היתכן? או לא ייתכן?

פיטר סמובול, דורון לוין וטל קגלובסקי

> "תגלית מדעית גדולה נבדלת מבעיית חקר בית-ספרית רצינית רק בכך, שעל מנת לפתור את בעייתו, יצטרך התלמיד לבזבז ממספר שעות עד מספר ימים, ותגלית מדעית לעיתים דורשת חיים שלמים". B.Delone (17/7/1980-15/3/1890)

פיתוח חשיבה מתמטית בקרב תלמידי בית ספר, תוך כדי השקעת ידע של התלמידים, יכולות ומיומנויות ברמה הדרושה, היא אחת המטרות העיקריות של המורה למתמטיקה. קרוטצקי, (1976) טוען כי: **"מסקנות מתמטיות ונוסחאות לצורך חישובים נשכחות במשך הזמן אצל רוב האנשים, למרות ההתפתחות המתמטית שלהם. רמת חשיבה מתמטית, אם היא הושגה פעם אחת - היא תישאר לעד".**

רמה גבוהה של חשיבה מתמטית מתפתחת אצל תלמיד כתוצאה משיתוף פעולה חינוכי ואפקטיבי בין המורה לתלמיד בתהליך של פתרון בעיות חקר. בעיות החקר בהן נתקלים תלמידי בית הספר היסודי מתחילות, בדרך כלל, במילים: **חשב..., נמק..., הסבר..., הראה..., מצא את...ואת...** לעומת זאת, במציאות, החוקר המתמטיקאי לרוב נאלץ להתמודד עם בעיות מסוג אחר. החוקר המתמטיקאי נדרש קודם כל לא לפשט או לחשב, אלא לברר: **האם קיים או לא קיים אובייקט עם התכונה הנדרשת? האם נכונה או לא נכונה הטענה הנתונה?**

גם לתלמידי בית הספר היסודי ניתן להציג בעיות חקר שהן דומות במהותן לעבודתו של החוקר המתמטיקאי, כאשר חשוב לזכור שבתהליך פתרון בעיות חקר, על התלמיד להיות בקי במיומנויות, ולהפגין שליטה בחומר המעשי הנלמד. לדוגמה, נדרשות מהתלמיד מיומנויות כגון:

- יכולת לחבר ולהכפיל ב"ראש" מספרים דו-ספרתיים. (למשל: 22x17=20x17+2x17=340+34=374).

- שימוש בתכונות המספרים תוך כדי ביצוע הפעולות (כפל וחיבור).
למשל: אם תוצאת הכפלה מסתיימת ב-5 ואחד הגורמים הוא אי- זוגי, אז בהכרח הגורם השני מסתיים ב-5.

- שימוש באופן בלתי שגרתי בפעולות.
למשל: שבצו בין המספרים 8 7 6 5 4 3 2 1 סימני (+) או (-) כך שיתקבל 0.
פתרון לדוגמה: 1+2-3+4+5+6-7-8=0

- יכולת שימוש באסטרטגיות מגוונות כמו שיטת הברירה והבדיקה, הוכחה בדרך השלילה וכדומה.
למשל: החליפו כל אות בספרה כך שיתקיימו כל הזהויות. לאותיות זהות, מתאימות ספרות זהות ולאותיות שונות מתאימות ספרות שונות.
A x R = I - F = M : E = T - I = K : A
פתרון: 2 x 1 = 7-5 = 6:3 = 9-7 = 4:2

הנושאים הכלולים בתכנית הלימודים מאפשרים העמקה שהיא מעבר לנדרש בתכנית. ואומנם קיים צורך רב של מורים, בשאלות ספציפיות שיוכלו להיות "סם אינטלקטואלי מוצלח" עבור התלמידים המתקדמים והמתעניינים.
אחת הדרכים לאתגר תלמידים בדרך שתהיה משמעותית ותפתח חשיבה, העולה בקנה אחד עם דרכי חקירה מתמטיות, היא הצגת בעיות חקר שבמהלך הפתרון שלהן התלמיד נדרש להפעיל מיומנות של חקירה מתמטית, דומה למיומנות אותה מפעיל חוקר מתמטיקאי. דרך זו נוסתה בקרב תלמידים בדרום הארץ והוכחה כמשמעותית בפיתוח החשיבה המתמטית של התלמידים.

