



אחוזים וריבוע האחוזים (חלק שני)

מיכאל קורן

תרגילים: פתרו כל תרגיל בשתי דרכים – פעם על-פי משמעות האחוז כאחד למאה, ופעם על-ידי הנוסחה.

1. אורך של כביש היה 15 ק"מ. סללו עוד 7.5 ק"מ. בכמה אחוזים התארך הכביש?
2. לאחר שהגדילו אורך שדרה ב- 250 מטרים, היא גדלה ב- 20%. מה היה אורך השדרה לפני ההגדלה?
3. בנו כתוספת לבית חדר ששטחו 32 מ"ר, ולכן גדל שטח הבית ב- 8%. מה הוא שטח הבית עכשיו?
4. בגביע גבינה של 300 גרם יש 9 אחוזים שומן. כמה גרם שומן יש בגבינה זו?

בגיליון מספר 15 של מספר חזק, 2000 התפרסם חלקו הראשון של המאמר "[אחוזים וריבוע האחוזים](#)". בחלקו הראשון הוצג רעיון ריבוע האחוזים, וכן הובאו שימושים של ריבוע האחוזים להבנת מרכיבי הקשר הבסיסי של מושג האחוז. בגיליון זה יוצג המשכו של המאמר, העוסק ביישומים שונים של מושג האחוז, ויודגם שימוש בריבוע האחוזים ביישומים אלו.

הנחות ומחירים

כאשר יש הנחה של 12%, פירוש הדבר שהמוכר מוותר מכל תשלום של 100 ₪, על תשלום של 12 ₪. מכאן, שעל הקונה לשלם מכל 100 ₪ רק 88 ₪. המחיר עכשיו הוא 88 ₪ מכל 100 ₪, כלומר, המחיר אחרי ההנחה הוא 88% (של המחיר לפני ההנחה). שימו לב שאחוז ההנחה - 12%, ואחוז המחיר החדש - 88%, הם ביחד 100%. מאה אחוזים הם 100 מתוך כל 100, כלומר, הכל. ברור שהמחיר אחרי ההנחה, ביחד עם ההנחה, צריך להיות המחיר הראשון, שכן, על מה שהקונה חוסך, המוכר מוותר.

תרגיל: הודות להנחה של 15% שילמתי עבור החולצה רק 170 שקלים. כמה הייתי משלם ללא ההנחה?

פתרון: מאחר וההנחה הייתה של 15%, המחיר ששילמתי היה 85% של המחיר הרגיל. $(100 - 15 = 85)$. אם 85% הם 170 ₪, אז אחוז אחד הוא 2 ₪ $(170 : 85 = 2)$. אחוז אחד הוא שקל אחד מכל מאה שקלים. כלומר, אם 1% הוא 2 שקלים, אז 100% הם 200 שקלים. מכאן שהמחיר לפני ההנחה היה 200 שקלים.





(כ)מה זה 120% של משהו?

אם ביישוב קהילתי, מספר התושבים עלה מ- 200 ל- 240 בשנה האחרונה, אחוז העלייה הוא 20%, שכן על כל 100 תושבים ביישוב נוספו 20 תושבים. מהו עכשיו אחוז התושבים ביישוב (ביחס למספרם בשנה הקודמת)?
פתרון: 200 התושבים הם 100% של התושבים ביישוב, לפני השינוי, ונוספו 20%, ולכן האחוז כעת הוא 120%. בדיקה: על כל 100 תושבים ותיקים יש 120 תושבים בסך הכול, ולפי הגדרת האחוז, x לכל 100, פירושו $x\%$, ואכן, אחוז התושבים עכשיו הוא 120% (ביחס למספר הוותיקים).

תרגיל לדוגמה: לאחר גידול של 15% יש כעת ביישוב 3450 משפחות. כמה משפחות היו ביישוב לפני הגידול?

