פותחים שיעור - קצת אחרת

תמי גירון

שיעור ספורט מתחיל, בדרך כלל, בתרגילי חימום, כמו, ריצה מסביב לאולם או למגרש. התלמידים המגיעים לשיעור יודעים בדיוק מה מצפים מהם, ובשריקה קלה במשרוקית - כל התלמידים כבר נמצאים במסלול הריצה, מבלי שהמורה יסביר או ייתן הוראות.

שיעור המתמטיקה, כשיעורים אחרים, מתחיל בכך שהמורה מחכה לשקט. לעתים הוא זוכה לשקט המיוחל מיד כשהתלמידים מבחינים שהוא עומד בכניסה, ולעתים עליו להשתמש באסטרטגיות שונות, כמו: אמירות מהסוג " אתם לא רואים שאני עומד בדלת?" או כיבוי והדלקת האור בכיתה, ועוד שיטות אחרות. התלמידים מצידם מצפים שהמורה "יגיד מה לעשות" ורק אז יתחיל השיעור.

כמורה למתמטיקה הרבה פעמים חשתי קנאה רבה במורה לספורט שאצלו "ההצגה מתחילה ללא טקסים של הרמת המסך". במהלך השנים הקנאה התחלפה בחיפוש אסטרטגיות שונות שיגרמו לכך שהתלמידים יתמקדו במטרת השיעור ללא "טקס הפתיחה". הגעתי למסקנה שהכרחי "חימום" לכל התלמידים גם בשיעור המתמטיקה. וכשם שבריצה יש תלמידים הרצים מהר, יש שרצים לאט, וכאלו ה"מדדים" אחרי כולם, כך גם פעילות החימום בתחילת שיעור המתמטיקה חייבת להיות פעילות כזאת שכולם יהיו פעילים בה, גם אם יפעלו ברמות שונות. מצאתי שמאוד יעיל למנות תלמיד תורן, שמיד עם הצלצול כותב או מדביק על הלוח משימה שקיבל מהמורה, וכל התלמידים מתחילים לעסוק בה.

על המשימה להיות כזאת שאפשר לענות עליה ברמות שונות, והעיסוק בה במשך מספר דקות מאפשר שיחה קצרה. במקרים רבים במהלך השיחה עשויות לעלות שאלות נוספות, היכולות להישאר פתוחות, כך שתהוונה גירוי לתלמידים להמשיך ולעסוק בהן.

כדי שהתלמידים יוכלו להתחיל לעסוק במשימה מיד בצלצול, כשהמורה עוד בדרכו לכיתה, המשימה חייבת להיות ברורה, ומאפשרת עבודה ללא הנחיות נוספות.

לכן, מומלץ שההוראות והמבנה של המשימה יהיו מוכרים לתלמידים. אחד מסוגי המשימות המתאימות למטרה זו היא תבנית ריקה של תרגיל, כגון זו המוצגת באיור 1, שאפשר לשבץ בה מספרים שונים. לתבנית אפשר לצרף כל פעם אילוץ או שאלה, שיכוונו את התלמידים לתרגול או חקירה בנושאים שונים ומגוונים. לדוגמה אציג מספר אפשרויות לעבודה עם התבנית.

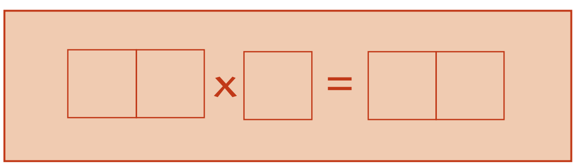
התבנית

איור 1

חייבים להשתמש בספרה 5

בתחילת השיעור הוצגה לתלמידים על הלוח המשימה הבאה:

השלימו מספרים. חייבים להשתמש בספרה 5.



המשימה הוצגה לתלמידים במחצית הראשונה של כיתה ג, בתקופה בה עסקו בחיזוק לוח הכפל, והתחילו להרחיב אותו בעל-פה, לכפולות שמעבר ללוח הכפל.

בשלב הראשון, נוצרו בכיתה קבוצות של תלמידים שהתחילו לכתוב תרגילים ולפתור אותם. בין הקבוצות נוצרה מעין תחרות, כשכל קבוצה ניסתה למצוא את המספר הגדול ביותר האפשרי של תרגילים. מאחר והתלמידים טרם למדו כפל בטור, הם הפעילו אסטרטגיות שונות לחישוב התרגילים שכתבו: פילוג, חיבור חוזר, כפל ב- 2 ושוב ב- 2 ועוד.

