בעיות גאוס

פיטר סומובול, רועי יוסיבאש, אוריאל רוזן

מבוא

עבודת חקר מתמטית, בדרך כלל, כוללת: בעיה מתמטית או אוסף של בעיות מתמטיות בנושא מסוים שפתרונן דורש חקירה, בדיקת מקרים מיוחדים, חשיבה אינדוקטיבית והכללה, מציאת ובדיקת השערות, הוכחה או הפרכת ההשערות הנ"ל, ומציאת בעיות חדשות המתבססות על הרעיונות של הבעיה הנתונה.

עיסוק בעבודות חקר מתמטיות הוא אחד הכיוונים החדשים בלמידת המתמטיקה בבית הספר התיכון "אשל הנשיא" שבו מבצעים מחקרים ממשיים בתחום המתמטיקה ובתחום המחשבים. משימה זו היא משימה לא פשוטה למורים וגם לתלמידים. אולם, אנו מאמינים שהיא חיונית לפיתוח אופי של מדען וחוקר מתמטי עתידי. שיטת ההוראה של המתמטיקה בבית הספר לא מציגה את המתמטיקה כמדע, אלא בעיקר ככלי (לעומת פיזיקה, ביולוגיה ומקצועות אחרים).

במתמטיקה, בדרך כלל, קשה למצוא נושא לחקירה שהוא "טרי" יחסית. שלא יהיה העתקה מספר קיים. סיבות אלו ואחרות הן הגורמות לכך שתלמידים מעטים עוסקים בחקר מתמטי לשמו.

בעבודות עם התלמידים אנחנו עובדים בעיקר בשתי שיטות:

שיטה ראשונה (אינדוקטיבית) – העבודה מתחילה בחקירת פתרון של שאלה בודדת, שנלקחה מתחרות כלשהי ברמה גבוהה (אולימפיאדה ארצית או בינלאומית). בראשית מהלך העבודה על התלמיד ללמוד את החומר התיאורטי הקשור לבעיה, אחר כך עליו לפתור בעיות פשוטות יותר, שהן מקרים פרטיים של הבעיה, ובסופו של דבר לפתור את הבעיה עצמה. תוך כדי תהליך זה מתעוררות אצל התלמיד (באופן ספונטאני או בעזרת המנחה) שאלות, המובילות להכללה או ליישומי הפתרון בתחומים אחרים.

כל זה מתגבש בסוף תהליך החקירה לתיאוריה קטנה סביב השאלה המקורית.

שיטה שנייה (דדוקטיבית) – המנחה בוחר אובייקט כלשהו לחקירה, ונותן שאלות לחקירתו. המטרה של התלמיד לבנות על סמך השאלות האלה (ושאלות נוספות, שעולות בתהליך החקירה) תיאוריה, הקשורה לאובייקט המחקר.

בכל עבודה התלמידים עוברים עם המנחה את התהליך הבא:

אנליזה של נתוני הבעיה ← פתרון הבעיה ← ניסיון הכללה של התוצאות ← ניסיון חיפוש של הרעיון המרכזי של הבעיה או של הפתרון עצמו ← חיפוש של יישומים חדשים של הרעיון ← ניסוח של בעיה חדשה, ולבסוף הכללה.

המטרות העיקריות של העיסוק בבעיות החקר הן:
לרכוש ידע במתמטיקה ברמה גבוהה; לשמור ולפתח את האינדיווידואליות והחשיבה העצמית של התלמיד; להעלות את המוטיבציה בלימודי המתמטיקה; לפתח את החשיבה היצירתית והביקורתית; לחזק את הביטחון העצמי בפתרון בעיות; לפתח "סיבולת אינטלקטואלית".

עבודות החקר אמנם מתבצעות בבית הספר התיכון, אולם, אנו סבורים שאת הגישה וההבנה מהי חקירה מתמטית יש להתחיל ולהטמיע כבר בדרך ההוראה בבית הספר היסודי. לכן, מצאנו לנכון לתאר בפני קהל הקוראים של מספר חזק 2000 דוגמה של עבודת חקר.

במאמר זה נציג עבודת חקר אינדוקטיבית שחקרו שני תלמידים מכיתה ט. כאמור, העבודה ממחישה את דרך החקר המתמטית, ומרחיבה בנושאים הלקוחים מתוך נושאי הלימוד של בית הספר היסודי.

