

## אחוזים וריבוע האחוזים

### מיכאל קורן

#### מבוא

במאמר זה יוצג נושא האחוזים ושימושים של מושג האחוז, כשהגישה למושג האחוז שונה מהדרך המקובלת להוראת האחוזים.

הגדרת האחוז כאן לא תתבסס על מושג השבר (האחוז כמאית) אלא דווקא על האחוז כמושג המאפשר להימנע, לעתים, מהצורך בשברים. בדרך זו מושג האחוז מוצג באופן דומה ליחידות מידה, שבהן הוכנסו יחידות משנה, כדי למנוע צורך בעבודה עם שברים.

לדוגמה, הסנטימטר הוא מאית המטר. העובדה שהסנטימטר הוא יחידה מוגדרת (הנגזרת אמנם מהמטר), מאפשרת במקרים רבים לחשב ולמדוד בלי להתייחס להיותו של הסנטימטר חלק של המטר. דוגמה אחרת היא, הוספת הדקות ואחר כך השניות כחלוקות משנה של השעות כיחידות זמן. בדרך זו נגדיר את האחוז כאחד למאה. השם האנגלי לאחוז (שבא מהלטינית),

per cent פירושו המילולי הוא, אכן, "אחד) למאה". בהגדרה זו נשתמש לפתרון הבעיות הקשורות באחוזים. להלן יוצעו מספר פעילויות להבהרת המושג והשימושים בו.

#### פעילות מקדימה

על כל המוצרים בחנות נוסף מס של 10%. בטבלה שלפניכם מופיעים: המחיר בשקלים של מוצרים שונים שבחנות (ללא המס), המס בשקלים, המחיר כולל המס בשקלים, והיחס בין המחיר כולל המס למחיר לפני המס. (יחס זה גדול כמובן מ-1, כי המחיר כולל מס גבוה מהמחיר ללא מס.)



א. מלאו את החסר בטבלה. מותר להיעזר במחשבון רק בשורה האחרונה.

					20	40	300	400	200	מחיר ללא מס
			15	50					20	מס
165	275	660							220	מחיר מס +
									1.1	יחס בין המחיר הכולל למחיר ללא מס

ב. מצאו קשרים בין משבצות באותה שורה בטבלה. למשל:   
 ■ מדוע המס בעמודה שבשורה הראשונה שלה כתוב 400, כפול מהמס בעמודה שבשורה הראשונה שלה כתוב 220?   
 ■ מה הקשר בין המחיר הכולל מס בעמודה של 200 ובעמודה של 20? מדוע?   
 ■ מצאו קשרים נוספים והכלילו.

ג. ליאורה אומרת שכדי למצוא את המחיר הכולל מס, אפשר לכפול את המחיר ללא מס ב- 1.1. האם היא צודקת? נסו להסביר מדוע היא צודקת, או מדוע אינה צודקת.

#### ריבוע האחוזים

כהמחשה לרוב השאלות הקשורות באחוזים, נשתמש בריבוע האחוזים. זהו ריבוע בן 100 משבצות, כלומר, ריבוע של 10 על 10 משבצות. לכל משבצת בריבוע האחוזים נתייחס כאל תא בו מאכסנים מספר או כמות. **ההסכם הוא שתמיד בכל התאים יש אותו המספר.**

דוגמה: אם ידוע לנו שבתא מסוים נמצא המספר 4, אז סכום המספרים בריבוע האחוזים הוא 400, כי גם בכל תא אחר נמצא המספר 4, ויש 100 תאים. כלומר, הכמות הכללית היא 400.