כבר בתחילת העבודה עלו שאלות שונות, כגון:

- האם מותר להשתמש בספרה 5 רק פעם אחת?
- כמה פעמים צריך להשתמש בספרה 5?
- האם בכל מקום אפשר להציב את הספרה 5?
- כמה תרגילים בכלל אפשר ליצור?
- מהי התוצאה הגדולה ביותר שאפשר לקבל?
- מהי התוצאה הקטנה ביותר שאפשר לקבל?
- כמה ספרות שונות זו מזו אפשר להציב? מה המספר הגדול ביותר של ספרות? מה המספר הקטן ביותר?
- האם אפשר ליצור קבוצות של תרגילים שיש בהן חוקיות או דגם מסוים?

בשלב הראשון רשמנו את כל השאלות שעלו על הלוח ולא התייחסנו אליהן. לאחר מספר דקות של יצירת תרגילים באופן חופשי, בחרתי את אחת השאלות הצגתי אותה לדיון בכיתה, ואת האחרות רשמתי על כרטיסיות, כדי שתלמידי הכיתה ידעו שנותרו שאלות, שניתן לחשוב עליהן ולחקור את התשובות להן.
השאלה שבחרתי הייתה:

כמה פעמים אפשר להשתמש בספרה 5?

אחד התלמידים טען שאי-אפשר להשתמש בספרה **5** רק פעם אחת בתרגיל, והציג את הדוגמאות:

15x3=45   25x3=75

הוא טען שאם כופלים מספר דו-ספרתי שספרת היחידות שלו **5** במספר חד-ספרתי, הרי שתתקבל תוצאה שגם בה ספרת היחידות היא **5**.
טענה זו מיד הופרכה בעזרת דוגמאות מתוך הדוגמאות שהתלמידים יצרו קודם:

15x4=60 , 35x2=70   45x2=90

בשיחה, התברר שהתלמיד הראשון התחיל בהצבת **5** בספרת היחידות שבתוצאה, ואז הסיק, שכדי לקבל מכפלה שספרת היחידות בה היא **5**, חייבת להיות הספרה **5** באחד הגורמים. המסקנה שלו הייתה נכונה, אבל היה מקום להציג את השאלה ההפוכה - האם בכל המקרים בהם באחד הגורמים תהיה הספרה **5** ספרת היחידות, נקבל בתוצאה **5** בספרת היחידות?
מכתיבת הדוגמאות על הלוח בשני טורים, שבאחד מהם התקבלו תוצאות זוגיות ובשני תוצאות אי-זוגיות, עלתה מיד ההכללה שאם באחד הגורמים ספרת היחידות היא **5**, והגורם השני הוא אי-זוגי, גם במכפלה תהייה ספרת היחידות **5**, ואילו אם נכפול במספר זוגי, תתקבל במכפלה ספרת היחידות 0, לדוגמה:

15x2=30

שני מקרים אלה היו דוגמאות לכך, שאפשר להשתמש בספרה **5** רק פעם אחת, וגם פעמיים.

מאוסף הדוגמאות שנרשמו על הלוח התלמידים הבחינו גם בחוקיות בכתיבת התרגילים:

15x2=30
15x4=60
15x6=90

ראיית החוקיות בסדרת התרגילים עזרה להם גם במציאת הפתרונות. אחד התלמידים הסביר לכיתה שהוא יודע מבלי לחשב ש:

15x8=120
15x10=150
15x12=180

הוא פשוט הוסיף 30 בכל פעם וגם ידע להסביר ש- "30 זה פעמיים 15, כי כל פעם מכפילים בשתי פעמים יותר".

בשלב זה נשארה פתוחה השאלה האם אפשר לשבץ יותר מפעמיים את הספרה **5** בתבנית. מאחר ואף אחד מהתלמידים לא מצא דוגמה למקרה כזה, הפסקנו בשלב זה את השיחה, והצגנו את השאלות שנשארו פתוחות בפינה המיועדת לכך בכיתה.

בפינה, על הקיר, הוצגה המשימה:
השלימו מספרים.
חייבים להשתמש בספרה 5.

$$\square\square \times \square = \square\square$$

האם אפשר להשתמש בספרה 5 יותר משתי פעמים?

שאר השאלות שנרשמו קודם על הלוח נרשמו על כרטיסיות שהוכנסו לכיס שנתלה בפינה.