על גאוס

קרל פרידריך גאוס, (Carl Friedrich Gauss) חי בין השנים 1777–1855, היה מתמטיקאי, פיזיקאי ואסטרונום גרמני. גאוס נחשב לאחד מגדולי המתמטיקאים של כל הזמנים. כינויו היה "ראשון המתמטיקאים" , והוא מוזכר בנשימה אחת יחד עם ניוטון ואיינשטיין. גאוס נחשב ל"ילד פלא", כבר בגיל 3, לפי הסיפור המקובל, הצליח לגלות טעות חישוב באחד מחשבונותיו העסקיים של אביו.

סיפור מבוסס יותר מספר, כי בגיל 7 ביקש מורהו להעסיק את תלמידי הכיתה בתרגיל שלפתרונו הייתה דרושה שעה לפחות. התרגיל היה לחבר את המספרים מ- 1 עד 100, והנה לא עברו כמה שניות וגאוס הקטן הניח את לוח-היד, שהיה נהוג באותם ימים, קרא "הנה זה מונח", ונתן את הסכום המבוקש! לאחר מכן הילד גאוס קיבל את הכינוי "מוצארט המתמטי".

למעשה, גאוס גילה את הנוסחה לסכום n מספרים עוקבים:

$$1+2+3+4+\ldots+100+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ובעזרתה חישב במהירות את סכום המספרים הטבעיים מ- 1 ועד 100.

בעיות החקר המוצגות במאמר זה נובעות מנוסחה זו.

הצגת הבעיה

יש לשים סימן "+" (פלוס) או "-" (מינוס) בין n מספרים עוקבים, כך שיתקבל מספר מבוקש- s כסכום הסדרה.

$\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10\pm\ \ldots\pm n=S$

כדי לחקור את הבעיה נתחיל ממקרה פרטי. לאחר שנאפיין את אפשרויות הפתרון במקרה הפרטי, ננסה לעשות שינוי קטן במקרה הפרטי, ולראות אם הפתרונות שמתאימים למקרה הפרטי, מאפיינים גם פתרונות של מקרים אחרים.

$$\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10\pm\ \ldots\pm n=S$$

חקירת מקרים פרטיים

האם אפשר לשים סימן " + " (פלוס) או " - " (מינוס) בין המספרים 1 – 20, כך שסכום הסדרה יהיה $S=0$?

כלומר:

$$\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10\pm\ \ldots\pm20=0$$

פתרון: נחלק את 20 המספרים ל- 5 רביעיות. בכל רביעייה נסדר את הסימנים כך (+, - , - , +) או כך (-, +, +, -). בדרך זו כל רביעייה תתאפס וסכום כל חמש הרביעיות יהיה 0.

לדוגמה : (+ 1- 2 - 3 + 4 = 0)

או (-1 + 2 + 3 - 4 = 0) .

נערוך את אותה הבדיקה לשורות מספרים עוקבים אחרות: בשורת המספרים 1 – 19 נאפס את המספרים 1,2,3 כך (1 + 2 - 3 = 0) או כך (-1 - 2 + 3 = 0) ולאחר מכן נשארו 4 רביעיות של מספרים עוקבים שניתן לאפס בשיטה שהוצגה לעיל.

במקרה של 18 מספרים עוקבים לא נצליח לאפס את הביטוי, כי מתוך המספרים הטבעיים העוקבים מ- 1- 18 יש בדיוק תשעה זוגות של צמדים זוגי ואי-זוגי שסכומם הכולל אי-זוגי, ולכן כל קומבינציה של סימנים תייצר סכום אי-זוגי שאיננו יכול להיות 0.

עבור המספרים 1–17 נקבל שמונה זוגות של צמדים זוגי ואי-זוגי, כלומר, מספר זוגי של צירופים שסכומם הכולל זוגי, ומספר אי-זוגי נוסף. לכן, הסכום הכולל הוא אי-זוגי ואינו יכול להיות 0.

בשלב זה **ננסה להכליל את הבעיה** ולבדוק:
באילו מקרים ניתן להביא סדרות של מספרים עוקבים לסכום 0, על-ידי פיזור סימני חיבור או חיסור בין אברי הסדרה.

כעת, לאחר שנבדקו מספר דוגמאות, וראינו שלא תמיד ניתן יהיה להגיע לסכום 0 על-ידי פיזור סימני חיבור או חיסור. ולאחר שגילינו שהדבר תלוי במספר האחרון בסדרה, שהוא, למעשה, מציין את מספר איברי הסדרה, ננסה להכליל כל דוגמה ולברר מה צריך להיות המספר האחרון בסדרה (או מהו מספר האיברים בסדרה) כדי שסכום הסדרה יתאפס על-ידי שיבוץ סימני חיבור וחיסור.