פתרון: מספר התושבים כעת הוא 115% של מספרם הקודם. אחוז אחד הוא לפיכך $30 = 115 : 3450$ תושבים. מספרם הקודם היה, לכן, פי 100 מ- 30, כלומר, 3000. בדיקה: 15% של 3000 הם 450 כפול 30 (כי יש 30 מאות ב- 3000, ולכל 100 נוספו 15), מכאן, נוספו אכן 450 משפחות ל- 3000 המשפחות הוותיקות. עכשיו פתרו תרגיל זה בעזרת הנוסחה.

תרגיל: על כל המצרכים בחנות ניתנת עכשיו הנחה של 15%.
 א. השלימו בטבלה הבאה את כל המשבצות החסרות. המחירים הם בשקלים.
 ב. ליהי אומרת שכדי לחשב את המחיר לאחר הנחה של 15% אפשר לכפול את המחיר הרגיל ב- 0.85.
 מה דעתכם? נמקו מדוע ליהי צודקת או מדוע היא טועה.

			330	30	300	200	מחיר רגיל
		15					הוזלה
1785	1700						מחיר חדש
						0.85	יחס בין מחיר חדש למחיר רגיל.

תרגיל: כל המחירים בחנות עלו ב- 25%.
 א. מלאו את הטבלה הבאה.
 ב. עודד אומר שכדי למצוא את המחיר אחרי התייקרות של 25%, אפשר לכפול את המחיר הרגיל ב- 1.25.
 מה דעתכם? נמקו מדוע עודד צודק או מדוע הוא טועה.

			240	40	260	200	מחיר רגיל
		25					הוזלה
950	750						מחיר חדש
						1.25	יחס בין מחיר חדש למחיר רגיל.



אחוזים ויחס ישר

בין אורך צלע של ריבוע לבין היקף הריבוע יש **יחס ישר**.
 כאשר מגדילים את צלע הריבוע פי אחד וחצי (או פי כל מספר חיובי אחר) ההיקף גדל אף הוא פי אותו מספר. אומרים שבין שני גדלים יש יחס ישר, כאשר לכל מספר (בתחום מספרים מסוים) הגדלת אחד הגדלים פי אותו מספר, גורמת להגדלת הגודל השני פי אותו מספר. דוגמאות ליחס ישר הן, למשל: בנסיעה במהירות קבועה, היחס בין משך הנסיעה לבין המרחק; או היחס בין ההתארכות של מוט מתכת לבין עליית הטמפרטורה. כאשר מחשבים אחוזים, קיים יחס ישר, למשל, בין הכמות הבסיסית לבין ערך האחוז – כאשר אחוז השינוי הוא קבוע. נטפל תחילה בדוגמה זו ואחר כך נעבור ליחס ישר נוסף.

תרגיל להדגמת יחס ישר

א. כל המחירים בחנות עלו ב- 27%. מלאו את הטבלה הבאה.

ב. בדקו על-ידי השוואת העמודות של הטבלה, שיש יחס ישר בין המחיר (הכמות הבסיסית) לבין ההתייקרות (ערך האחוז). למעשה, ייתכן שבמילוי הטבלה כבר השתמשתם בעובדה שבגלל, למשל, ש- 225 גדול פי אחד וחצי מ- 150, וכאשר המחיר הוא 150 ההתייקרות היא 40.5, אז ההתייקרות של 225 היא 40.5 כפול אחד וחצי, כלומר, 61.5.

ג. בדקו על-ידי השוואת העמודות של הטבלה, שיש יחס ישר בין המחיר (הכמות הבסיסית) לבין המחיר החדש.

225	150	100	750	500	300	200	מחיר רגיל
							התייקרות
							מחיר חדש

תרגיל: בכמה אחוזים התייקר או הוזל מוצר, אם מחירו עכשיו שווה למחיר הקודם כפול:

א. 1.30
 ב. 0.60
 ג. 1.05
 ד. 0.95
 ה. 1.125

פתרון:

- א. המוצר התייקר ב- 30%.
- ב. המוצר הוזל ב- 40%.
- ג. המוצר התייקר ב- 5%.
- ד. המוצר הוזל ב- 5%.
- ה. המוצר התייקר ב- 12.5%.