בכל הבעיות שנציג להלן קיים רעיון משותף שהוא אחד מהרעיונות המהותיים ביותר במחקר המתמטי - **לבעיה יש פתרון אם ניתן להציג דוגמה לקיום**. לעומת זאת, יש מקרים שבהם אין לבעיה פתרון. אי- קיום הפתרון אינו נובע מהעובדה שלא נמצא פתרון, אלא הוא דורש הוכחה מתמטית של אי - קיום. בכל הבעיות שנציג להלן, לאחר חקירה אישית של התלמיד את הבעיה, הוא צריך לנמק את הרעיון של אי-קיום פתרון, או לתת דוגמה לקיומו.

א. בעיות שאין להן פתרון

בבעיות 1- 4 שלפניכם, כל אות מייצגת ספרה שונה.

בעיה מס' 1

מצאו את כל הפתרונות האפשריים: $MATHx8=HTAM$

פתרון: אם מספר ארבע ספרתי מוכפל ב-8 והמכפלה המתקבלת היא גם ארבע ספרתית, הרי שספרת האלפים של אותו מספר חייבת להיות 1, כי אחרת יתקבל מספר בעל יותר ספרות. (לפחות 16,000).
אם ספרת האלפים היא 1 (כלומר $M=1$) אז ספרת היחידות של המכפלה היא גם 1 (כלומר $M=1$). מכאן נקבל שהמכפלה ב- 8 (מספר זוגי) היא אי-זוגית וזהו מצב בלתי אפשרי, מכיוון שמכפלת כל מספר טבעי ב- 8 היא זוגית. זוהי סתירה, ולכן לא קיימים ערכים אפשריים עבור (M,A,T,H)

בעיה מס' 2

מצאו את כל הפתרונות האפשריים:
$BUS+BUT+BUG=1200$

פתרון: ברור כי $S+T+G$ מתחלק ב- 10. ועם זאת STG הן ספרות 0,1,2,3......9 לכן הסכום $S+T+G$ יכול לקבל ערך של 10 או 20 בלבד.
מקרה ראשון:
אם $S+T+G=10$ אז $BU0+BU0+BU0=3BU0=1190$
(אנו מפרידים את ספרת האחדות מכל אחד מהמספרים, ומעבירים אותן לאגף השני של המשוואה) אבל 1190 לא מתחלק ב-3. לכן, במקרה זה אין פתרון.
מקרה שני:
אם $S+T+G=20$ אז $BU0+BU0+BU0=3BU0=1180$
(אנו מפרידים את ספרת האחדות מכל אחד מהמספרים, ומעבירים אותן לאגף השני של המשוואה) אבל 1180 לא מתחלק ב-3. לכן גם במקרה זה אין פתרון.

בעיה מס' 3

האם יתכן שהערך $SAL+KADURSAL$ יתחלק ב-1000?
פתרון: ברור כי סכום ספרת היחידות של שני המחוברים היא 0 או 10.

מקרה ראשון: $2L=0$ לכן $L=0$. כיוון ש - $A \neq L$, אז בהכרח $A=5$. אם כך, כדי שספרת המאות של הסכום תהיה 0, סכום ספרת המאות של שני המחוברים צריך להיות שווה ל- 9 (הרי נוסף 1 מסכום ספרת העשרות), לכן נקבל $2S=9$ - אין פתרון.
מקרה שני: $2L=10$ לכן $L=5$. אם כך, כדי שספרת העשרות של הסכום תהיה 0, סכום ספרת העשרות של שני המחוברים צריך להיות שווה ל- 9 (הרי נוסף 1 מסכום ספרת האחדות), לכן נקבל $2A=9$ - אין פתרון.

בעיה מס' 4

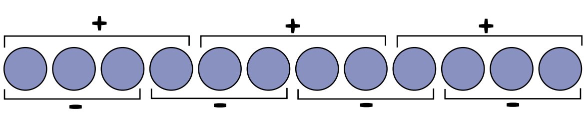
האם ייתכן שהסכום $\overline{12A}+\overline{34B}+\overline{56C}+\overline{78D}+\overline{90E}$ **יתחלק ב-301?** (הערה: מטרת הקו מעל המספר היא להדגיש שמדובר במספר יחיד, ולא ברצף מספרים אשר מוכפל באות.)

