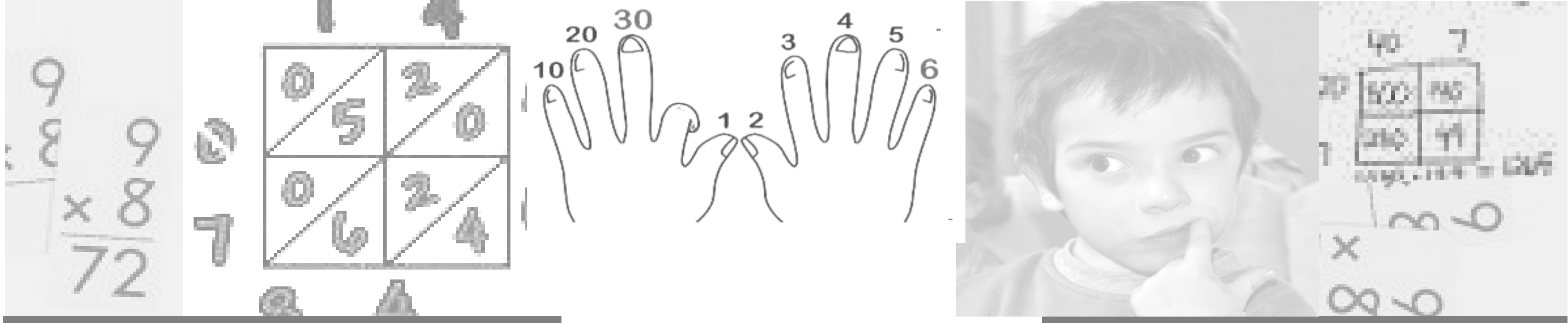


מי צריך את לוח הכפל? האם אפשר לזרוק אותו?

ג'רי רוזן

לפני כשנה הועבר בדואר האלקטרוני סרטון המציג את "שיטת הכפל האתיופית". למרות שלמרבית העוסקים במתמטיקה ובחינוך מתמטי השיטה הייתה מוכרת כ"שיטה המצרית", הפצת הסרטון זכתה להתלהבות רבה ומורים רבים הזכירו את השיטה בהשתלמויות והראו את השיטה לתלמידיהם. רבים מהמורים והתלמידים גם העלו את השאלה- מדוע השיטה עובדת?

כמו תמיד, כשעלתה שאלה כזו פנינו לג'רי וביקשנו שיכתוב הסבר לשיטה שנוכל לפרסם אותו לשימוש המורים במספר חזק 2000. ושוב, כמו תמיד, ג'רי "הרים את הכפפה" ושלח מאמר בנושא. ג'רי עוד הרחיב את היריעה וקישר את ההסבר להצגת מספרים בשיטה הבינארית. מאחר ובגיליון 15 של מספר חזק 2000 פרסמנו את מאמרו של ג'רי העוסק בגופים שיש להם קשר למספר 60, (גם הוא מאמר ש"נתפר" עבורנו לפי הזמנה), החלטנו לדחות את פרסום המאמר על שיטות הכפל לגיליון 16.

חשבנו גם ביחד עם ג'רי שחשוב לקשר את המאמר לחלקים ממאמר אחר שפורסם לפני מספר שנים על-ידי ג'רי ועסק בשימוש באצבעות להצגת המספרים בשיטה הבינארית.

לצערינו, נאלצנו להפרד מג'רי בתחילת הקיץ האחרון. לא העלינו על דעתינו שנצטרך להביא את הרעיון לידי סיום ללא ג'רי. עשינו כמיטב יכולתנו ואנו מקווים שתמצאו שימוש ותהנו מהשורות האחרונות שג'רי כתב עבור קוראי מספר חזק 2000.