למחרת, מתוך הרצון לגוון, הכנתי לכיתה משימה הקשורה בכפל ב- 0, ואיננה קשורה לתבנית שעסקנו בה בשיעור הקודם.
אולם בבוקר, כשהגעתי לבית הספר חיכה לי התלמיד התורן וסיפר שאחד התלמידים מצא תרגילים שבהם אפשר לשבץ את הספרה **5**, שלוש פעמים וגם ארבע פעמים. בכל מקרה תרגיל אחד בלבד, והם גם יודעים להסביר מדוע אפשר רק תרגיל אחד. בשיחה קצרה אתו, לאחר ששיתפתי אותו במשימה החדשה, החלטנו שנשוחח בכיתה על האפשרויות לשיבוץ הספרה **5** שלוש או ארבע פעמים.
כשהגעתי לכיתה, לשיעור המתמטיקה אחרי ההפסקה הגדולה, מצאתי על הלוח את השאלות:

15x5=75
האם אפשר לשבץ את הספרה **5** שלוש פעמים בעוד תרגילים?

55x1=55
האם אפשר לשבץ את הספרה **5** ארבע פעמים בעוד תרגילים ?

תלמידי הכיתה עבדו בשקדנות וניסו למצוא עוד תרגילים. לאחר דקות ספורות מספר גדול של תלמידים בכיתה רצו להסביר מדוע לא ניתן למצוא עוד תרגילים לשני המקרים. אם בשיעור הקודם השיחה נסבה על תכונות של כפולות של 5 , הרי שהפעם עסקנו בעיקר באומדן. התלמידים טענו, שאם ישבצו בגורם החד-ספרתי **5** וינסו לשבץ בגורם הדו-ספרתי מספר שספרת היחידות שלו היא **5**, אבל הוא גדול מ- 15, הרי שתמיד יקבלו מכפלה תלת-ספרתית ולא דו-ספרתית. מרבית התלמידים היו עסוקים בשינוי התרגיל: 15**X**5=75, שהוצג להם על הלוח, והתמקדו באומדן התוצאות ולא חשבו על האפשרות של: 11**X**5=55, שגם היא אפשרות לשבץ 3 פעמים את הספרה 5.
גם בניסיון לשבץ ארבע פעמים את הספרה **5** הועלו טיעונים הקשורים לסדר גודל התוצאות, כגון: "אם יש **5** בספרת העשרות בגורם הדו-ספרתי, כל הגדלה של הגורם החד-ספרתי תיתן תוצאה תלת-ספרתית". בסיכומו של הדיון הובהר גם שלא ניתן לשבץ את הספרה 5 יותר מ- 4 פעמים, מלבד האפשרות האחת שמצאו. הדיון הסתיים בבקשה לתלמידים לחשוב שוב על האפשרות של שיבוץ הספרה 5 שלוש פעמים.

התורן, שזכר שרציתי להציג שאלה העוסקת בכפל ב- **0** הציע להציג בפינת החקירה את המשימה הבאה:

איפה אפשר לשבץ 0 ?

$$\square\square \times \square = \square\square$$

המשימה הוצגה בפינה והתלמידים יכלו מיד להתחיל לחשוב עליה, לקראת השיחה לשיעור הבא, בו דנו ותרגלנו מכפלות של עשרות שלמות ומכפלות של מספר דו-ספרתי ב- 0.
במהלך הדיון עלו גם ההכללות הבאות:
-אי-אפשר לשבץ **0** בגורם החד-ספרתי, כי אז התוצאה תהיה **0**, והיא לא יכולה להיות דו-ספרתית.
-אם נשבץ **0** באחד הגורמים, אז גם במכפלה יהיה **0** (בספרת היחידות), ולכן אי-אפשר להשתמש רק פעם אחת ב- **0** בתבנית.

זה היה הדיון האחרון שבו עסקנו בתבנית זו, אולם התבנית הייתה תלויה בפינה בכיתה במשך כ- 10 ימים, ותלמידים רבים חקרו שאלות נוספות הקשורות בה. חלק מתיעוד החקירה נתלה בפינה, ואיפשר לתלמידים אחרים להתייחס לחקירה ולפתח אותה, וחלק נכתב במחברות שנמסרו לי להתייחסות.

שאלות שהתלמידים עסקו בהן במהלך חקירת התבנית

כל השאלות המובאות להלן הועלו על-ידי התלמידים, לאחר שטענו שעל השאלות שהועלו בתחילת החקירה (ראו עמ' 35) הם יכולים לענות "מהר ובלי בעיה".