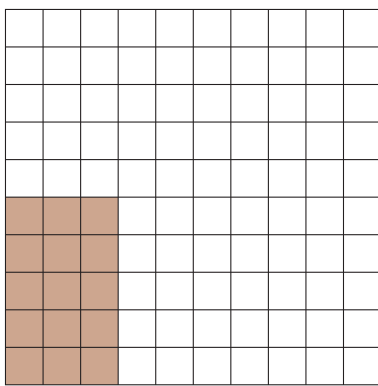
### מרכיבי הקשר הבסיסי

בקשר בין אחוזים לכמות הכוללת יש שלושה מרכיבים:  
 א. מרכיב אחד הוא הכמות הכוללת שלגביה מחשבים את האחוז, לכמות זו נקרא **הכמות הבסיסית**.  
 ב. מרכיב שני הוא מספר האחוזים (או כפי שמקובל לקרוא למספר זה - **האחוז**).  
 ג. מרכיב שלישי הוא הערך המתקבל כשלוקחים את האחוז הדרוש מתוך הכמות הכוללת. לערך זה נקרא **ערך האחוז**.  
 דוגמה: 3% של 200 הם 6. הכמות הבסיסית היא 200, האחוז הוא- 3 וערך האחוז הוא 6.

נעבור לדוגמאות לחישוב אחד המרכיבים על-פי שני המרכיבים האחרים, בשלושת המקרים האפשריים.

#### חישוב ערך האחוז

הנחה של 15% פירושה, שמכל 100 שקלים שיש לשלם, המוכר מוותר על 15 שקלים.  
 לכן, הנחה של 15% מ- 500 ש"ח הם  $15 \times 5 = 75$  ש"ח, שכן 500 הם 5 מאות, ומכל מאה מפחיתים 15 שקלים מהמחיר. מצב זה יודגם בריבוע האחוזים הבא:



מאחר ומדובר ב- 500 שקלים, בכל תא (בכל משבצת) יש 5 שקלים. 15% הם 15 משבצות, ומאחר ובכל תא יש 5 שקלים, אז ב- 15 המשבצות יש 75 שקלים. כלומר, 15% של 500 שקלים הם 75 שקלים.

**שאלה:** מספר התושבים בישוב היה 400 והוא גדל ב- 5%. כמה תושבים נוספו לישוב?

### מספר שאלות שמומלץ להציג להבהרת הרעיון של ריבוע האחוזים:

- אם בכל תא יש 12 ש"ח, מהי הכמות הכללית בכל ריבוע האחוזים?
- סכום המספרים בשני תאים בריבוע האחוזים הוא 8. מהו סכום המספרים הנמצאים בריבוע האחוזים? רמז: איזה מספר נמצא בכל אחד משני התאים?
- אם הכמות הכוללת בריבוע האחוזים היא 300 שקלים, אז בכל תא יש 3 שקלים. אם הכמות הכוללת היא 50 שקלים, אז בכל תא יש חצי שקל.  
 מהי הכמות בכל תא, אם בריבוע האחוזים יש 150 גרם אגוזים?

#### דוגמאות נוספות:

נניח שבבית קפה משלמים עבור האבטחה, שקל אחד על כל מאה שקלים בחשבון. כלומר, אם החשבון הוא של 400 ש"ח, אז יש לקחת עבור האבטחה 4 שקלים (אחד לכל מאה, ויש 4 מאות).  
 אם נציג דוגמה זו בעזרת ריבוע האחוזים, הרי שבכל הריבוע יש 400 ש"ח. בכל תא - 4 ש"ח, ולכן בכל תא יש אחוז אחד של 400 השקלים.  
 לפי הגדרת האחוז שהוצגה לעיל, נוכל להגיד שאחוז אחד של 400 זה 4. כלומר, בכל תא בריבוע האחוזים, נמצא אחוז אחד של הכמות הכוללת הנמצאת בריבוע האחוזים. בחמישה תאים, למשל, נמצאים 5% של הכמות הכוללת. ב-100 התאים נמצאים 100% שהם הכמות כולה.

#### שאלה נוספת להבהרת הרעיון:

- בנק מוסיף לחשבון שקל אחד בחודש על כל מאה שקלים המופקדים בחשבון.
- א. נסחו את האמור בשורה הראשונה תוך שימוש במושג האחוז.
  - ב. ליעקב היו בחודש דצמבר 300 ש"ח בחשבון. כמה שקלים הוסיף הבנק לחשבוננו?
  - ג. תארו את הנתונים בריבוע האחוזים. (מספיק לרשום את מספר השקלים בתא אחד).
  - ד. אם ליצחק היה בחשבון פי 5 יותר כסף מאשר ליעקב, פי כמה גדול הסכום שהוסיף הבנק ליצחק, לעומת הסכום שהבנק הוסיף ליעקב?

