אלה תולדות π

מעובד מתוך "שבבים" - עלון מורי מתמטיקה, תיק מס' 1

מהו π?

π מוכר לכולנו כמספר עשרוני.

$$\pi = 3.14159 \; ....$$

אם נחפש, נמצא בספרים ספרות נוספות על אלו הרשומות לעיל. צורתו העשרונית של π חושבה עד לדיוק של כחצי מיליון ספרות אחרי הנקודה העשרונית, וקיימות אינסוף ספרות נוספות.

לפי הידוע כיום, הפיתגוראים (300 – 500 לפנה"ס) היו בין הראשונים אשר בעיה זו הטרידה אותם. קיימים מספרים רבים דוגמת π שאינם ניתנים לייצוג כשבר עשרוני סופי או מחזורי. דוגמה: נתון ריבוע שאורך צלעו מספר יחידות כלשהו, a ייצג אורך זה. אורך האלכסון שלו ייוצג איפוא בעזרת $a\sqrt{2}$ (על-פי משפט פיתגורס), אשר אינו ניתן לייצוג על-ידי שבר עשרוני סופי, כי: $\sqrt{2} = 1.414....$.

$\sqrt{2}$ מופיע כפי שראינו בהקשר לאלכסון ריבוע. באיזה הקשר מופיע π ?

π הוא היחס בין היקף המעגל וקוטרו.

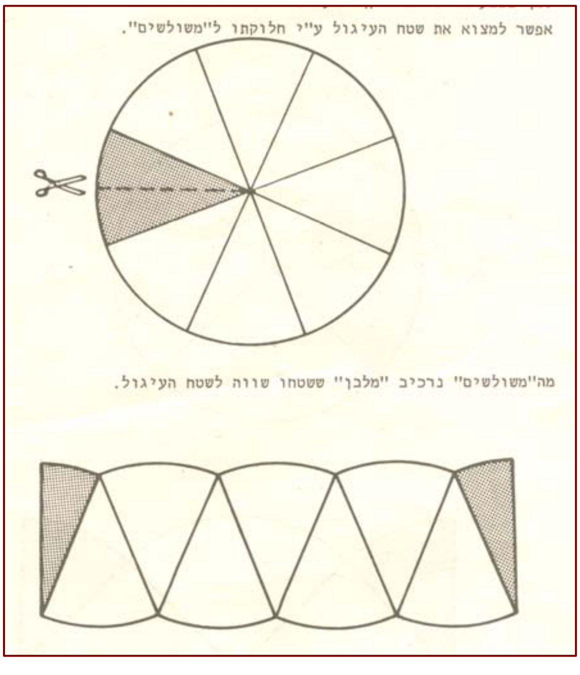
קדמוניות π

בראשית ההיסטוריה הכתובה אנו מוצאים כי הבבלים והמצרים התעניינו בנושאים מתמטיים. היחס הקבוע בין היקף המעגל (H) לבין קוטרו (K) עורר את סקרנותם. הערכים שהתקבלו בתקופה העתיקה עבור יחס זה- π, היו : 3, $3\frac{1}{7}$, $3\frac{1}{8}$.

בנוסף לכך מסתבר שהם שמו לבם גם לעובדה, שהיחס בין שטח מעגל לבין ריבוע הרדיוס שלו, אף הוא שווה ל- π.

עתה אפשר רק לנחש כיצד הגיעו למסקנות אלו ובאילו שיטות חישבו את π. ישנן כמה השערות מעניינות: נוכל לתאר לעצמנו כי שרטטו מעגל בחול, ואז ניסו להקיף אותו בחבל שאורכו כקוטר המעגל. לאחר שהניחו את החבל 3 פעמים נשאר עדיין חלק קטן מההיקף בלתי מכוסה. חלק זה אפשר היה להניח ליד החבל שאורכו כאורך הקוטר כ- 7 או 8 פעמים בערך. בהתחשב במכשירי המדידה ובחומרי העבודה, היו מדידות אלה מדויקות למדי.

בהקשר לשטח המעגל, קיימות תעודות מאוחרות מאד, המרמזות על החומר המקורי בו השתמשו אנשי העולם העתיק, לפיהן אפשר לחשב את השטח על-ידי חלוקת המעגל למספר גזרות שוות (נאמר 8), והרכבת הגזרות מחדש לצורת "מקבילית" או "מלבן".



איור 1 (מתוך: "חוליות" חוברת הנדסה)

אמת, זו אינה מקבילית מדוייקת אך במקורב יהא אורך הבסיס $\frac{H}{2}$. המרחק בין ה"מקבילים" הוא $R=\frac{K}{2}$.