הכללת המקרים הפרטיים

השיטה המרכזית שעבדנו איתה הייתה להגיע לסכום 0 על-ידי איפוס רביעיות של מספרים. החלטנו לחלק את כל המספרים ל- 4 קבוצות של מספרים, כך שלגבי כל קבוצה נוכל לקבוע מראש אם אפשר יהיה להגיע לסכום 0, כשהמספר האחרון בסדרה מציין גם את מספר אברי הסדרה.

בקבוצה זו תמיד אפשר להגיע לסכום 0, כי תמיד נוכל לסדר את אברי הקבוצה ברביעיות, כשבכל רביעייה נסדר את סימני החיבור והחיסור כך: (+, -, -, +) או (-, +, +, -). (ראו את דרך הפתרון של בעיה א.)

הקבוצה הראשונה: $n = 4k$ **(כפולות של 4)**
$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 + ... \pm 4 \cdot k = 0$$

הקבוצה השנייה: $n = 4k + 1$ **(מספרים שגדולים ב- 1 מכפולות של 4)**
$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 + ... \pm (4k + 1) = 0$$

מקרה זה הוא הכללה של המקרה שהיו בו 17 איברים בסדרה.

הקבוצה השלישית: $n = 4k + 2$ **(מספרים שגדולים ב- 2 מכפולות של 4)**
$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 + ... \pm (4k + 2) = 0$$

מקרה זה הוא הכללה של המקרה שהיו בו 18 איברים בסדרה. בשני מקרים אלה נצליח להראות שתמיד נקבל סכום איי-זוגי, ולכן לא נוכל לאפס את הסדרה.

הקבוצה הרביעית: $n = 4k + 3$ **(מספרים שגדולים ב- 3 מכפולות של 4)**
$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 + ... \pm (4k + 3) = 0$$

מקרה זה הוא הכללה של המקרה שהיו בו 19 איברים בסדרה. במקרה זה "נאפס" את שלושת המספרים הראשונים כך : (3 – 2 + 1) או (3 + 2 - 1-) . את שאר המספרים נחלק לרביעיות ונאפס על-פי השיטה לאיפוס רביעיות.

לאחר שהגענו להכללות אלו, נוכל לחזור אל הבעיה הרחבה יותר שהוצגה בהתחלה כבעיית החקר.

חקירת בעיית החקר המרכזית

נסמן ב- S את הסכום שיכול להיות מספר כלשהו (n הוא מספר טבעי כלשהו):

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm 7 \pm 8 \pm 9 \pm 10 \pm \ldots \pm n = s$$

האם אפשר לרשום סימני " + " או " - " בין איברי הסדרה, כך שיתקבל הסכום S (מספר כלשהו) ?
האם S יכול להיות כל מספר?

בחלק הקודם ראינו שלא תמיד אפשר לאפס את סכום איברי הסדרה, אלא רק במחצית מהמקרים. **נשאלת השאלה מה קורה אם נרצה להגיע למספר אחר, שונה מ- 0 ?**

בשאלה זו נחקור את הקשר שבין המספר האחרון בסדרה, שהוא מספר איברי הסדרה, לבין המספרים שאפשר לקבלם כסכום איברי הסדרה.

גם כאן נחלק את כמות המספרים לאותן 4 הקבוצות שחילקנו קודם:

$$n=4\cdot k,\quad n=4\cdot k+1,$$
$$n=4\cdot k+2,\quad n=4\cdot k+3$$

בכל הפתרונות נתייחס למספר האיברים המינימאלי שיתאים ל- **S** (הסכום המבוקש).

כל רביעייה שתתווסף ניתן יהיה לאפס אותה, כפי שנהגנו במקרים הקודמים, ואז נישאר עם הסכום S.

נחקור את הבעיה על-ידי חלוקת הסדרות לארבע קבוצות, על-פי מספר האיברים שבכל קבוצה.

$$\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10\pm\ ...\pm n = s$$

הקבוצה הראשונה: $n=4k$ **(כפולות של 4)**

$$\pm1\pm2\pm3\pm4+...\pm4\ \ k = s$$

נשאלות השאלות - עבור איזה $S\le 4\cdot k$ הדבר אפשרי? וכיצד יש לפזר את סימני החיבור והחיסור?