**חישוב האחוז**

**דרך א:** כאשר שואלים כמה אחוזים הם 9 גר' אגוזים בתוך תערובת של 300 גרם פיצוחים, שואלים בעצם, כמה גרם אגוזים יש בכל מאה גרם תערובת. התשובה היא 3%, כי 9 הגרמים מחולקים בין 300 גרם תערובת, ולכן בכל 100 גרם יש 3 גרם, דהיינו: 3 ל- 100 או 3%.

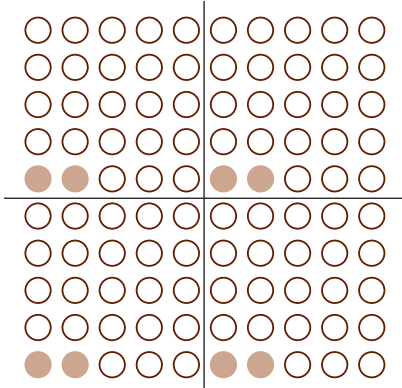
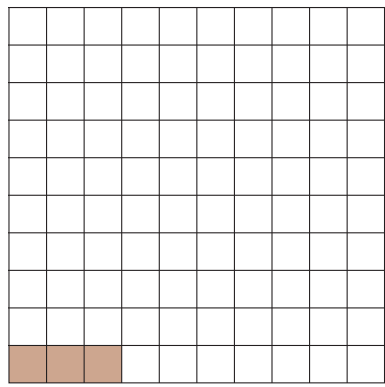
**דרך ב:** בריבוע האחוזים מימין יש בכל תא 3 גרם מהתערובת. נוכל להניח (לצורך החישוב) שתשעת הגרמים של האגוזים מרוכזים, ולכן הם נמצאים בשלושת התאים הצבעיים. לכן האגוזים מהווים 3% של התערובת.

שימו לב להבדל בין דרך א לדרך ב בחישוב האחוז: כשחישבנו את האחוז בדרך א, "חילקנו" את האגוזים בין המאות. 300 הם שלוש מאות, ולכן חילקנו 9:3 וקיבלנו 3 ל- 100 או 3%.

בדרך ב, כשחישבנו את האחוז (שמהווים האגוזים) בעזרת ריבוע האחוזים, חישבנו תחילה כמה זה אחוז אחד של הכמות, כלומר, כמה גרם יש בכל תא. אחר כך חישבנו כמה תאים יש לקחת, על מנת שיהיו לנו 9 גרם. גם כאן חילקנו 9:3. הפעם כדי למצוא את מספר התאים. מספר התאים הוא האחוז שמהווים תשעה גרם בתערובת של 300 גרם.

התהליך שתואר לעיל לחישוב האחוז מתאים כמובן לכל כמות בסיסית. יחד עם זאת, כשהכמות הבסיסית קטנה מ- 100, אפשר, לפעמים, למצוא בקלות את האחוז בדרך נוספת.

לדוגמה, נניח שבקבוצה של 25 תלמידים, שניים משחקים שחמט. מהו אחוז השחקנים בקבוצה? אם בכל קבוצה של 25 יש שני שחקנים, אז בארבע קבוצות של 25 (שהם 100 תלמידים) יהיו 8 שחקנים, והאחוז הוא לכן 8%.



**שאלה:** איזה אחוז מהתערובת מהווים פיצוחים אחרים (שאינם אגוזים)?  
תשובה: מהצירור רואים שיש 97 תאים שבהם תערובת ללא אגוזים. לכן התשובה היא 97%.

בציור רואים ארבע קבוצות של 25 ובכל אחת שני עיגולים צבועים. יש 8 עיגולים צבועים בתוך 100 העיגולים המצוירים, ולכן העיגולים הצבועים מהווים 8% של העיגולים בקבוצה. כמובן שדרך זו עבדה מפני ש- 100 הוא ארבע פעמים 25. דרך זו תעבוד גם עבור קבוצות של 20, 10 או 50.

תרגיל: מצאו בשתי דרכים לפחות, מהו אחוז הפקקים הכחולים, אם בקבוצה של 20 פקקים, שלושה מהפקקים הם כחולים.