א. כמה תרגילים אפשר ליצור מהתבנית מבלי שמחליטים אילו ספרות צריכות להופיע בה?

התלמידים שהתחילו לחקור שאלה זו עבדו בצורה שיטתית והתחילו לחקור את כל המקרים בהם הגורם החד-ספרתי הוא 1. כאן התלבטו בשאלה כמה מספרים יש בין 10 ל-99 (כולל 10 ו- 99). ההתלבטות הייתה בין 89 ל- 90. לאחר שמצאו שיש 90 מקרים עלתה בקבוצה אחת ההצעה הבאה: אם יש 9 אפשרויות לשיבוץ הגורם החד-ספרתי (1-9) ו- 90 אפשרויות לשיבוץ מספר דו-ספרתי , ייתכן שיש 90x9 אפשרויות בכלל. להצעה זו הגיעו לאחר שהתנסו בכתיבת כל האפשרויות לכפול את 10 ואת 11 במספר חד-ספרתי. הצעה זו הייתה למעשה הרחבה של משמעות הכפל מעבר למה שנלמד בכיתה. התלמידים פסלו את ההצעה כשהבינו שכבר את המספר 12 לא ניתן לכפול בכל המספרים החד-ספרתיים מ- 1 ועד 9, כי 12x9=108 שהוא מספר תלת-ספרתי. בהמשך החקירה הפעילו התלמידים אומדן, מצאו חוקיות והגיעו לפתרון בדרך מהירה ויעילה.

בקבוצה אחרת תלמידים התחילו את החקירה מהמכפלה, ובדקו את האפשרויות השונות לקבל תוצאות דו-ספרתיות. קבוצה זו השתמשה הרבה במהלך החקירה בתכונות של כפולות של 2 ושל 4, וכן השתמשה בידע שנרכש לגבי כפולות של 5 ו- 10.

ב. תרגילים בהם משתמשים ב- 5 ספרות שונות זו מזו

התלמידים שניסו ליצור תרגילים בעזרת חמש ספרות שונות זו מזו, התחילו מכך שבחרו 5 ספרות וניסו לשבץ אותן. המשימה הייתה קשה מדי והם בחרו אסטרטגיה של ניסוי וטעייה. הם הופתעו לגלות שניתן לקבל רק 21 תרגילים בהם 5 ספרות שונות, והופתעו עוד יותר כשגילו שיש מכפלות שניתן לקבל אותן בשתי דרכים, כמו: 26x3=78 וגם: 39x2=78. העובדה שהופתעו מכך, למרות שנתקלו הרבה פעמים בדרכים שונות להגיע לאותה תוצאה, הבהירה לי שהאינטואיציה שלכל תרגיל יש תוצאה אחת בלבד, ולכן כל תוצאה מתקבלת מתרגיל יחיד, יותר חזקה מההתנסויות שחוו בנושא זה.

במהלך החקירה תלמידים אלה פתרו הרבה מאוד תרגילים בדרכים שונות, ואין ספק שהמוטיבציה שהובילה אותם הייתה הרבה יותר גדולה מהמוטיבציה המלווה אותם כשהם מקבלים דף תרגילים.

ג. אם נחייב להשתמש בספרה 9 או בספרה 8, באיזה מקרה יהיו יותר תרגילים?

התלמידים שניסו למצוא את כל התרגילים שמשתתפת בהם הספרה **9**, ניסו בהתחלה לשבץ **9** בספרת העשרות בגורם הדו-ספרתי. הם קיבלו 10 תרגילים שונים שבכולם הגורם החד-ספרתי הוא 1. מהר מאוד הם הבינו שלא יוכלו לשבץ מספר גדול מ- 1 כגורם חד-ספרתי, כי יקבלו מכפלות שהן "כמעט 200".

לאחר מכן הזיזו את ה- **9** לספרת היחידות, וכתבו את המספרים: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99 ותכננו לנסות לכפול כל אחד מהם בכל המספרים מ- 1-9 , ולבדוק באילו מקרים יקבלו מספר דו-ספרתי. אחד התלמידים טען שהמספר הגדול ביותר שצריך לנסות לכפול אותו ב- 2 הוא 49, ואת המספרים הגדולים ממנו אפשר לכפול רק ב- 1. רק לאחר מספר בדיקות הוא הצליח לשכנע את חבריו בנכונות טענתו. לאחר התנסות קצרה התברר להם שגם את המספרים 19, 29 ו- 39 אין צורך לכפול בכל המספרים החד-ספרתיים וניתן בעזרת אומדן לצמצם את מספר הבדיקות.