לקורא את כותרת המאמר בוודאי נדמה, במבט ראשון, שהנה שוב עולה "אמירה מודרנית", שבבסיסה האמונה שאדם החי במאה ה- 21 יכול להשתמש במחשבון, ואינו צריך לבצע חישובים, ולכן אינו צריך לדעת אלגוריתמים. לא לכך כוונתי. אינני מתכוון לשחרר את הקוראים מביצוע חישובים, אולם בכוונתי להציג דרך לחישוב כפולות של מספרים גדולים, ללא ידיעה של כל עובדות הכפל הבסיסיות. כל מה שנחוץ הוא:

- לדעת לחבר כל מספר לעצמו.
- לחבר מספרים.
- לבטא מספרים כסכום של חזקות של 2 :

(1, 2, 4, 8 ..), שהוא בעצם ייצוג של מספר בעזרת שתי הספרות 0 ו- 1 בלבד, כלומר, ייצוג בינארי.

לצורך ביצוע כפל של שני מספרים גדולים נצטרך לייצג את אחד מהם כסכום של חזקות של 2.

נציג, לדוגמה, כיצד נכפול את 123 ב- 17.

נבחר לייצג את 17 כסכום של חזקות של 2 (נוח לבחור בו כי הוא הקטן מבין שני המספרים).

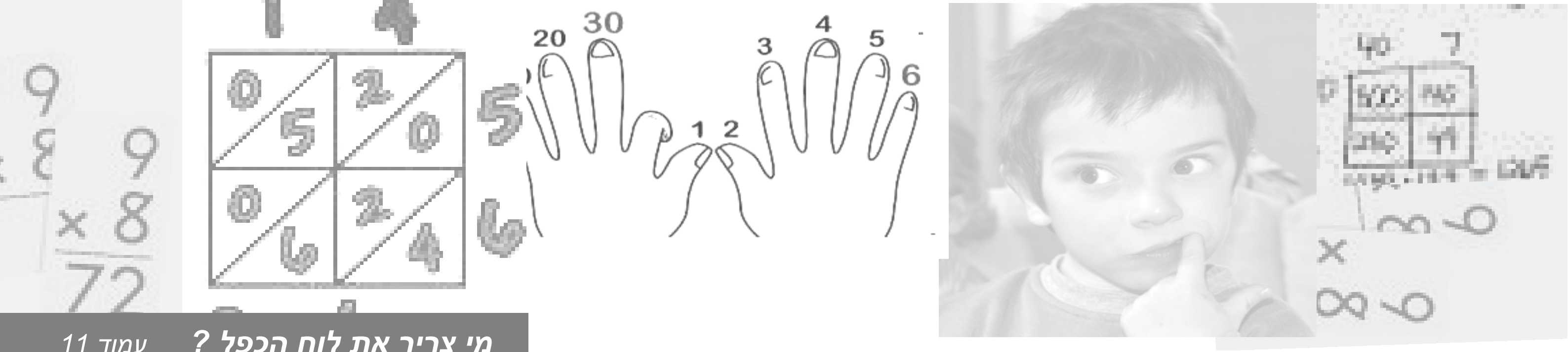
17 = 16 + 1

הייצוג הבינארי של 17 כסכום של חזקות של 2 הוא:

$$1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0$$

ובייצוג בינארי המספר 17 ייראה כך: 10001

אפשר גם לייצג כל מספר בינארי בעזרת האצבעות. אצבע מורמת תחשב כ- 1 ואצבע מקופלת כ- 0.



(ראו הסבר לשיטה בעמוד 14)
עכשיו נפנה לשלב החישובים:
נזכור שאנו מחשבים את המכפלה: 123 x 17

נרשום	נחשב
123	1 x 123
246	2 x 123 = 123 + 123
492	4 x 123 = 246 + 246
984	8 x 123 = 492 + 492
1968	16 x 123 = 984 + 984

טבלה 1

מאחר והמספר 17 בנוי מפעם אחת 2^4 ועוד פעם אחת 2^0, נמחק את השורות המייצגות את החזקות של 2, המיוצגות במספר 17 על-ידי 0 כשומר מקום.
נביט על הייצוג הבינארי של המספר 17: כאשר השורה מיוצגת ב- 1 נשאיר אותה, וכאשר השורה מיוצגת ב- 0 נמחק אותה.