לגבינות נהוג לקרוא בשמות כגון "גבינה של 5%", "גבינה של 23%" וכו'. אומרים שגבינה היא גבינה של 5%, אם השומן בגבינה מהווה 5% של משקלה (וכך כמובן לגבינה 9%, שבה השומן מהווה 9% ממשקל הגבינה, וכו').  
מכאן שבגביע שיש בו 500 גרם גבינה ויש בו 10 גרם שומן, הגבינה תהיה גבינה של 2% מאחר ואחוז השומן בה הוא 2%.

365  
x 12

להלן הצעה לתרגילים ליישום הרעיונות שהוצגו.

**תרגילים**

1. אורך של כביש היה 150 ק"מ. סללו עוד 30 ק"מ של הכביש. בכמה אחוזים גדל אורך הכביש?

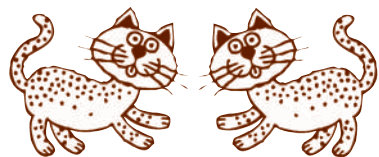
2. מנייה עלתה מ-300 ש"ח ליחידה ל-324 ש"ח ליחידה. בכמה אחוזים עלתה המנייה?

3. תמורת ספר וחוברת שולמו 240 ש"ח. למרות שמחיר הספר עלה ב-10% ועל החוברת ניתנה הנחה של 20%, מחיר הקנייה לא השתנה. מה היה מחיר הספר, ומה מחיר החוברת?

4. כאשר הגדילו אורך של מלבן ב-5%, ללא שינוי הרחב, שטח המלבן גדל ב-45 סמ"ר. מה היה שטח המלבן לפני השינוי?

5. בציור משמאל, אורך הצלע הארוכה במלבן 6 ס"מ ואורך הצלע הקצרה 4 ס"מ. אורך בסיס המשולש FEC הוא 2 ס"מ. איזה אחוז מהווה שטח המשולש משטח המלבן?

6. בחצר 300 חתולים, 27 מהם שחורים. מה אחוז החתולים השחורים?

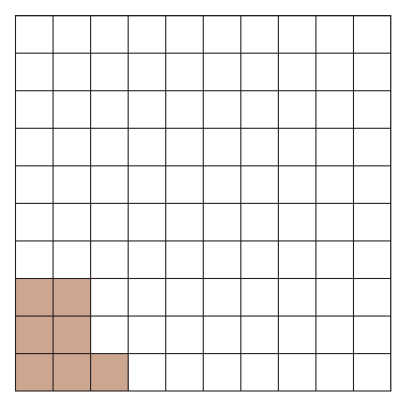


7. ערבבו 200 גרם גבינה של 5% עם 200 גרם גבינה של 9%. מהו אחוז השומן של הגבינה שהתקבלה?

**חישוב הכמות הבסיסית**

נציג את חישוב הכמות הבסיסית בעזרת דוגמה: ידוע ש-14 מתלמידי המחזור אוהבים מתמטיקה, והם מהווים 7% של המחזור. כמה תלמידים יש במחזור זה?

אם 14 זה 7% של מספר, אז אחוז אחד הוא  $2 = \frac{14}{7}$  ולכן המספר הוא 200 (כי אחוז פירושו אחד למאה, ולכן 2 זה אחוז אחד של 2 מאות). נסתכל בריבוע האחוזים. איננו יודעים עדיין מה הכמות הבסיסית, אך מיד נמצא מה נמצא בכל תא:



14 הם 7% תלמידים. בפינה השמאלית התחתונה השחרנו שבעה תאים. בחלק זה יש 14 תלמידים. כדי שבשבעת התאים יהיו 14, בכל תא חייבים להימצא 2. מכאן שבריבוע יש 2 תלמידים בכל אחת מהמשבצות, ולכן בריבוע כולו יש 200 תלמידים. מצאנו, אפוא, שמספר התלמידים במחזור הוא 200.



8. מוצרים שונים התייקרו באחוזים שונים. המחירים בטבלה הם בשקלים.  
א. השלימו את הטבלה הבאה. במילוי השורה האחרונה נסו בכל עמודה לנחש תחילה את היחס. בדקו את תשובותיכם.