איפה זול, איפה יקר?

500.45 ש"ח	1. שופרסל שלי
489.50 ש"ח	2. טיב טעם בעיר
478.74 ש"ח	3. שופרסל ביג
463.68 ש"ח	4. מגה בעיר
462.25 ש"ח	5. טיב טעם





יחס ישר נוסף

המחיר ההתחלתי של כל אחד מהמוצרים בחנות ברשימה זו היה 250 ₪. קבעו את השינוי במחיר (הוזלה או התייקרות) לפי אחוז השינוי. (התייקרות מסומנת על-ידי +, והוזלה על-ידי -, כך 20% - פירושו הוזלה של 20%).

א. מלאו את הטבלה הבאה.

ב. בדקו במספר דוגמאות בטבלה שיש יחס ישר בין המחיר לשינוי.

ג. האם יש יחס ישר בין אחוז השינוי לבין המחיר החדש? (השוו בין עלייה לעלייה, בין ירידה לירידה, ובין עלייה לירידה. האם בכל מקרה מתקבלת אותה תשובה?)

אחוז שינוי	+ 5%	+ 7.5%	-10%	-15%	+ 30%	+ 50%	-50%
שינוי ב- ₪							
מחיר חדש							

שרשרת של שינויים

שהיא 20% של 1200, או ישירות את התשלום אחרי הנחה שהוא 80% של 1200.

מחירים עולים ויורדים שוב ושוב (בעיקר עולים). הערך הכספי של מכונת יורד כל שנה. בסעיף זה נראה איך אפשר לטפל בקלות במקרים של שינויים כאלה.

נמשיך על-פי האחוז אחרי ההנחה:

יש לחשב 80% של 1200, או 80% של 12 מאות, והתשובה היא $8 \times 12 = 960$ שקלים. 40 ₪ הם 4% של 1000. כלומר, אחרי ההנחה משלמים 4% פחות מאשר המחיר לפני התייקרות.

תרגיל לדוגמה: לאחר שהמחיר עלה ב- 20% קיבלתי הנחה של 20%. האם הרווחתי, הפסדתי, או לא היה שינוי, בהשוואה למחיר שהייתי משלם, לו הייתי קונה לפני התייקרות?

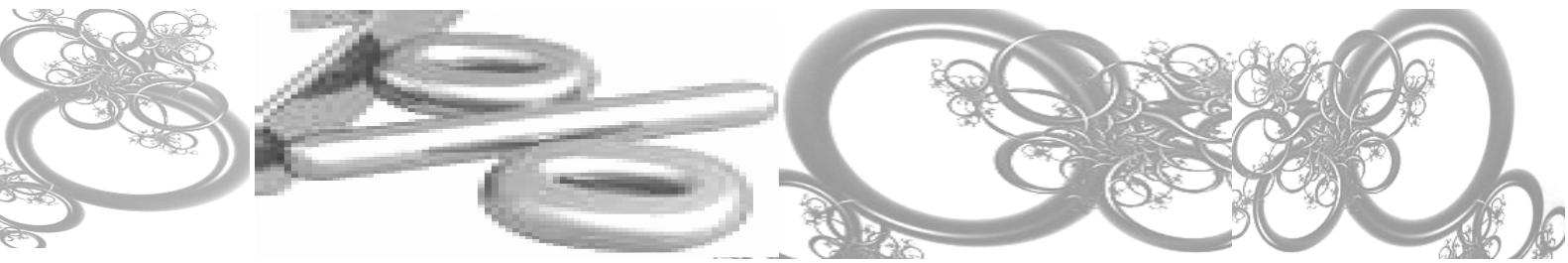
פתרון ג, כללי חישובי: את המחיר לאחר הגדלה ב- 20%, ניתן למצוא על-ידי כפל המחיר ב- 120 וחלוקה ב- 100, או כמו שראינו בדוגמאות קודמות, על-ידי כפל ב- 1.2. (ואכן, לכפול ב- 120 ולחלק ב- 100 זהה לכפל ב- $\frac{120}{100}$). אם x מייצג את המחיר ההתחלתי, אז המחיר

פתרון א, איכותני¹: בחישוב העלייה של 20%, הכמות הבסיסית היא המחיר לפני התייקרות. בחישוב ההנחה, הכמות הבסיסית גדולה יותר – כי היא המחיר אחרי התייקרות. מכאן שההנחה גבוהה מההתייקרות, והמחיר שיש לשלם קטן מהמחיר לפני התייקרות.