חזקות של 2	ייצוג בינארי של המספר 17	נרשום	נחשב
2^0	1	123	1 x 123
2^1	0	246	2 x 123 = 123 + 123
2^2	0	492	4 x 123 = 246 + 246
2^3	0	984	8 x 123 = 492 + 492
2^4	1	1968	16 x 123 = 984 + 984

טבלה 1א

נחבר את המספרים בשורות שלא נמחקו ונקבל את המכפלה של 17 ב- 123: 2091 = 123 + 1968.

פירוק הגורם 17 לחזקות של 2, והפעלת חוק הפילוג בכפל, מבהיר את הפעולה:

123 x **17** = 123 x (**16**+**1**) =
123 x **16** + 123 x **1** =
1968 + 123

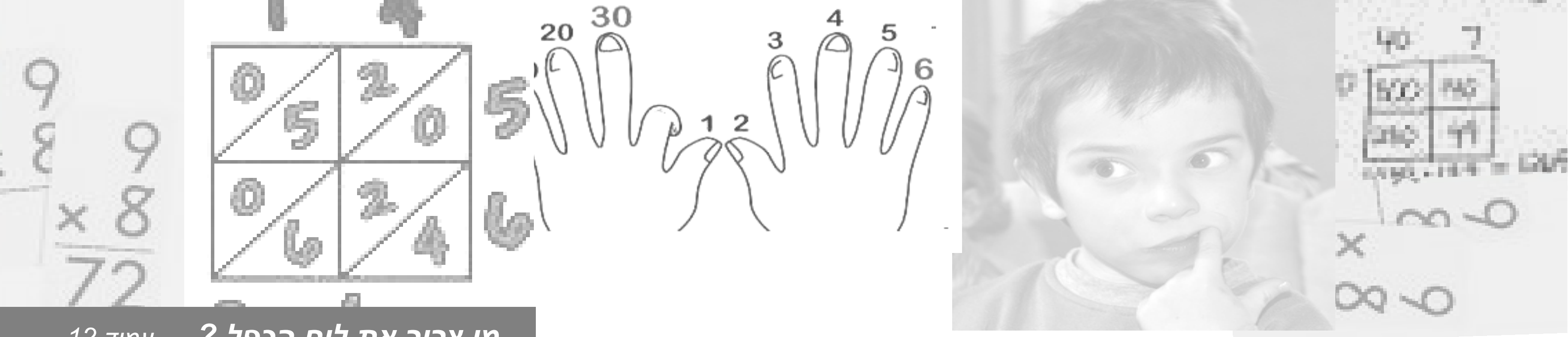
בחישוב שביצענו פירקנו את הגורם הקטן לחזקות של 2, ואילו בגורם הגדול יותר השתמשנו לחיבור. כמובן, שניתן לבצע את הכפל גם כשאנו מחליפים את תפקידי הגורמים.
אם נבטא את 123 בעזרת חזקות של 2 נקבל:
123 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1
בייצוג בינארי סכום זה יוצג כך:

$$1\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$$

והמספר 123 בייצוג בינארי ייראה כך: 1111011.
עכשיו נפנה לשלב החישובים:

חזקות של 2	ייצוג בינארי של המספר 123	נרשום	נחשב
2^0	1	17	1 x 17
2^1	1	34	2 x 17 = 17 + 17
2^2	0	68	4 x 17 = 34 + 34
2^3	1	136	8 x 17 = 68 + 68
2^4	1	272	16 x 17 = 136 + 136
2^5	1	544	32 x 17 = 272 + 272
2^6	1	1088	64 x 17 = 544 + 544

טבלה 2



נביט על הייצוג הבינארי של המספר 123: כאשר השורה מיוצגת ב- 1 נשאיר אותה, וכאשר השורה מיוצגת ב- 0 נמחק אותה.

