשכול 10 בננות, דבר שבהמשך מתברר כלא נכון. אחר כך ממשיכים לבדוק את האפשרויות - ההנחות לגבי 4, 5 ו- 6 בננות. כלומר, שכל אחד קיבל בבוקר 4 או 5 או 6 בננות. בדיקה של כל אחת מאפשרויות אלו, באופן הנ"ל, מובילה למבוי סתום. בדקו!

10. התוצאה הראשונה שמובילה לפתרון מלא היא שכל אחד קיבל בבוקר 7 בננות. כלומר, בבוקר היו באשכול המצומק 22 בננות ($3x7+1=22$). במקרה זה 22 הן שני שליש מהבננות שהיו באשכול בטרם אכל השלישי את חלקו ב- 02:00 אחר חצות. כלומר, השלישי מצא באשכול כשהתעורר 34 בננות ($22:\frac{2}{3}+1=34$), מהן נתן אחת לקוף ואכל שליש. ושוב, 34 בננות הן שני שליש מהבננות שהיו באשכול בטרם השני אכל את חלקו. כלומר, השני מצא באשכול כשהתעורר 52 בננות ($34:\frac{2}{3}+1=52$). ולבסוף, 52 בננות שמצא השני באשכול כשהתעורר הן שני שליש מהבננות שנותרו באשכול אחר שהראשון אכל את חלקו. כלומר, הראשון, שהתעורר בשעה 10, מצא באשכול 79 בננות ($52:\frac{2}{3}+1=79$)!! כלומר, באשכול הבננות המקורי היו 79 בננות!

11. באופן הנ"ל מצאנו כי באשכול הבננות היו $N=79$ בננות. אולם, זהו רק הפתרון המינימאלי! כלומר, לא ייתכן שהיה מספר בננות יותר קטן מ- 79 (כמוסבר לעיל). אולם אין זה הפתרון היחיד! למעשה, כל כפולה של 7 - מספר הבננות שקיבל כל אחד בבוקר, תוביל גם היא לפתרון. רצוי ומוצע לנסות עוד אפשרויות כדי לקבל פתרונות נוספים.

ג. סיכום

■ בבעיה זו התלמידים נפגשים עם דרך פתרון לא שגרתית, דרך המחייבת חישוב וחשיבה, ועם זאת אינה מעבר להישג ידם גם של ילדי בית ספר יסודי. כל הנדרש הוא שברים פשוטים, מציאת חלק משלם ושלם על-פי חלקו.

■ הבעיה מהווה, כמובן, תרגול והפנמה של נושא חשוב ובעייתי בשברים - מציאת חלק משלם ובמיוחד שלם על-פי חלקו.

■ מבעיה זו לומדים כי גם כאשר מגיעים למבוי סתום בדרך פתרון מסוימת, אם מפני שנדמה כי חסרים נתונים ואם מפני שהביטויים שמקבלים נראים מורכבים ומסובכים, אין להתייאש ואפשר לנסות דרך אחרת כמו למשל במקרה זה -פתרון מהסוף להתחלה.

בעיה 3 : שק המטבעות המזויפים

הבעיה הבאה היא מסוג שונה לחלוטין מקודמותיה. מדובר בבעיה קלה מסוגה שעניינה הפעלת היגיון פשוט, ומטרתה לתרום לפיתוח חשיבה לוגית של הילדים. היא יכולה גם לשמש כקדימון לשאלות אחרות מסוגה, קשות יותר ואף קשות הרבה יותר. ראו בהמשך.

א. הבעיה

לפניכם 10 שקים של מטבעות זהב. ידוע כי ב- 9 שקים יש מטבעות אמיתיים ובשק אחד יש מטבעות מזויפים. מספר המטבעות בכל השקים לא בהכרח שווה ולא ידוע. לעומת זאת ידוע כי משקלו של מטבע אמיתי הוא 10 גרם, ואילו משקלו של מטבע מזויף הוא 9 גרם. עליכם לגלות את השק שמכיל מטבעות מזויפים בשקילה אחת בלבד בעזרת משקל דיגיטאלי. הערה: כאן המקום להזכיר ולערוך אבחנה בין משקל כמותי, כבמקרה זה, לבין משקל מאזניים המשמשים להשוואה בין שני גדלים.

ב. דיון

1. כאמור, זו בעיה קלה שבדרך כלל יש תלמידים המצליחים לפתור אותה.

2. מטרת הבעיה להבהיר השוני בין שימוש במשקל כמותי לשימוש במאזניים (משקל השוואתי) ולשמש, כאמור, קדימון לבעיות אחרות.

ג. פתרון

1. מאחר וצריך להשתמש במשקל דיגיטאלי (כמותי) ומאחר שרק שקילה אחת מותרת הדבר מחייב מחד, לבחור מספר מטבעות מוגדר (כדי לקבל כמות ומשקל מוגדרים) ומאידך, יש למצוא דרך לדעת כמה מטבעות ומאיזה שק לבחור.