החדש הוא 100:120 x, או ברישום אחר: $x \cdot \frac{120}{100}$. כעת יש לחשב את המחיר לאחר הפחתה של 20%, וזאת עושים על-ידי כפל המחיר ב- 80 וחלוקה ב- 100.

פתרון ב על סמך דוגמה (זה כמובן לא פתרון מלא): נניח שהמחיר ההתחלתי היה 1000 ש"ח. לאחר התייקרות, המחיר הוא 1200 ש"ח, וכעת יש לחשב את ההנחה

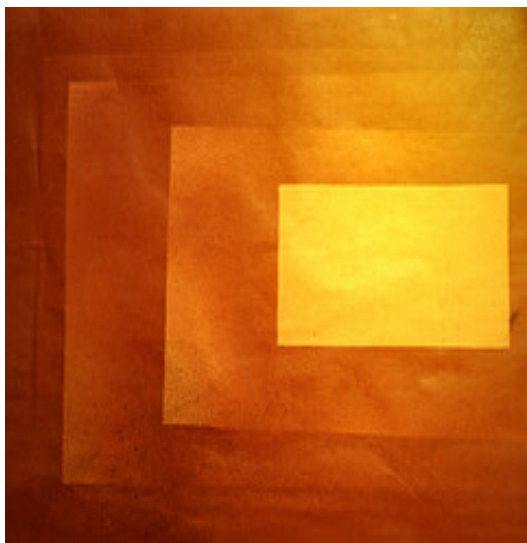
¹ איכותני הוא ההיפך מכמותי, כלומר, שיקולים שאינם מסתמכים על חישובים מספריים. לפעמים קוראים לפתרון כזה איכותי, אך למילה איכותי יש קונטציה חיובית והמילה איכותני חסרת קונטציה חיובית או שלילית.



בשלב הורדת המחיר יש להוריד 20% של המחיר החדש, ולכן יש להוריד 20 תאים (מסומנים בשתי השורות האפורות). נשארות לכן 8 שורות שבהן 80 תאים. מאחר ובכל תא יש, בגלל עליית המחיר, 1.2% של הכמות הבסיסית הראשונה, אז ב- 80 התאים יש $96\% = (80 \times 1.2\%)$ של הכמות הבסיסית (ההתחלתית), או 96% של המחיר ההתחלתי. מכאן שלאחר ההתייקרות וההנחה המחיר לעומת המחיר ההתחלתי ירד ב- 4%.

תרגיל: הגדילו צלע של מלבן ב- 10% ואת הצלע האחרת (המאונכת לראשונה) הגדילו ב- 20%. בכמה אחוזים גדול שטח המלבן החדש משטח המלבן המקורי?

הדרכה: שטח מלבן הוא מכפלת שתי צלעות סמוכות שלו (לעתים נגיד "אורך ורוחב"). הגדלת צלע ב- 10% מגדילה את השטח ב- 10%. הגדלת הצלע הסמוכה ב- 20% מגדילה את השטח ב- 20%. אם נראה לכם נוח לפתור תחילה על-ידי דוגמה מספרית, עברו אחר כך לפתרון כללי.