חזקות של 2	ייצוג בינארי של המספר 123	נרשום	נחשב
2^0	1	17	1 x 17
2^1	1	34	2 x 17 = 17 + 17
2^2	0	68	4 x 17 = 34 + 34
2^3	1	136	8 x 17 = 68 + 68
2^4	1	272	16 x 17 = 136 + 136
2^5	1	544	32 x 17 = 272 + 272
2^6	1	1088	64 x 17 = 544 + 544

טבלה 2א

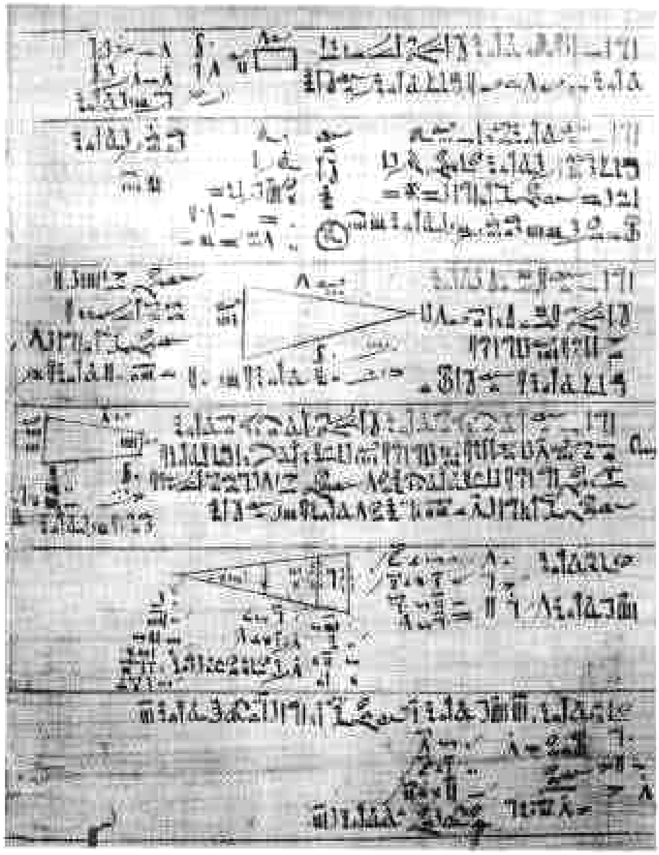
נחבר את כל השורות בהן הייצוג הבינארי של המספר הוא 1 :

17 + 34 + 136 + 272 + 544 + 1088 = 2091

על-פי חוק הפילוג:

123 x 17 = (**64** + **32** + **16** + **8** + **2** + **1**) x 17 =
64 x 17 + **32** x 17 + **16** x 17 + **8** x 17 + **2** x 17 +
1 x 17 =
1088 + 544 + 272 + 136 + 34 +17 = 2091

בשיטה זו השתמשו במצרים העתיקה, ובעזרתה ביצעו חישובים בזמן בניית הפירמידות. השיטה תועדה בפפירוס אחמס משנת 1600 לפנה"ס. את הפפירוס, שנקרא פפירוס ריינד אפשר לראות במוזיאון הבריטי. הפפירוס נקרא על שמו של ריינד שחקר בשנת 1858 את המתמטיקה במצריים העתיקה.



איור 1: פפירוס ריינד

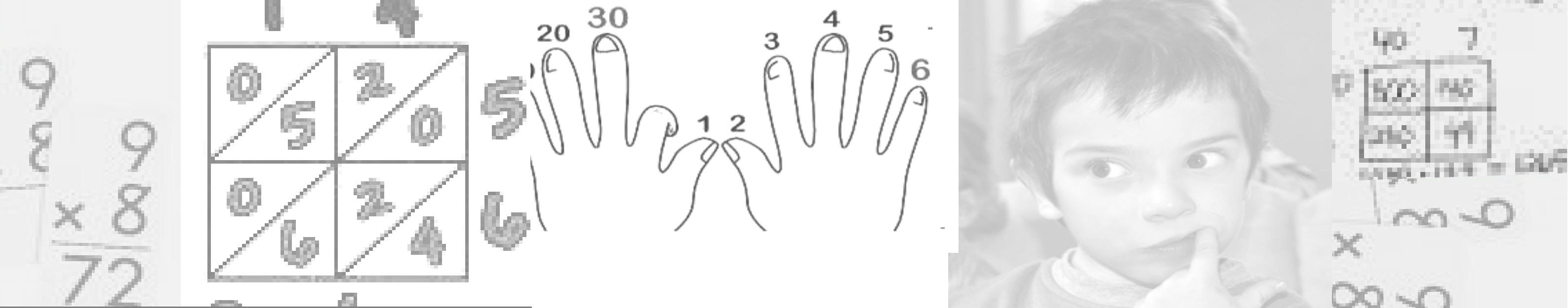
כיצד משתמשים בשיטה שהצגנו לחילוק ?