80	50	150	400	300	30	20	400	40	20	200	מחיר קודם
				2%	20%	30%	5%	5%	10%	10%	אחוז התייקרות
		15									התייקרות בשקלים
120	60	165	460								מחיר חדש
											יחס מחירים חדש/ קודם

ב. דוד אומר: "20% של 50 זה תמיד כמו 50% של 20, כאילו". למה הוא מתכוון? האם הוא צודק?

אחרי שמבינים את דרכי החישוב במקרים השונים, אפשר להקל על הזיכרון אם רושמים את החישוב בנוסחה.

**נוסחה לחישוב הכמות הבסיסית**

(על-פי האחוז וערך האחוז)  
נסמן ב- K את הכמות הבסיסית. נסמן ב- P את מספר האחוזים (דהיינו, את האחוז) ונסמן ב- E את ערך האחוז. נחזור על מה שעשינו כדי לקבל את הכמות הבסיסית על-פי האחוז וערך האחוז: תחילה חישבנו את הערך של אחוז בודד על-ידי חילוק ערך האחוז באחוז. באותיות: (E:P). כעת מאחר והכמות הבסיסית גדולה פי מאה מהערך של אחוז אחד, עלינו לכפול ב- 100 ונקבל:

$$K = \frac{100E}{P} \text{ או } K = \frac{E}{P} \cdot 100$$

שימו לב שכתבנו את הנוסחה רק אחרי שידענו והבנו כיצד מוצאים את הכמות הבסיסית. נוסחה צריכה לשמש כלי זיכרון והרחבה - לתהליך שאנחנו כבר יודעים לבצע. יכולנו לכתוב נוסחאות גם לחישוב E על-פי K ו-P, ולחישוב P על-פי K ו-E, אך כפי שנראה די באחת מהנוסחאות כדי לחשב, בכל מקרה, את אחד מהגדלים על-פי שני האחרים.



**דוגמה לחישוב האחוז** (בעזרת הנוסחה)

שאלה: מצאן, בעזרת הנוסחה לעיל, איזה אחוז מהווה 12 מ-600?

פתרון: נרשום בנוסחה  $K = \frac{100E}{P}$  את הכמות הבסיסית שהיא 600, ואת ערך האחוז שהוא 12.

נקבל:  $600 = \frac{100 \times 12}{P}$ . כעת נכפול את שני אגפי המשוואה ב- $P$ , ונחלק ב-600.

$$P = \frac{100 \times 12}{600} = 2$$

נקבל כי:

**דוגמה לחישוב הכמות הבסיסית** (בעזרת הנוסחה)

שאלה: אם 5% ממשכורתו של אדם הם 400 ש"ח. כמה משתכר האדם?

פתרון: נרשום בנוסחה  $K = \frac{100E}{P}$  את האחוז (5%) ואת ערך האחוז (400 ש"ח).

$$K = \frac{100 \times 400}{5} = 8000$$

נקבל:

נראה מיד כיצד נוכל בעזרת הנוסחה, על-ידי כללים אלגבריים בסיסיים, לפתור גם את חישוב ערך האחוז לפי הכמות הכללית ולפי האחוז, וגם לחשב את האחוז לפי הכמות הכללית וערך האחוז.

**דוגמה לחישוב ערך האחוז** (בעזרת הנוסחה)

שאלה: כמה זה 5% של 110?

פתרון: נרשום בנוסחה  $K = \frac{100E}{P}$  את הכמות הבסיסית שהיא 110, ואת האחוז שהוא 5.

נקבל:  $110 = \frac{100E}{5}$ . כעת נכפול את שני אגפי המשוואה ב-5, ונחלק ב-100.

$$E = \frac{5 \times 110}{100} = 5.5$$

נקבל כי:

**סיכום:**

במאמר זה הוצגו המושגים המרכזיים הקשורים בהוראת האחוזים, והצעות לדרכי הוראתם. בגיליון הבא של "מספר חזק 2000" נרחיב ונעסוק במושגים נוספים.

על מחבר המאמר:

**ד"ר מיכאל קורן**

מרצה במכללת סמינר הקיבוצים.