מי מדבר על שגיאות?
דיון בכיתה בהכללות יתר של תלמידים

תמי גירון

העיסוק בשגיאות של תלמידים כחלק מובנה ממהלך ההוראה הוא נושא שנוי במחלוקת. המאמינים בגישות חינוכיות המסבירות את תהליכי הלמידה על-פי תיאוריות התנהגותיות, סבורים שעיסוק בשגיאות במהלך ההוראה עלול להזיק. לטענתם, תלמידים עשויים להפנים את הדרך השגויה ולאמץ אותה. לעומתם, המאמינים בתהליכי למידה קונסטרוקטיביסטים רואים את תהליך הלמידה כהתמודדות בלתי פוסקת עם קונפליקטים קוגניטיביים, ועל כן דיון בשגיאות, לדעתם, יכול להציב קונפליקטים, לעורר דיונים וחקירת מצבים שונים, ובדרך זו להבנות, לחזק ולתקף הבנת מושגים מתמטיים.

כבר בשנות ה-80 המוקדמות טען שמואל אביטל שיש לשלב "מטלות שגיאה" במהלך השיעור (אביטל, 1976; 1981). במאמריו מציע אביטל סוגי שגיאות שלדעתו מומלץ להציג לתלמידים, ומכוון לסוגי מטלות שכדאי לזמן בפני התלמידים, על מנת שהעיסוק בשגיאות יהיה שלב משמעותי בהבניית הידע המתמטי שלהם.
אחד מסוגי המטלות שאביטל מציע להציג לתלמידים הן מטלות המציגות את המקרים בהם התלמידים נוטים לעשות **הכללות יתר**, ולטעון בעקבות הכללת היתר, שתכונה או פעולה מתמטית ממשיכה להתקיים גם במקרים שאינה מתקיימת (אביטל, 1981).

אביטל מציג במאמריו דוגמאות שברובן מתייחסות לנושאים הנלמדים בבית הספר התיכון. אולם, גם בבית הספר היסודי ניתן לזהות שגיאות הנובעות מהכללות יתר של תלמידים. לעתים, תלמידים מנסחים חוקים, מבלי לבסס או לבדוק את קיומם (בקבוצת מספרים מסוימת או בכלל). לעתים תלמידים גם עושים "הרחבת יתר" של חוק, שניתן להם ככלי עזר בלמידה. "הרחבת היתר" מתבטאת בהחלת החוק על תחומי מספרים שבהם החוק אינו מתקיים, או בשיבוש או איחוד חוקים אחרים.

חלק מהכללות היתר של תלמידים ניתן לזהות בתשובותיהם לשאלות הדורשות נימוק. את הנימוקים אפשר למיין לסוגים שונים, שאחד השכיחים שבהם הוא שימוש בהיגד או חוק המבוסס על הכללה. את ההיגדים האלו ניתן להציג לכיתה, ולדון עם התלמידים במקרים שבהם ה"חוק" מתקיים, אם בכלל.

במהלך דיון באמיתות ה"חוק" על התלמידים להציג דוגמאות לקיום ולאי-קיום, לחקור תנאי קיום ואי-קיום, לגבש מסקנות ולנסות להסביר את המסקנות בעזרת שימוש בידע הקיים. בנוסף, תהליכים אלה חושפים את התלמידים לדרכי חקירה מתמטיות, כגון, הפרכת חוק בעזרת דוגמה נגדית או בדיקת קיום חוקים בתחומי מספרים שונים. במהלך העבודה התלמידים נדרשים להתבסס על ידע קודם, לקשר בין מושגים ומיומנויות ידועים ולערוך חישובים.
תהליכים אלה תורמים להבניית הידע המתמטי, ולהרחבה וגיבוש מושגים מתמטיים שנלמדו. לעתים, בשעת דיון עולות הכללות נוספות של תלמידים המזמנות דיון רחב יותר, והתנסות במיומנויות מתמטיות נוספות.