כידוע, כפל מספרים טבעיים גדולים מ- 1, הוא קיצור דרך של חיבורים רבים של אותו המספר. באותו אופן חילוק מספרים טבעיים גדולים מ- 1, הוא קיצור דרך של חיסורים רבים של אותו המספר, והשארית היא המספר שנשאר, כאשר לא ניתן לחסר אותו בלי להיכנס למספרים השליליים. הסופרים המצרים ידעו שחילוק היא פעולה הפוכה לכפל ולכן כדי לחשב חילוק הם פעלו בדרך הבאה. לדוגמה בתרגיל:

2100 : 123 =

הם ניסו למצוא את המספר החסר במשוואה:

123 x _______ + _____ = 2100



השיטה היא למצוא את המכפלות של 123 כמו קודם:

חזקות של 2	**ייצוג בינארי של המספר 123**	**נרשום**	**נחשב**
2^0	1	123	123 x 1
2^1	0	246	123 x 2 = 123 + 123
2^2	0	492	246 x 2 = 246 + 246
2^3	0	984	492 x 2 =492 + 492
2^4	1	1968	984 x 2 = 984 + 984

טבלה 3

את החישוב מפסיקים כשמגיעים לסדר הגודל של המחולק.

בשלב זה מחפשים בעמודת התוצאות (השנייה משמאל) צירוף מספרים שסכומם הוא הקרוב ביותר למחולק. כלומר, ל- 2100 במקרה שלנו.

הצירוף שנבחר הוא:

1968 + 123 = 2091

את כל אחד משני המחוברים ניתן לבטא כמכפלה של 123 בחזקה של 2 (על-פי הטור הימני בטבלה).

נקבל את התרגיל:

16 x 123 + **1** x 123 + 9 = 2100

17 x 123 + 9 = 2100

כלומר: 2100 : 123 = 17 (שארית 9)

על מחבר המאמר:

ג'רי (גרשון) רוזן ז"ל

M.A במתמטיקה. היה מורה כ- 40 שנה, מתוכן כ- 30 שנה בבית-חינוך גליל מערבי ו- 10 שנים באנגליה.
תלמידיו היו מכל הגילאים: ילדי גן, יסודי, תיכון, מורים וסטודנטים באוניברסיטה. כתב הרבה חומרי למידה, בין השאר חוברות הגיאומטריה של "חוליות" בהוצאת מכון ויצמן, ופעילויות "חומשי" - רוח המתמטיקה" שהתפרסמו במקומות שונים. הופיע בכנסים בינלאומיים ופרסם מאמרים בארץ ובעולם בנושאים שונים הקשורים להוראת המתמטיקה.

מקורות לשיטות שונות לחישוב מכפלות:

http://www.angelfire.com/in/marmtek/MathTricks.html

http://highmath.haifa.ac.il/index.php?option=com_content&task=view&id=318

http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.peasant.html

http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/weekly_present/sites28.htm

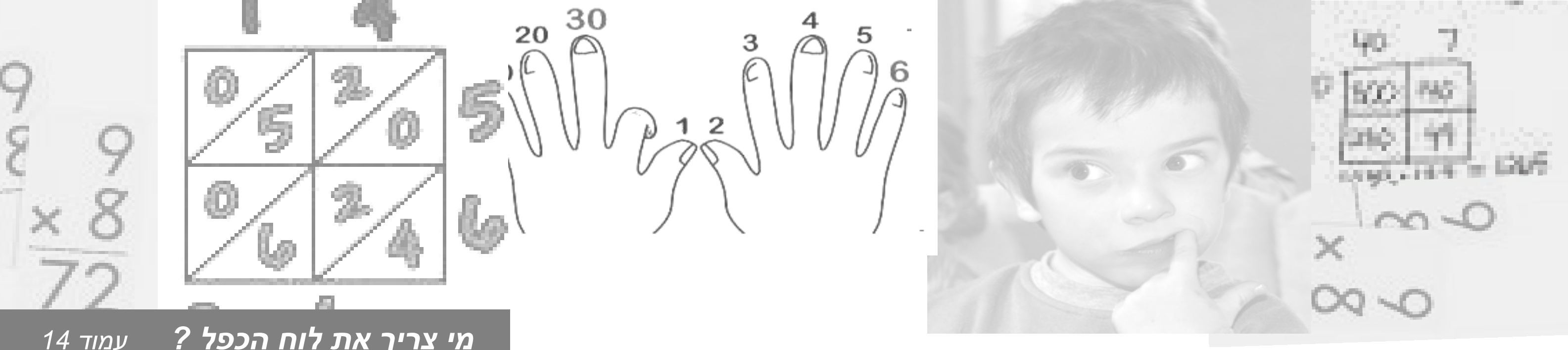
http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/mispar_chazak/4/azhari.pdf