הפעם נשתמש בנוסחת גאוס. מהצבה בנוסחה אפשר לראות שסכום הסדרה שיתקבל הוא תמיד מספר זוגי (מכפלה של מספר זוגי במספר אי-זוגי):

$$1+2+3+4+5+...+4k=s_n=$$
$$=\frac{(4k)\quad(4k+1)}{2}=2k(4k+1)$$

כלומר, הסכום (S) האפשרי הוא רק מספר **זוגי**. קיימות שתי אפשרויות:

האפשרות הראשונה היא שהמספר S הוא כפולה של 4. כלומר, שייך לתבנית $4i$, (i - הוא מספר טבעי כלשהו.)

נתבונן בשוויון :

$$\pm1\pm2\pm3\pm4\pm...\pm4k=S=4i$$

בשלב הראשון נאפס את המספרים (1,2,3) כך: (3 – 2 + 1) או (3 – 2 – 1-) . בשלב זה נישאר עם מספר אי-זוגי של איברים בסדרה שאינם מאופסים. אחד מהאיברים שווה לסכום המבוקש (והוא גם כפולה של 4), כי דרשנו $S\le 4k$.

מאחר שבהתחלה מספר האיברים היה כפולה של 4, מספר האיברים ללא השלושה שאופסו, וללא האיבר ששווה לסכום המבוקש, גם הוא כפולה של 4. את האיברים אפשר לסדר ברביעיות של מספרים עוקבים, שאפשר לאפס אותם בדרך שאיפסנו בבעיה א. לאחר איפוס הרביעיות נישאר רק עם המספר $4i$ השווה ל- S .

האפשרות השנייה היא, שהמספר S שייך לתבנית $(4i+2)$ (i- הוא מספר טבעי כלשהו), כלומר, S הוא מספר זוגי שבחלוקתו ל- 4 נשארת שארית 2.

נתבונן בשוויון: $\pm1\ \pm2\pm3\pm4\pm...\pm4k=S=4i+2$

בשלב הראשון נאפס את המספרים (1,2,3) כך: (3 – 2 + 1) או (3 – 2 – 1-).

אחד המספרים בסדרה שווה ל- S. "מתעלמים" ממספר זה, ומאפסים את ארבעת המספרים הסמוכים ל- S (שני המספרים הקודמים לו ושני המספרים העוקבים לו בסדרה), ולאחר מכן מאפסים את שאר הרביעיות.

לדוגמה:

$$\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10\pm11\pm12\pm13\pm14\pm15\pm16=S=10$$

לאחר איפוס שלושת המספרים הראשונים, מאפסים את 8,9,11,12 כך:

8 - 9 = -1

-11 + 12 = 1

-1 + 1 = 0

$$(1+2-3)+(4-5-6+7)+8-9+(10)-11+12+(13-14-15+16)=S=10$$

וכך יתקבל הסכום 10.

גם כאן נשאלות השאלות - עבור איזה $S \le 4k+1$ הדבר אפשרי? וכיצד לפזר את סימני החיבור והחיסור? בהצבה בנוסחת גאוס אפשר לראות שסכום הסדרה שיתקבל הוא מספר אי-זוגי (מכפלה של מספר אי-זוגי במספר אי-זוגי):

הקבוצה השנייה - מספר האיברים בסדרה שייך לקבוצה: $n=4K+1$, (K- הוא מספר טבעי כלשהו). $\pm1\pm2\pm3\pm4+...\pm(4k+1)=S$

כלומר, במקרה זה, הסכום האפשרי הוא רק מספר **אי- זוגי**. קיימות שתי אפשרויות:

$$1+2+3+4+5+...+4k+1=s=n$$

$$=\frac{(4k+1)\quad((4k+1)+1)}{2}=(4k+1)(2k+1)$$

האפשרות הראשונה היא שהמספר S שייך לתבנית $(4i+1)$ כאשר i הוא מספר טבעי כלשהו (התבנית מייצגת מספר גדול ב- 1 מכפלה של 4).

נסביר את התהליך בעזרת דוגמה: נניח שמספר האיברים בסדרה הוא מספר גדול ב- 1 מכפלה של 4, (לדוגמה 9 איברים). כלומר, 9 הוא המספר האחרון בסדרה, ונרצה לקבל סכום שהוא מספר מצורת $(4i+1)$ - למשל 5. נבצע את הפעולות הבאות:

בסדרה, לפני המספר ששווה ל- S (בדוגמה שלנו – 5) יש מספר שלם של רביעיות (כי הרי הוא משאיר שארית 1 בחלוקה ל- 4). מאחר ובכל הסדרה יש כמות איברים גדולה ב- 1 מכפלה של 4, הרי שגם אחרי המספר ששווה ל- S (בדוגמה שלנו- 5) קיים מספר שלם של רביעיות. את כל הרביעיות האלו אפשר לאפס באחת משתי הדרכים שאיפסנו קודם את הרביעיות, כך שלבסוף יישאר רק המספר השווה ל- S.