להלן אציג דוגמה לדיון סביב "חוק" המבוסס על היגד שגוי של תלמידים, שנמצא כנימוק במבחן. הדיון נערך בכיתה ד בתקופה שהתלמידים התחילו לעסוק באלגוריתם לכפל מספר דו-ספרתי במספר דו-ספרתי.

מכפלה של מספר דו-ספרתי במספר דו-ספרתי

במבחן לתלמידי כיתת ה הוצגה השאלה הבאה:

1. בלי לחשב במדויק סמנו מה המספר הקרוב ביותר לפתרון התרגיל: 51x21
   א. 100 ב. 1,000 ג. 5,000 ד. 10,000
2. הסבירו כיצד מצאתם את המספר הקרוב ביותר לפתרון.

באחת ממחברות המבחנים מצאתי את הנימוק הבא:
"כשכופלים מספר דו-ספרתי במספר דו-ספרתי, התוצאה היא תמיד בערך 1000".
הצגתי נימוק זה בכיתה ד, ושאלתי מה דעתם, האם ההיגד נכון? אחת מהתלמידות טענה ש"**לא בטוח שתמיד התוצאה תהיה בערך 1000, אבל היא תמיד תהיה ארבע-ספרתית**". ניסיתי לברר עם אותה תלמידה כמה ספרות יהיו, לדעתה, בתוצאה, אם נכפול מספר תלת-ספרתי במספר תלת־ספרתי. ללא היסוס היא ענתה לי: תשע ספרות. באותו רגע היה נדמה

לי שהבנתי את מקור ההכללה השגויה של התלמידה, והחלטתי להעלות את ה"חוק החדש" לשיפוט שאר תלמידי הכיתה. לצד השאלה הראשונה שהצגתי לכיתה, כתבתי על הלוח

האם המכפלה של מספר דו- ספרתי במספר דו-ספרתי תמיד תהיה ארבע-ספרתית?

בשלב הראשון התלמידים עבדו ודנו בקבוצות ולא העלו בפני המליאה את טיעוניהם. בקבוצה אחת התלמידים העלו דוגמאות נגדיות כגון: 10X10=100, ומיד הפריכו את הטענה. הם גם ידעו לומר **שה"תמיד" לא מתקיים אם יש להם דוגמאות אחרות.** (בשפת המתמטיקה אנו קוראם להן "דוגמאות נגדיות".) כדי שהקבוצה תמשיך לחקור ולהתעמק בשאלה הצגתי להם שאלות נוספות: האם המכפלה יכולה להיות דו-ספרתית, ארבע ספרתית, חמש- ספרתית או שש-ספרתית?
שאר תלמידי הכיתה כתבו תרגילי כפל באופן אקראי ופתרו אותם בדרכים שונות. רובם מצאו דוגמאות שבהן המכפלה היא תלת-ספרתית (התלמידים בחרו תרגילים בהם כפלו מספר דו- ספרתי ב- 10 או ב- 20), ולכן הסיקו ש"אם כופלים מספרים קטנים נקבל מכפלה תלת-ספרתית". למרות שמרבית הדוגמאות העלו תוצאה תלת-ספרתית הועלו גם דוגמאות בהן התוצאה היא ארבע-ספרתית, ולכולם היה ברור שניתן לקבל תוצאות כאלו וכאלו.

לאחר מספר דקות של התנסות, ביקשתי מהתלמידים להציג את מסקנותיהם בפני הכיתה. כאמור, הטיעון המרכזי שהועלה נשען על דוגמאות נגדיות. בשלב זה הפעילות דרשה שימוש באלגוריתמים ברמה בסיסית. אולם, לעצם השימוש בדוגמה נגדית כדי להפריך טענה היה ערך רב בהקניית מיומנויות עבודה מתמטיות.
הטיעון "אם כופלים מספרים קטנים נקבל מכפלה תלת - ספרתית" דרש בירור נוסף: - **מה זה מספרים קטנים?**
בדיון משותף בכיתה ניסינו להגדיר תחומי מספרים שיתאימו לתנאי ההיגד. סוכם שכל הבדיקה שלנו מתייחסת למספרים השלמים הגדולים מ- 9 וקטנים מ- 99, ואם מחליטים שחלק ממספרים אלו הם "קטנים", חייבים להגדיר בדיוק את תחומם. (זאת למרות שתלמיד אחד טען שמספרים קטנים הם תמיד חד-ספרתיים - עוד היגד שמזמן דיון ומאפשר לדון ביחסיות שבין המספרים: גדול הוא תמיד גדול מ.., וכו'.)