http://www.youtube.com/watch?v=kZKOPKIHsrc

http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/mispar_chazak/5/multiplication.pdf

http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/mispar_chazak/5/re_gilad(screen120).pdf

http://en.wikipedia.org/wiki/Ancient_Egyptian_multiplication



ייצוג מספרים בינאריים בעזרת האצבעות

ג'רי רוזן

מעובד מתוך המאמר "ככלות הכל אין אלו אלפיים" שפורסם בביטאון מרכז המורים בתל-חי

..." יש לי רק עשר אצבעות לכן אני מסוגל לספור רק עד עשר."

"ככה נראה לך, אבל כל מה שעליך לעשות הוא להביט באצבעות ידך הימנית - כף היד כלפי מעלה. אין צורך ליותר מחמש האצבעות. נו תראה לי את ידך."

הנחתי את יד הימין שלי בשולחן - כף כלפי מעלה.

"עכשיו סגור את האצבעות ליצור אגרוף. בדיוק. זה מייצג אפס או כלום."

"פתח את האגודל בלבד ולהגיד 'אחד'. טוב מאוד! ניתן לאגודל גם את השם אחד וגם הערך אחד."

"תחזיר את האגודל לאגרוף ופתח את האצבע. זאת מייצגת שתיים וגם יש לה את הערך שתיים."

"אתה איתי עד כה?"

"הה, זה קל, אני מניח שהאמה מייצגת שלוש?"

"בדרך כלל אבל לא הפעם. אין לנו צורך באמה עבור שלוש. האגודל לבד הוא אחד, והאצבע לבד היא שתיים, לכן האגודל והאצבע ביחד מייצגות שלוש."

"אה! אני מתחיל להבין. אז האמה לבד מייצגת ארבע ויש לה את הערך ארבע. ואם אני מציג את האמה בלי האצבע והאגודל אני מייצג את המספר ארבע ואני מבין עכשיו איך זה מסתדר עם המספר שקראתי לו "מאה" (אחד-אפס-אפס) ."

"האגודל לבד הוא אחת."

"האצבע לבד היא אחד-אפס שערכו שתיים."

"האמה לבד היא אחת-אפס-אפס וערכה ארבע."

"אז שלוש האצבעות: אמה-אצבע-ואגודל ביחד מייצגות אחד-אחד-אחד וערכן הכולל הוא שבע."

"מצוין!"

"נותרו רק עוד שתי אצבעות. הקמיצה לבד היא אחד-אפס-אפס-אפס בעלת הערך שמונה."

"אני חושב שתפסת."

"וזרת לבד היא אחד-אפס-אפס-אפס-אפס בעלת הערך שש-עשרה."

"עכשיו אני בטוח שתפסת."

"ואחד-אחד-אחד-אחד-אחד - צרוף כל חמש האצבעות ביחד הוא שש-עשרה ועוד שמונה, ועוד ארבע ועוד שתיים ועוד אחד שהם שלושים ואחד" (המספר הגדול ביותר של ימים בחודש. ולכן, אפשר לייצג את התאריך בכל חודש בעזרת האצבעות של יד אחת בלבד), ובעזרת כל האצבעות של שתי הידיים אפשר להגיע לערך אלף עשרים ושלוש שהוא קטן ב- 1 מ- 2^{10}"