פתרון: נציג את הסכום בצורה הבאה:
$120+A+340+B+560+C+780+D+900+E$
על-ידי חיבור נקבל: $2700+A+B+C+D+E$
וערך זה צריך להתחלק ב- 301. הערך הקטן ביותר שמתחלק ב-301 וגדול מ-2700 הוא 2709. כלומר, $A+B+C+D+E=9$ מאחר ואין חמישה מספרים שונים זה מזה שסכומם שווה ל- 9 - הדבר בלתי אפשרי.

בעיה מס' 5

מצאו סדרה בת 12 איברים, כך שסכום כל 4 איברים עוקבים יהיה חיובי וסכום כל 3 איברים עוקבים יהיה שלילי.

פתרון: 12 איברים מורכבים מ-4 שלשות של איברים עוקבים, כלומר לפי הנתון סכום כל 12 האיברים חייב להיות שלילי. מצד שני, 12 האיברים מורכבים מ-3 רביעיות של איברים עוקבים, כלומר, סכום כל האיברים לפי הנתון חייב להיות חיובי - וזאת סתירה לגבי הסכום של כל איברי הסדרה. באופן ציורי:



בעיה מס' 6

בבניין בן 19 קומות המעלית התקלקלה, ומעכשיו היא מסוגלת או לעלות ב- 13 קומות או לרדת ב- 8 קומות. האם אפשר להגיע מקומה 3 לקומה 4? בבניין יש קומה 0 (קרקע).

פתרון: לא. מקומה 3 ניתן לנסוע רק במסלול הבא:
$7 \leftarrow 15 \leftarrow 2 \leftarrow 10 \leftarrow 18 \leftarrow 5 \leftarrow 13 \leftarrow 0 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow 3$
וכאשר מגיעים לקומה 7, לא ניתן לעשות אף אחת מהפעולות הנ"ל, לכן המעלית תישאר תקועה.

ב. בעיות שיש להן פתרון

בעיה מס' 7

האם ניתן לבנות קבוצה בת 5 מספרים, כך שאף אחד מהם לא יתחלק באף אחד משאר המספרים, אך הריבוע של כל אחד מהמספרים יתחלק בכל אחד משאר המספרים?

פתרון: ניתן. לדוגמה: נבחר את חמשת המספרים הראשוניים הראשונים: 2,3,5,7,11 ונחשב את אברי הקבוצה באופן הבא:

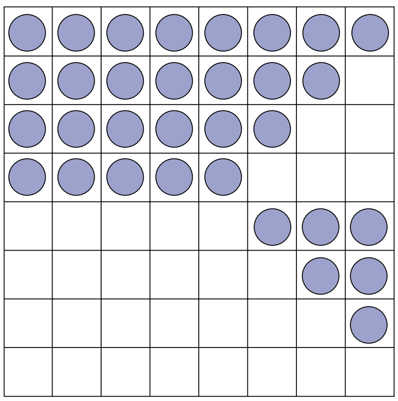
$$a_1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 2{,}668{,}050$$
$$a_2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 1{,}778{,}700$$
$$a_3 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 1{,}067{,}220$$
$$a_4 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 = 762{,}300$$
$$a_5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = 485{,}100$$

a_i לא יתחלק בשאר איברי הקבוצה מפני שהגורם p_i הינו בחזקה הראשונה, לעומת שאר האיברים בהם הוא בחזקה שנייה. אבל, הריבוע של כל אחד מהאיברים כן יתחלק בשאר אברי הקבוצה.

בעיה מס' 8

האם ניתן למקם אסימונים על לוח שחמט (8X8) כך, שבכל שורה יהיה מספר שונה של אסימונים, אך בכל טור יהיה מספר שווה של אסימונים? (בכל משבצת ניתן למקם לכל היותר אסימון אחד).

פתרון: למרות הנטייה לחשוב שלא קיים פתרון. הוא קיים. להלן שיקולים מסויימים: אם בכל טור ישנו מספר שווה של אסימונים, אזי המספר הכולל של אסימונים מתחלק ב-8. כמו כן, אם בכל שורה ישנו מספר שונה של אסימונים, אזי ישנם לפחות 0+1+2+......+7=28. המספר הקטן ביותר שעונה על שתי הדרישות הנ"ל הוא 32. כלומר, בכל טור יש 4 אסימונים. לאחר מעט ניסוי וטעייה, נקבל דוגמה אפשרית כפי שמתואר בשרטוט.