הקבוצה שחקרה את השאלה: האם המכפלה יכולה להיות דו-ספרתית, ארבע-ספרתית, חמש-ספרתית, שש-ספרתית ? הציגה לכיתה את המסקנה: **המכפלה תמיד תהיה תלת-ספרתית או ארבע-ספרתית.**
הם התבססו על הנימוקים הבאים:
א. המספר הדו-ספרתי הקטן ביותר הוא 10. לכן, המכפלה הקטנה ביותר תתקבל מ- 10X10, ולכן לא ניתן לקבל מכפלה קטנה מ- 100.
ב. המספר הדו-ספרתי הגדול ביותר הוא 99. לכן, המכפלה הגדולה ביותר תתקבל מ- 99X99. כשכופלים את 99X100 מקבלים 9900 - מספר ארבע-ספרתי. מכאן, ש-99X99 יהיה קצת יותר קטן, כלומר, בודאי יהיה מספר ארבע-ספרתי.

דרך עבודתה של קבוצה זו הציבה בפני הכיתה אסטרטגיה מאוד משמעותית בפתרון בעיות מתמטיות - בדיקת הערכים הקיצוניים והסקת מסקנות לגבי התחומים שבין הערכים הקיצוניים. מנקודת המבט שלי כמורה חשבתי שהדיון שהתרחש עד לנקודה זו היה מאוד משמעותי. התלמידים ביצעו מיומנויות חישוב, הכלילו ורכשו מיומנות חקירה מתמטית חדשה. אולם, חשיבות גדולה לא פחות הייתה לעובדה שנותרו שאלות פתוחות שלתלמידים רבים היה הרצון לברר ולחקור אותן.

בשלב זה כתבנו על דף נייר גדול:

כשכופלים מספר דו-ספרתי במספר דו-ספרתי, מתי המכפלה המתקבלת היא תלת-ספרתית ומתי ארבע-ספרתית?

את הדף תלינו בפינה מיוחדת שבה התלמידים חוקרים בזמנם החופשי. (בפינה זו הם מוזמנים לתלות את טיוטות החקירה שלהם וכל האחרים מתייחסים - מאששים או מפריכים את הטענות.) המשכנו בנושא השיעור שהיה חישוב שטח מלבנים שאורך צלעותיהם הם מספרים דו-ספרתיים, ושימוש בחוק הפילוג המורחב לצורך החישוב.

במהלך השבוע תלמידים רבים עסקו בבעיה של כפל מספר דו-ספרתי במספר דו-ספרתי, והמשיכו לנסות למצוא אסטרטגיות שונות כדי לברר מתי המכפלה תהיה תלת-ספרתית ומתי תהיה ארבע-ספרתית.
התלמידים פעלו באסטרטגיות שונות. חלקם כתבו תרגילים באופן אקראי, ומיינו אותם לשתי קבוצות על-פי מספר הספרות שבתוצאה.