האפשרות השנייה היא שהמספר S שייך לתבנית $(4i+3)$ -i הוא מספר טבעי כלשהו (התבנית מייצגת מספר גדול ב- 3 מכפלה של 4).

גם כאן ניעזר בדוגמה להסבר: נניח שמספר האיברים בסדרה הוא מספר גדול ב- 1 מכפלה של 4

למשל , המספר האחרון בסדרה הוא 9. ואנחנו רוצים לקבל סכום שהוא מצורת $(4i+3)$, מספר הגדול ב- 3 מכפולה של 4 (למשל 7). אחד המספרים בסדרה שווה ל- S. "מתעלמים" ממספר זה ומארבעת המספרים הסמוכים לו (שני המספרים הקודמים לו ושני המספרים העוקבים לו בסדרה). לדוגמה, אם הסכום המבוקש הוא 7 "מתעלמים" מהמספרים 5, 6 ומהמספרים 8, 9, את שאר הרביעיות מאפסים.

לאחר איפוס הרביעיות נשארים בדוגמה עם סדרת המספרים הבאה:
$\pm5\pm6\pm7\pm8\pm9=7$. במקרה זה נאפס את 5, 6, 8, 9 בדרך הבאה: 9 + 8 - 6 - 5 +, ונישאר רק עם 7 שהוא גם הסכום.

הקבוצה השלישית - מספר האיברים בסדרה שייך לקבוצה: $n=4k+2$ (K - הוא מספר טבעי כלשהו)

$\pm1\pm2\pm3\pm4......\pm(4k+2)=S$

והשאלות הן עבור איזה $S\le 4K+2$ הדבר אפשרי?
וכיצד לפזר את סימני החיבור והחיסור ?

הצבה בנוסחת גאוס תוביל אותנו למסקנה שהסכום הוא תמיד **אי-זוגי**:

$$S=\frac{(4k+2)\quad[(4k+2)+1]}{2}=(2k+1)\quad(4k+3)$$

גם כאן קיימות שתי אפשרויות.

האפשרות הראשונה היא כשהמספר S שייך לתבנית $(4i+1)$, i - הוא מספר טבעי כלשהו (התבנית מייצגת מספר גדול ב- 1 מכפולה של 4).

כדי לקבל את S מתעלמים בסדרה מהמספר הגדול ב- 1 מ- S (S+1) ומהמספר 1.

מהמספרים הקטנים מ- S ומ- S יוצרים זוגות, על-ידי חיבור המספר הגדול ביותר עם המספר הקטן ביותר (על-פי שיטתו של גאוס), ויוצרים בדרך זו זוגות של מספרים שסכומם הוא (S+ 2) .

כעת מחסרים זוג מזוג עד שמאפסים.

לדוגמה, בסדרה הבאה:

1±2±3±4±5±6±7±8±9±10±11±12±13±14=9

יוצרים את הזוגות:

2 + 9
3 + 8
4 + 7
5 + 6

את המספרים הגדולים מ- $S+1$ אפשר לסדר ברביעיות של מספרים עוקבים, ולאפס בדרך שאיפסנו קודם רביעיות. לכן, נשארים רק עם המספרים 1 ו- $S+1$.
מחסרים מ-$S+1$ את 1 ונשאר המספר S.

האפשרות השנייה היא כשהמספר S שייך לתבנית $(4i+3)$, i - הוא מספר טבעי כלשהו (התבנית מייצגת מספר גדול ב- 3 מכפולה של 4).

כדי לקבל את, S "מתעלמים" משלושת המספרים שבאים אחרי המספר ששווה ל- S $(S+1)$, $(S+2)$, $(S+3)$.

את 1,2 ו- 3 מאפסים (גם אם 3 הוא S ואת שאר המספרים, חוץ מ-$(S+3)$, $(S+2)$, $(S+1)$, מסדרים ברביעיות ומאפסים.

מ- $(S+1)$, $(S+2)$, $(S+3)$ בונים את השוויון הבא: $(S+1)+(S+2)\quad(S+3)=S$. לבסוף נשאר המספר S.