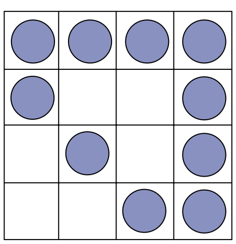


שרטוט 1

בעיה מס' 9

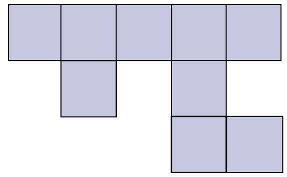
האם ניתן להציב על לוח 4X4 עשרה אסימונים, כך שבכל שורה ובכל טור יהיה מספר זוגי של אסימונים?

פתרון: כן, למשל באופן הבא:

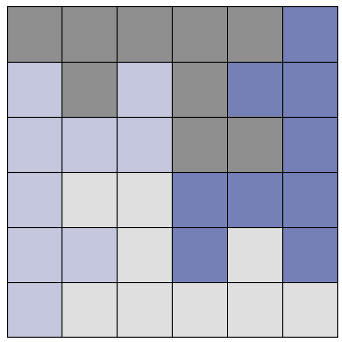


בעיה מס' 10

האם ניתן להרכיב מ-4 צורות כאלה ריבוע?



פתרון: כן, למשל באופן הבא. השיקולים: הצורה מכילה 9 משבצות. ל-4 צורות כאלה יהיו סה"כ 36 משבצות, לכן הריבוע צריך להיות בגודל 6X6.



הבעיות שהוצגו במאמר הוצגו במסגרת המועדון המתמטי בדרום, מועדון "קידומטיקה". מועדון "קידומטיקה" הוא פרוייקט בתחום פיתוח חשיבה מתמטית של אוניברסיטת בן גוריון בנגב.
ראש הפרוייקט פרופ' מירי עמית ומרכז הפרוייקט - יוסף חפץ.
הקרן המייסדת קרן סקט"א - רש"י דרך מדערום.

מקורות

Lihtenberg . G (1902). Hphorismen (p.54). Berlin: Krutetskii, V. A. (1976), *The Psychology of the Mathematical Abilities of the School Children*.(p.134). Chicago: University of Chicago Press.

בעיות נבחרות מאולימפיאדת ORANGE 2004-2006.

סיכום

תהליך חיפוש הפתרון על-ידי תלמיד לבעיות החקר שהוצגו לעיל, כמעט תמיד מאוד דומה לתהליך חיפוש הפתרון לבעיית חקר על-ידי מדען. התהליך כולל:

- אנליזה של הנתונים של הבעיה
- פיתרון של הבעיה
- ניסיון הכללה של התוצאות
- ניסיון חיפוש של הרעיון המרכזי של הבעיה או של הפתרון עצמו
- חיפוש של היישומים החדשים של הרעיון
- ניסוח של בעיה חדשה, הכללה.

אנו סבורים שבאמצעות בעיות מסוג זה המוצגות לתלמידים כבר בגיל בית הספר היסודי, יכולים התלמידים לקבל תמונה כללית לגבי עבודת החוקר המתמטי.

"מה שאתם מוכרחים לגלות באופן עצמאי, משאיר בדעת שלכם שביל, בו תמיד תוכלו להשתמש, אם יהיה בכך צורך". (Lihtenberg, 1902)

ברור שהנחיית החקירות של התלמידים דורשת מוכנות יסודית של המורה. עליו להרגיש בעצמו את "נמרצות החיפוש" ואת "שמחת הגילוי".

על מחברי המאמר:

ד"ר פיטר סמובול

מרצה למתמטיקה במכללת קיי בבאר-שבע, מנחה במועדון מתמטי (לתלמידים מחוננים) באוניברסיטת בן- גוריון בנגב, ומורה בביה"ס אשל הנשיא.

דורון לוין

תלמיד במקיף אמי"ת בבאר שבע. עוסק בעבודות מחקר במתמטיקה החל מכיתה ח', זכה במקומות מכובדים באולימפיאדות שונות.

טל קגלובסקי

תלמיד במקיף אשל הנשיא באר שבע, זכה במקום הראשון באולימפיאדת אורנג', זוטא ובמספר תחרויות בינלאומיות בהתכתבות.