בשלב הבא הציבו את **9** כגורם החד-ספרתי. במקרה זה מצאו 2 תרגילים:

$10x9$ ו- $11x9$.

התלמידים לא חשבו על האפשרות שבה תתקבל הספרה **9** כתוצאת מכפלה של שני מספרים ששניהם שונים מ- **9**.

בשלב זה התערבתי וביקשתי מהתלמידים שיבדקו אם אפשר להשלים מספרים בתבנית הבאה:

$$\boxed{}\boxed{} \times \boxed{3} = \boxed{}\boxed{9}$$

התרגילים הראשונים שעלו היו:

$33x3=99$ ו- $13x3=39$

כאן עלתה ההשערה שאם ספרת היחידות בשני הגורמים המוכפלים היא **3** הרי שבתוצאה ספרת היחידות תהיה תמיד **9**. אחד התלמידים ניסה להצדיק את ההשערה ואמר: "גם בלוח הכפל 3x3 שווה תמיד ל- **9**". מכאן ועד למציאת כל התרגילים שבהם משתתפת הספרה **9** הדרך הייתה קצרה.

כאשר ניסו למצוא את כל התרגילים שאפשר לשבץ בהם את הספרה **8** , כבר בדקו בעצמם את האפשרות לקבל בספרת היחידות של המכפלה את **8**, כתוצאה מהכפלת המספרים **2** ו- **4**.

החקירות שהוצגו בסעיפים א-ג התבצעו על-ידי תלמידים שהופנו לפינה כפינת העמקה, או על-ידי תלמידים שסיימו מהר את המטלות השוטפות שלהם. במהלך השיחות הפורמליות והלא פורמליות שהתנהלו בכיתה נחשפו כל התלמידים למגוון של אסטרטגיות לפתרון כפל מספר דו-ספרתי במספר חד-ספרתי, להכללות הקשורות בהכרת מכפלות ותכונותיהן, לסימני התחלקות, לאומדן ועוד.

הצגת הדוגמאות על הקיר אפשרה לכל התלמידים להיות חשופים לניסיונות ולדוגמאות של חבריהם. הם הגיבו בכתב ובעל-פה לעבודות חבריהם, ולא פעם תלמידים סיפרו ששינו או הוסיפו בעקבות "מה שחבר אמר או כתב".

הדוגמאות המוצגות על הקיר אפשרו גם לי לנווט את "שיחות החימום" והנושאים לדיון, כך שיתאימו לדוגמאות וישדרגו את עבודת התלמידים ליותר הכללות ועבודה סביב מושגים מתמטיים, ולא רק סביב תרגול ומציאת אסטרטגיות חישוביות.

התלמידים העלו שאלות שעל חלקן לא חשבתי בעצמי. בעקבות שאלות התלמידים הוספתי למאגר השאלות, שאני נוהגת להציג לכיתה בתחילת שיעור, עוד שאלות הקשורות לתבנית זו ולתבניות אחרות.

במבט לאחור על פעילות זו ואחרות הדומות לה, אפשר לומר שהן מרחיבות את העיסוק המתמטי של התלמידים בכמה היבטים. זמן החשיבה על מתמטיקה שהוקדש להתנסות במושגים, תרגול והכללות, חרג בהרבה ממספר השעות המוקצות להוראת המקצוע. ההתעסקות בחקירה נבעה מעניין ומסקרנות של התלמידים ולא מהוספת שעות הוראה.

מעבר להיבט הזמן שהוקדש לחקירה, במהלך החקירה הופעלה תובנה חשבונית, נעשה קישור משמעותי בין מושגים ונושאים שונים שבתכנית הלימודים, והועלו על-ידי התלמידים שאלות שכדי להשיב עליהן הם נאלצו לפרק ולהרכיב מחדש בעיה פשוטה, וכך יצרו בעצמם בעיות הדורשות חשיבה ברמה גבוהה.

קשה מאוד לסכם פעילות במונחים של "התלמידים למדו הרבה ונהנו מאוד...". אולם, העובדה שבכל שיעור הם חיכו למשימה נוספת, ודרבנו את התלמיד התורן להציג את המשימה לכיתה עוד בסוף ההפסקה מדברת בשם עצמה.

על מחברת המאמר:

תמי גירון

מורה ומדריכה למתמטיקה.
חברת צוות מרכז מורים ארצי למתמטיקה
ועורכת כתב העת "מספר חזק 2000"

tamiavi@netvision.net.il