השטח (S) הוא, איפוא $\frac{H}{2}\times R$.

מכאן: $$\pi=\frac{S}{R^2}=\frac{\frac{H}{2}\times R}{R^2}=\frac{H}{2R}=\frac{H}{K}$$

השם π וערכו

אם נאמר כי π הוא היחס בין היקף המעגל לקוטרו, נראה כי אנשי העולם העתיק ידעו על π, אף כי לא סמנו אותו באות π. היחס נכתב במילים: היקף / קוטר.

האות הראשונה של המילה "היקף" ביוונית היא π.

משנת 1737, שנה בה השתמש המתמטיקאי אוילר בסימן π הפך סימן זה להיות מקובל על הכל.

עתה נסקור שיטות בהן חושב π שהן בעלות עניין מרובה.

המצרים

חישוב π מופיע באחת מהתעודות המתמטיות העתיקות ביותר: הפפירוס של אחמס (1550 – 1700 לפנה"ס), בו הועלתה הבעיה הבאה:

נתונה חלקה שצורתה מעגל וקוטרה 9 יחידות
מה שטחה ?

אחמס מציג את הפתרון הבא:

חסר מן הקוטר את חלקו התשיעי ובנה ריבוע על חלקו הנותר של הקוטר. הריבוע יהיה שקול לעיגול. או, בשפה מודרנית, שטח המעגל שווה לשטח הריבוע הבנוי על $\frac{8}{9}$ מקוטרו.

נחשב זאת:

יהא השטח S, הקוטר K , הרדיוס R.. אזי:

$$S=(K-\frac{K}{9})^2=K^2(1-\frac{1}{9})^2=(2R)^2(\frac{8}{9})^2=$$
$$4R^2\frac{64}{81}=R^2\frac{256}{81}$$

מכאן: $$\pi=\frac{256}{81}=3.1605$$

לא ידוע אם המצרים היו סבורים כי שטח העיגול שחישבו בדרך הנ"ל היה מדוייק.

העברים הקדמונים

על הערך 3 עבור π כבר נרמז בציטוט הבא מדברי הימים ב' ד/ב':

"ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו אל שפתו עגול סביב וחמש באמה קומתו וקו שלושים באמה יסוב אותו סביב" .

הערך 3 הנקוב כאן עבור π, השפיע כנראה על עורכי המשנה והתלמוד, מאחר והם רשמו ערך זה, וזאת אף על פי שערכים מדויקים הרבה יותר, כגון $3\frac{1}{7}$ היו ידועים בתקופתם.

ארכימדס

ארכימדס, המדען היווני (287– 212 לפנה"ס) הוא האיש שתרם תרומה מכרעת לחישוב π. הוא פיתח שיטה שבעזרתה אפשר לחשב את π בצורה מדויקת כרצוננו בתנאי שנאריך ימים ושנים! הוא עצמו עסק בחישובים המייגעים עד שהגיע לערך $3\frac{1}{7}<\pi<3\frac{10}{71}$. בספרו "מדידת העיגול" השתמש ארכימדס בשיטות שהיו ידועות כבר אז, לחישוב היקפים של מצולעים חוסמים וחסומים. על-ידי השוואת ההיקפים של פוליגונים בעלי 6, 12, 24, 48 , ולבסוף 96 צלעות, הצליח "לכלוא" את המעגל ויכול היה לחשב את ערכו של π בדיוק הולך ורב מידי פעם.

בסין, 435 שנה אחרי הספירה, טסו צ'ינג צ'ו, גילה שערכו של π קרוב ל- $\frac{355}{113}$ שהוא $3\frac{16}{113}$.

בתקופה המודרנית

בשיטתו של ארכימדס השתמשו במשך מאות רבות של שנים. אנשים רבים השקיעו זמן רב בחישוב ערכו של π. האחרון לארכימדיאנים היה כנראה ההולנדי לודלף ואן ציילן Ludolph van Ceulen (1539 – 1610 לסה"נ), שהשתמש במצולע בעל 6×2^{29} צלעות וחישב בעזרתו את π בדיוק של 20 ספרות אחרי הנקודה העשרונית. מאוחר יותר שיפר תוצאה זו והגיע לדיוק של 35 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

מיד עם הופעת החשבון הדיפרנציאלי והאינטגראלי במאה ה- 17, הורכבו "נוסחאות אין-סופיות" עבור π.
יש מספר עצום של נוסחאות כאלה, ואנו נביא שתי דוגמאות:

הנוסחה של ג'ון ווליס, John Wallis (1616 – 1703)

$$\pi = 2\times\frac{2^2\times 4^2\times 6^2\times 8^2}{1^2\times 3^2\times 5^2\times 7^2\times 9^2...}$$