הקבוצה הרביעית - מספר האיברים בסדרה שייך לקבוצה: $n=4k+3$ (K- הוא מספר טבעי כלשהו)

$\pm1\pm2\pm3\pm4......\pm4\quad k+3=S$

השאלות הן עבור איזה $S\le 4K+3$ הדבר אפשרי?
וכיצד לפזר את סימני החיבור והחיסור?

הצבה בנוסחת גאוס תוביל אותנו למסקנה שהסכום הוא **זוגי**:

$$S=\frac{(4k+3)\quad[(4k+3)+1]}{2}=(4k+3)\quad(2k+2)$$

גם כאן קיימות שתי אפשרויות.

האפשרות הראשונה היא כשהמספר S שייך לתבנית $(4i)$ -i הוא מספר טבעי כלשהו (התבנית מייצגת מספר שהוא כפולה של 4).

מציבים לפני המספר 1 מינוס, ולפני המספר 2 פלוס, והתוצאה המתקבלת היא פלוס 1. מחברים אליו את המספר $S-1$ והסכום המתקבל הוא S. את כל שאר המספרים אפשר לסדר ברביעיות שאפשר לאפס אותן.

האפשרות השנייה היא כשהמספר S שייך לתבנית $(4i+2)$ -i הוא מספר טבעי כלשהו (התבנית מייצגת מספר גדול ב- 2 מכפולה של 4). במקרה זה "מתעלמים" מהמספרים: S-1 , S , $S+1$. מספר האיברים שנשארו הוא כפולה של 4, ולכן אפשר לסדר אותם ברביעיות ולאפס אותן.

עם שלושת המספרים ש"התעלמנו" S -1, S, S+1 מבצעים את התרגיל הבא: S =(S+1) + S - (S-1) + ומקבלים את הסכום המבוקש.

סיכום, מסקנות, מה עוד ניתן לחקור בעתיד?

לאחר פתרון בעיית החקר, נוכל להסיק כי: נוח לחלק פתרון לחלקים כדי למצוא חוקיות; קל ונוח להתחיל במקרה פרטי, ולאט לאט להתקדם לנושא כללי יותר ויותר.

לאחר שמצאנו דרך לפתרון הבעיה הכללית, נוכל להשתמש בדרך זו למקרים פרטיים או לבעיות דומות.

לדוגמה: בעיה נוספת מסדרת "בעיית גאוס" שמתקשרת לבעיה הקודמת:

האם אפשר לרשום סימני " + " או " - " בין המכפלות כך שסכום המכפלות שיתקבל יהיה אפס?

$\pm1\times2\pm2\times3\pm3\times4+4\times5+5\times6+6\times7\pm7\times8\pm8\times9=0$

נסו לחקור את הבעיה, היעזרו בשלבים שחקרנו בעזרתם את הבעיה הקודמת.

מקורות

http://web.macam.ac.il/~kobie/math/gaus%20site.htm

קורות חייו של גאוס קרל פרידריך (1777- 1855).

עריכת הנושא: רותי יסינגר.

קרל פרידריך גאוס. מאמר בוויקיפדיה

http://he.wikipedia.org/w/index.php?title=%D7%A7%D7%A8%D7%9C_%D7%A4%D7%A8%D7%99%D7%93%D7%A8%D7%99%D7%9A_%D7%92%D7%90%D7%95%D7%A1&oldid=6665081

Quantum Magazine (Russia)

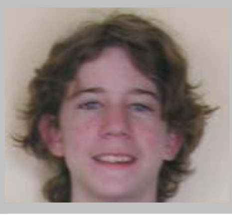
על מחברי המאמר:

ד"ר פיטר סומובול

מורה למתמטיקה בביה"ס אשל הנשיא. מרצה למתמטיקה במכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי בבאר-שבע ובאוניברסיטת בן גוריון בנגב. עוסק בהוראת המתמטיקה לילדים מחוננים, הוראת מתמטיקה באמצעות בעיות חקר וגילוי, תחרויות מתמטיות ופיתוח חשיבה מתמטית, חשיבה ביקורתית וחשיבה יצירתית.

Pet12@012.net.il

אוריאל רוזן



תלמיד כיתה ט' בבית ספר "אשל הנשיא". גר ביישוב להבים.

orielr@nana10.co.il

רועי יוסיבאש

תלמיד כיתה ט' בבית ספר "אשל הנשיא". גר ביישוב להבים.

royeeyosibash@walla.com