חלקם ניסו למצוא כללים שיסייעו בידם לשער את מספר הספרות שבתוצאה. את הכללים והנימוקים של זוג תלמידים החלטתי להעלות לדיון כיתתי. ההנחה הבסיסית של שני התלמידים נשענה על העובדה שהמספר הארבע - ספרתי הקטן ביותר הוא 1000. את 1000 אפשר לקבל מהמכפלה 20x50. לכן, הם הסיקו, שכל המכפלות שאחד הגורמים שלהן שווה או גדול מ- 20 והגורם השני שווה או גדול מ- 50, בוודאי שתהיינה גדולות מ- 1000, כלומר, תהיינה ארבע-ספרתיות. באותו אופן הם טענו שכל המכפלות שאחד הגורמים שלהן קטן מ- 20 והגורם השני קטן מ- 50, תהיינה קטנות מ- 1000, ולכן תהיינה תלת-ספרתיות. כדי לאשש את טענותיהם הם בדקו מספר תרגילים המתאימים לקבוצות המספרים שקבעו, אישרו את השערתם, והודיעו שמצאו פתרון מלא לשאלה. כאשר הם הציגו את הפתרון לכיתה הם הצליחו לשכנע את כל תלמידי הכיתה בכך שמצאו פתרון מלא לבעיה. כאן נדרשה ההתערבות שלי כמורה.
כתבתי על הלוח: 80x15 וביקשתי להחליט לאור המסקנות ששני התלמידים הסיקו: האם הפתרון יהיה מספר תלת-ספרתי או ארבע-ספרתי?

התלמידים ניסו לשבץ את התרגיל באחת הקבוצות שהוגדרו קודם, והבחינו שהתרגיל לא מתאים לאף אחת מהקבוצות. בתרגיל זה גורם אחד קטן מ- 20 ואילו הגורם השני גדול מ-50, והתוצאה המתקבלת היא ארבע-ספרתית. בשיחה משותפת הגענו לשתי מסקנות חשובות:

א. אמנם כל המכפלות של שני מספרים דו-ספרתיים שאחד הגורמים שלהן שווה או גדול מ- 20 והגורם השני שווה או גדול מ- 50, הן ארבע-ספרתיות. אולם יש מכפלות ארבע-ספרתיות שמתקבלות מגורמים אחרים. כלומר, **לא תמיד המשפט ההפוך מתקיים.** כדי לחדד את הרעיון הצגתי לילדים דוגמה מחיי היומיום: "כל מי שלומד בבית הספר שלנו גר ביישוב", אבל האם זה אומר ש"כל מי שגר ביישוב לומד בבית הספר שלנו"?

ב. קיימים תרגילי כפל של שני מספרים דו-ספרתיים שלא שייכים לאחת משתי הקבוצות שהוגדרו קודם, ואנחנו לא יודעים אם התוצאות שלהם הן תלת-ספרתיות או ארבע-ספרתיות.

כדי למצוא את התרגילים האלה הציעו מספר תלמידים לבנות לוח כפל מאוד גדול (כמו באיור 1) ולצבוע בו בצבע אחד את כל המכפלות התלת-ספרתיות ובצבע שני את כל המכפלות הארבע-ספרתיות. שני תלמידים הכינו בבית במחשב בעזרת אקסל את הלוח הגדול, וניסו למצוא בו חוקיות. הם חזרו לכיתה ודיווחו ש"במהלך העבודה היו מקרים שהיה נדמה להם שמצאו חוקיות אבל היא התקלקלה".

x	10	11	12	.....	97	98	99
10							
11							
12							
⋮							
97							
98							
99							

איור 1

בכיתה, מאחר והתלמידים הבינו שהלוח אמור להיות מאוד גדול, הצעתי להם את הלוח שבאיור 2.

X	המספרים מ- 10 עד 19	המספרים מ- 20 עד 99
המספרים מ- 10 עד 49		
המספרים מ- 49 עד 99		

איור 2

בשלב הראשון ביקשתי מהתלמידים לברר עבור כל משבצת שבלוח אם התוצאה היא מספר תלת-ספרתי או ארבע-ספרתי. חלק גדול מתלמידי הכיתה מיד מילאו שני תאים בלוח (איור 3). הם עשו זאת על סמך ההתנסות והמסקנה שהסיקו קודם.

X	המספרים מ- 10 עד 19	המספרים מ- 20 עד 99
המספרים מ- 10 עד 49	מכפלה תלת-ספרתית	
המספרים מ- 49 עד 99		מכפלה ארבע-ספרתית

איור 3

עכשיו נשאר לבדוק את התרגילים המתאימים לשתי המשבצות האחרות. כלומר, לבדוק את המכפלות המתקבלות בכל אחד משני המקרים הבאים:

א. כפל מספר דו-ספרתי גדול מ-20 במספר דו ספרתי קטן מ-50.