הנוסחה של לייבניץ, Leibniz (1646 – 1716)

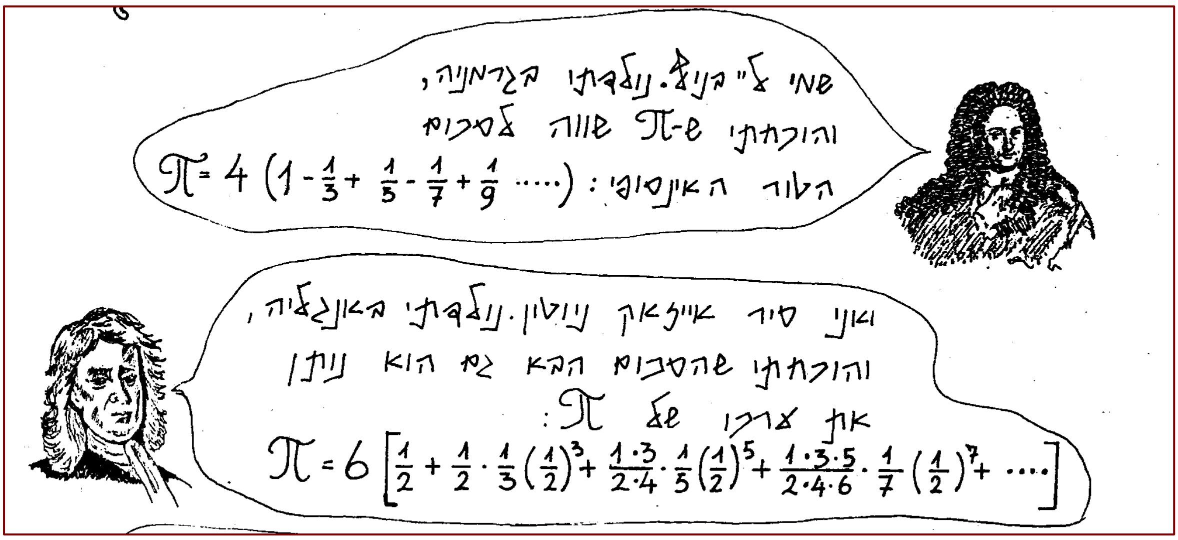
$$\pi = 4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}.....)$$

נוסחאות ידועות נוספות הן של ניוטון (1642 – 1727), של אוילר (1707 – 1783), של לורד ברונקר (1620 – 1684) ושל אחרים נוספים.

לעומת החישובים של ארכימדס ויורשיו שהיו כרוכים ביגיעה רבה והציעו רק קירובים ל- π, היוו נוסחאות אלה ביטוי מדויק של π. נוסחאות אלה אינן פותרות את בעיית חישוב ערכו המספרי של π, וניתן להשוות ביניהן על-פי כמות העבודה הדרושה לחישובו של π עד מספר מסוים של ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

לדוגמה, הטור האין-סופי של לייבניץ הוא כמעט חסר תועלת: שימוש ב- 300 איברים עדיין לא יביא לדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית, בעוד שבטור של ניוטון די ב- 22 איברים כדי לחשב את π עד דיוק של 15 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

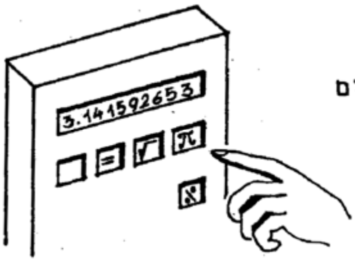
כיום, בעזרת שימוש במחשב, התקצר לאין-ערוך זמן החישוב של ערכי π, וכבר בשנת 1967 חישבו בעזרת מחשב את ערכו של π עד הספרה ה- 500,000 אחרי הנקודה העשרונית.



איור 2 (מתוך "חוליות" חוברת הנדסה)

איור 3 (מתוך "חוליות" חוברת הנדסה)

קירוב ל π בעזרת מחשבון כיס 14



במסגרת למטה רשום קירוב של π ל-310 מקומות אחרי הנקודה העשרונית, ובעיגולים קירובים שונים בצורה של שברים פשוטים. (כאשר במחשבון לא נמצא "כפתור" לערך π משתמשים באחד מהקירובים ל π.)

א) הפוך כל שבר פשוט לשבר עשרוני בעזרת מחשבון, ורשום את התוצאה במסגרת שמתחת לשבר הפשוט.

ב) השווה את התוצאות שקיבלת עם קירוב ל π שבמסגרת מסביב.

ג) איזה שבר פשוט הוא הקרוב ביותר ל π? ____________