2. כיוון שאין כל סימון חיצוני על השקים וגם לא ידוע כמה מטבעות בכל שק, נמספר ונסמן את השקים בסדר מקרי כלשהו מ- 1 עד 10.

3. לאחר הסימון ניקח משק מספר 1 מטבע אחד, משק מספר 2, שני מטבעות וכן הלאה עד לשק מספר 10 ממנו ניקח עשר מטבעות. בסך הכול נלקחו 55 מטבעות (55=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10).

4. נניח את 55 המטבעות על המשקל הדיגיטאלי. תוצאת השקילה לא יכולה להיות 550 גרם כיוון שלפחות אחד המטבעות נלקח מהשק המכיל מטבעות מזויפים. רק אם כל המטבעות היו אמיתיים הייתה מתקבלת התוצאה 550 גרם. מאידך, התוצאה הקטנה ביותר שיכולה להתקבל היא 540 גרם, דבר שיקרה רק אם השק שמספרו 10 הוא השק המכיל מטבעות מזויפים, וממנו נלקחו 10 מטבעות שמשקל כל אחד כזכור הוא 9 גרם.

5. לאור האמור בצעד 4 הרי שתוצאת השקילה יכולה להיות אחד ורק אחד מ- 10 המספרים:

540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549

6. כל אחת מהתוצאות האפשריות האלו תגלה מיד את השק המכיל מטבעות מזויפים! אם, למשל, נקבל תוצאת משקל - 546 גרם פירוש הדבר כי שק מספר 4 הוא המבוקש, כי חסרים 4 גרם למשקל המקסימאלי - 550 גרם, לו היו כל המטבעות אמיתיים וכן הלאה.

ג. הערות

פתרון הבעיה לא ישתנה כלל גם אם מספר השקים הנתון הוא מספר כלשהו - *n*. התחלנו ב- 10 מטעמי נוחות בלבד וכדי להקל על התלמידים. מומלץ לתת עוד וריאציות מספריות אחרות, קטנות מ- 10 וגם גדולות מ- 10. הדבר יסייע בהפנמת הפתרון ותרגולו. התרגול ישמש גם הזדמנות טובה לתרגל סכום של סדרה חשבונית (גם בלי להזדקק לנוסחאות!).

- מוצע לפתור את הבעיה באופן כללי עבור *n* שקים, לפחות לתלמידים מתקדמים.
- כאמור, בעיה זו יכולה לשמש דוגמה ותרגול לבעיות דומות אחרות אף כי יותר קשות. להלן שתי דוגמאות:

1. לפניכם 12 מטבעות, אחד מהם מזויף ומשקלו כבד/קל יותר ממשקל מטבע אמיתי. היעזרו במאזניים (להשוואה) ומיצאו את המטבע המזויף על-ידי 3 שקילות השוואה בלבד! זו בעיה קלה!
2. לפניכם 12 מטבעות, אחד מהם מזויף. לא ידוע אם משקל המטבע המזויף כבד יותר או קל יותר ממשקל מטבע אמיתי. היעזרו במשקל מאזניים ומיצאו על-ידי 3 שקילות בלבד כדי למצוא את המטבע המזויף, ולקבוע אם הוא כבד יותר או קל יותר ממטבע אמיתי! זו בעיה קשה! נסו כוחכם!

ד. סיכום

שלוש הבעיות שהבאנו במאמר זה מייצגות בעיות משלושה תחומים שונים - בעיית הנדסה, בעיית חשבון לוגי עם פתרון לא שגרתי, ובעיית שקילות. המשותף להן הוא יכולת ההרחבה ושיפור היכולת לפתור בעיות מילוליות והכללתן, והתרומה לנושאי הלימוד בכיתה, והן מהוות דוגמה לדרך השימוש בהן. בעיות אלו כאמור, הן רק דוגמאות לשילוב בעיות וחידות בעלות ערך מוסף בהוראה.

על מחבר המאמר:

ד"ר אברהם תורגמן

בעל *PhD* במתמטיקה והוראת המדעים, האוניברסיטה העברית ירושלים, *BSc* ו- *MSc* במתמטיקה ומדעי המחשב, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, באר שבע.
תחומי עניין והוראה - מתמטיקה, הוראת המתמטיקה והמדעים, שיטות הוראה, פיתוח ת"ל, הערכת הישגים, שיטות מחקר והערכה חלופית באוניברסיטאות בן-גוריון, העברית בירושלים ובר-אילן ועוד. בעבר מפקח מחוזי ומפקח ארצי במשרד החינוך, מדריך מחוזי, מנהל בי"ס. יוזם ומוביל האקדמיזציה לעו"ה בהוראה. חבר מערכת מספר חזק 2000.