המחיר אליו יש להתייחס הוא המחיר לאחר ההתייקרות, שהוא $120:100$, ולכן המחיר לאחר ההוזלה הוא $80:100$ [120:100]x. (הסוגריים המרובעים באו רק כדי לסמן את המחיר אחרי ההתייקרות, לגבי החישוב הם אינם מעלים ואינם מורידים). לאחר החישוב נקבל $96:100$. כפי שלמדנו קודם, כפל ב- 96 (וחלוקה ב- 100) מצביע על ירידה של 4%. שימו לב שהירידה היא ביחס ל-x, שהוא המחיר לפני ההתייקרות.

הערות

- א. למרות השימוש ב-x לא מדובר במשוואה שיש לפתור. כל החישובים נעשים ללא התייחסות ל-x. רק הפרשנות של המספרים קשורה ב-x. מובן גם שלא ניתן למצוא את ערכו של x, אלא להפך: החישובים מראים שהמחיר קטן ב- 4%, ללא כל תלות במחיר המקורי.
- ב. בחישובים במחשבון נוח לחשב את 120:100 ואת 80:100 כשברים עשרוניים, ונקבל שהמחיר לאחר ההנחה הוא $0.96 = 0.8 \cdot 1.2$ x כן מדובר בירידה של 4%.
- ג. נדגים את הפתרון האחרון בריבוע האחוזים:

בשלב הראשון נוספו 20%, ולכן בכל תא במקום אחוז אחד של הכמות הבסיסית יש עכשיו 1.2% של הכמות הבסיסית.



דוגמה נוספת: ערך של מכונית ירד בכל שנה ב- 12%.

- א. בכמה אחוזים ירד המחיר לאחר ארבע שנים?
- ב. לאחר כמה שנים יהיה לראשונה ערך המכונית קטן מחצי ערכה המקורי?

פתרון סעיף א: כל שנה המחיר יורד ב- 12% מהמחיר בתחילת אותה שנה, ולכן המחיר החדש הוא 88% של המחיר הקודם. כפי שראינו, אפשר לחשב את המחיר החדש על-ידי כפל ב- 0.88.

לפיכך, כדי למצוא את ערך המכונית לאחר ארבע שנים יש לכפול ארבע פעמים ב- 0.88. אם המחיר הראשוני הוא x , אז המחיר לאחר ארבע שנים הוא: $0.88 \cdot 0.88 \cdot 0.88 \cdot 0.88 \cdot x$

או, מאחר והסוגריים אינם משנים את התוצאה, המחיר לאחר ארבע שנים הוא: $x \cdot 0.88^4 = 0.60 \cdot x$ (0.60) הוא העיגול של תוצאת החישוב לשני מקומות עשרוניים. לכן כתבנו 0.60 ולא 0.6).

כמו שראינו קודם, הכפלת מספר בשבר עשרוני קטן מ- 1, שקולה להקטנתו באחוזים. הכפלה ב- 0.6 שקולה להקטנה ב- 40%, או, כפי שאפשר לראות מיד, להקטנת המספר ל- 60% שלו. מצאנו לכן שלאחר ארבע שנים ערך המכונית ירד ב- 40%.

פתרון סעיף ב: יש למצוא כמה פעמים יש לכפול את 0.88 בעצמו, עד שמגיעים לראשונה למספר קטן מחצי. על-ידי הכפלת 0.88 שוב ושוב במחשבון, נראה שאחרי 6 שלבים מגיעים לראשונה למספר קטן מחצי. מצאנו לכן שאחרי 6 שנים המחיר ירד לראשונה מתחת למחצית המחיר המקורי.

תרגילים

1 א. הגדילו צלע של ריבוע ב- 20% והקטינו את הצלע האחרת ב- 20%. בכמה אחוזים קטן שטח המלבן שנוצר, משטח הריבוע? (השוו את התשובה עם התשובה לשאלה על ההתייקרות וההוזלה ב- 20%).

ב. מה שטח הריבוע, אם ידוע ששטח המלבן קטן ב- 20 סמ"ר משטח הריבוע?

2. ספרייה התכוונה לקנות ספרים (כולם באותו מחיר).

א. בגלל שמחיר כל ספר עלה ב- 15%, הספרייה הקטינה ב- 10% את מספר הספרים שרכשה. בכמה אחוזים גדל או קטן תקציב הקנייה? תשובה: גדל ב- 3.5%.