ב. כפל מספר דו-ספרתי קטן מ-20 במספר דו-ספרתי גדול מ-50.

גם משימה זו הועברה לפינה בה התלמידים מבצעים חקירה בזמנם החופשי. את המשך החקירה ביצעו רק תלמידים ספורים שעדיין מצאו עניין בה. בשלב מסוים ראיתי שהועלתה הצעה לבדוק בצורה שיטתית את המכפלות,
כלומר, לכתוב את כל המספרים ולכפול זוגות של מספרים כך:

המספרים מ- 20 עד 99:
20, 21, 22, 23 .... 96, 97, 98, 99
המספרים מ- 10 עד 49:
10, 11, 12, 13 .... 46, 47, 48, 49
הזוגות שהוצעו הם: 22x12   21x11   20x10

גם כאן התערבתי כמורה, והשארתי לתלמידים "פתק" על הקיר בפינת החקירה:

האם התרגיל 20x99 יהיה בסדרת התרגילים שלכם?

הערה זו הפנתה את תשומת לבם לעובדה שלמעשה צריך לכפול כל אחד מהמספרים שבסדרה הראשונה בכל אחד מהמספרים שבסדרה השנייה. תובנה זו החזירה אותם ללוח הכפל שנעשה באקסל.
במהלך החקירה שני תלמידים טענו שכדאי להתמקד בחקירת הזוגות שספרת העשרות שלהם היא 3. טענתם התבססה על העובדה ש: $3\times3<10$ ואילו $4\times4>10$. מאחר ומיקדו את החקירה בקבוצה זו של מספרים, הגיעו למסקנה שהמספרים הגדולים ביותר שמכפלתם היא תלת-ספרתית הם: 31 ו- 32. יש להניח שהבחירה של שני מספרים שספרת העשרות שלהם זהה הייתה מקרית לחלוטין. אולם, אי-אפשר להתעלם מהעובדה שלמעשה חקרו: אילו מבין כל האפשרויות של אורך צלעות המלבנים יתנו את השטח הקטן ביותר? (אלו שאורך צלעותיהם כמעט שווה).
מאחר שהכלים העומדים לרשות תלמידים בכיתה ד מוגבלים ולא מאפשרים את פתרון הבעיה, בסופו של הדיון לא יכולנו להנפיק "חוק או כלל" ונאלצנו לחזור לחישובים ולבדיקת מקרים פרטיים. נראה לי שדווקא בשל עובדה זו הצלחנו לחדד את הרעיון של זהירות מהכללות יתר, תוך כדי שימוש בעקרונות לוגיים המצויים בבסיס כל חקירה מתמטית.
במהלך הדיון התנהלה חקירה מתמטית מעמיקה לאורך זמן. במהלך החקירה הועלו הכללות שחלקן נבעו מתפיסות אינטואיטיביות וחלקן מהכללת יתר ובכל שלב נעשו בדיקה, אימות או הפרכה ונראה שגם העובדה שהתלמידים לא הצליחו בסופה של החקירה להגיע לתשובה חד-משמעית, סייעה להם להפנים את הבעייתיות שבהכללת יתר.

מקורות

אביטל, ש' (1976). היכן השגיאה? **גיליונות לחשבון 45**. חיפה: הטכניון.
אביטל, ש' (1981). מה אפשר לעשות עם שגיאותיו של תלמיד? **שבבים. עלון למורי המתמטיקה**.
ברקאי, ר' וצמיר, פ' (2005). **שימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה: תאוריה ויישום.** האגף לתכניות לימודים ומטה מל"מ.

על מחברת המאמר:

תמי גירון

מורה ומדריכה למתמטיקה. חברת צוות מרכז מורים ארצי למתמטיקה ועורכת כתב העת "מספר חזק 2000"