ב. מה היה התקציב המתוכנן, אם ידוע שהוא גדל ב- 140 ש"ח?





תערובות

נסיים את הפרק בשימוש של אחוזים בתערובות.

תרגילים

1. כמה גרם שומן יש ב- 500 גרם גבינה של 5%? הערה: גבינה של 5% היא גבינה שיש בה 5% שומן.
כמה גרם שומן יש בחבילה (של 250 גרם) גבינה של 9%?
2. כמה סמ"ק שומן יש בליטר חלב של 3%? תזכורת: ליטר מכיל 1000 סמ"ק. הערה: חלב של 3% הוא חלב שיש בו 3% שומן (לפי נפח).
3. ערבבו חצי ק"ג גבינה של 5% עם חצי ק"ג גבינה של 9%. קיבלו (כמובן) קילוגרם אחד של גבינה מעורבת. כמה גרם שומן יש בתערובת? תזכורת: קילוגרם הם אלף גרם. מהו אחוז השומן בגבינה המעורבת?
הדרכה: שימו לב שכמות השומן גדלה, אך גם הכמות הבסיסית גדלה. התשובה לכן איננה 14%.
4. מהו אחוז השומן כשמערבבים שני ק"ג גבינה של 10% עם שלושה ק"ג גבינה של 15%?
5. כשאומרים שחומצה היא בריכוז של 80%, מתכוונים לכך שבנוזל יש 80% חומצה ו- 20% מים. ל- 2000 סמ"ק חומצה של 80% מוסיפים 100 סמ"ק מים. מהו אחוז החומצה שהתקבלה? הדרכה: יש למצוא מהו האחוז של החומצה כאשר כמות המים גדלה מ- 400 סמ"ק ל- 1400 סמ"ק, וכמות החומצה הנקייה נשארה, כמובן, 1600 סמ"ק.
6. בכיתה א 30% בנות. בכיתה א2 45% בנות. בשתי הכיתות אותו מספר תלמידים. מצרפים את שתי הכיתות לקבוצה אחת. מה אחוז הבנות בקבוצה זו?

תרגילים

1. מושבת חיידיקים גדלה כל שעה ב-15%. בכמה אחוזים הא גדלה ביום?
2. בגלל הזדקנות הסביבה, מספר התלמידים בבית ספר מסוים קטן כל שנה ב- 20%. תוך כמה שנים יהיו בבית הספר פחות מרבע מספר התלמידים שיש בו עכשיו?
3. אוכלוסייה של מדינה גדלה כל שנה ב- 2.1%. בכמה אחוזים תגדל האוכלוסייה במשך ארבע שנים?
4. מחיר של מוצר עלה ב- 10%, ירד ב- 20%, עלה ב- 10% וירד ב- 5%. בכמה אחוזים השתנה המחיר, לאחר כל השינויים?

בדוגמה הבאה נראה תכונה חשובה של שינויים בשרשרת באחוז קבוע.

תרגיל: ערך של נכס יורד כל שנה באותו אחוז. אם בחמש שנים ירד הערך לחצי, בכמה שנים ירד הערך לרבע (של ערכו המקורי)?

פתרון: לכאורה, יש למצוא בכמה אחוזים יורד ערך הנכס בשנה. אך הדבר מיותר. כפי שראינו, הירידה המצטברת באחוזים כלל אינה תלויה בערך ההתחלתי, ולכן **כל ערך** המפסיד מערכו אותו אחוז, ירד ב- 5 שנים לחצי של ערכו. רבע הוא חצי של חצי, ולכן כעבור חמש שנים נוספות ירד ערך הנכס לרבע של ערכו ההתחלתי. שאלה: מה יקרה לערך הנכס במשך 5 שנים נוספות? (כלומר, תוך תקופה של 15 שנים).

על מחבר המאמר:

ד"ר מיכאל קורן

מרצה במכללת סמינר הקיבוצים