חילוק שברים פשוטים:
מתמטיקה תרגולית או מתמטיקה אחרת?

ראיסה גוברמן

אחד המסרים המרכזיים שעל המורה למתמטיקה להעביר לתלמידיו הוא, שהמתמטיקה אינה אוסף עובדות וכללי פעולה שעל-פיהם יש לפעול, אלא שיש בה מקום לדמיון, יצירה והעלאת רעיונות מקוריים. יצירה מתמטית מתבססת על הבנה שחקירה וגילויים מתמטיים מתבססים על חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית, ועל חשיבה האוריסטית וסקרנות מתמטית. לכן חשוב לאפשר לתלמידים לחפש דרכים משלהם להתמודד עם משימות שונות. לחיפוש דרכים יצירתיות לפתרון יש יתרונות רבים, כאשר אחד מהם הוא טיפוח יצירתיות מתמטית אצל תלמידים.

על מנת לאפשר דיון על יצירתיות מתמטית אצל תלמידי בית ספר, לייקין (Leikin, 2009) מציעה להבחין בין שני סוגים של יצירתיות: יצירתיות מוחלטת ויצירתיות יחסית. יצירתיות מוחלטת מתייחסת לגילויים מתמטיים ברמה היסטוריות, בעלי השפעה ניכרת על התפתחות המתמטיקה כמדע. לעומת זאת, יצירתיות מתמטית יחסית מתייחסת לגילויים יום-יומיים היכולים להתרחש בכל כיתת מתמטיקה. גילויים אלה מנותחים תוך התייחסות ל"היסטוריה" החינוכית של הילד, ולתכנים ולכלים אותם הילד כבר למד, וכן בהתייחסות לעשייה המתמטית של תלמידים אחרים בני גילו. גישה זו מאפשרת התייחסות ליצירתיות כתכונה מחשבתית דינאמית, המתפתחת על בסיס הזדמנויות לימודיות הניתנות לילד (Leikin, 2009).

מענה הולם לסוגיה זו של טיפוח יצירתיות מתמטית של התלמידים במהלך השיעורים, אפשר למצוא בגישה היפנית להוראת המתמטיקה. גישה זו מבוססת על מספר עקרונות. הראשון מביניהם קובע כי שיעור טוב במתמטיקה מונחה על-ידי "סיפור אחד" העשיר מבחינה מתמטית ופדגוגית, הדורש מהתלמידים לפעול ברמות חשיבה גבוהות. בנוסף, על הסיפור הזה לקדם הבנה מושגית של תלמידים, כלומר, לאפשר להם לבנות קשרים בין ובתוך רעיונות מתמטיים, במהלך פתרון בעיות (Heibert & Grouws, 2007). לאור כך, על המשימה אותה מביא המורה לכיתה להיות משמעותית מבחינה מתמטית, וגם מאפשרת לרוב תלמידי הכיתה, כולל תלמידי הקצוות, להביע את עצמם במהלך פתרונה. משימה זו אינה חייבת להיות "משימה מהעולם של הילד", היא יכולה להיות "משימה מתמטית" ללא קשר ישיר לעולם הסובב אותנו. מכאן נובע שעל המורה לבחור את המשימה כך שהיא תענה על כל העקרונות שנמנו לעיל. בחירה זו אינה קלה.

במאמר זה אתייחס לנושא "חילוק שברים פשוטים", נושא זה לא נחשב, בדרך כלל, לנושא בו אפשר להגיע לתובנות מתמטיות עמוקות. כדי לאמת טענה זו מספיק להתבונן בתכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי.

חילוק שברים פשוטים מוצג בתכנית הלימודים כנושא טכני לחלוטין ללא קישוריות לנושאים אחרים, למשל, אין הנחיה לקשר בין חילוק שברים פשוטים לבין חילוק מספרים עשרוניים. כידוע, קשר זה חשוב להבנת פעולת החילוק: פעולה על מספרים רציונאליים בעלת אותן תכונות וכללי פעולה בכל אחת מקבוצות המספרים. כמו כן, התכנית אינה מכוונת את המורים לחזרה על תכונות החילוק שנלמדו בכיתות נמוכות יותר, ומכאן שהנושא הופך להיות למכני ולאלגוריתמי לחלוטין, ומטפח גישה למתמטיקה כמתמטיקה תרגולית (פרידלנדר, 2002).

גם ספרי הלימוד לא בדיוק מתעמקים בנושא זה. בדרך כלל, הקניית הנושא מבוססת על הצגתה של דוגמה גנרית (generic example) באמצעותה על התלמידים להסיק שבדרך זו יש לפעול כך עם כל שאר השברים.[1]

נתבונן במשימה מתמטית הלקוחה מאחד השיעורים המוסרטים בתהליך "חקר השיעור" ביפן. המשימה הוצגה כבעיית פתיחה בשיעור, והיא שהובילה את כל ההתרחשויות והלמידה בשיעור. נראה כיצד משימה זו מאפשרת גם לטפח יצירתיות מתמטית, וגם מספקת לתלמידים חוויה מתמטית העשירה בתכנים, כתחליף ללימוד טכני של הנושא.

פתרו את התרגיל: $\frac{9}{20}:\frac{3}{5}$

בכמה שיותר דרכים

[1] הסבר מפורט לחילוק שברים על כל סוגיו כולל ייצוגים גיאומטריים אפשר למצוא בספר "גיאומטריה ועוד" שנכתב על-ידי מ. ברבש וד. גורג ויצא לאור בהוצאת "רכס".

לפני שאגש להציג פתרונות שונים למשימה זו אתאר את המושג "פתרונות שונים". בפתרון בעיות מתמטיות בדרכים שונות, הכוונה היא למציאת דרך פתרון השונה מהקודמת על-ידי ייצוג אחר של מושג מתמטי בו עוסקת הבעיה; שימוש בתכונה נוספת של מושג מתמטי בו עוסקת הבעיה; שימוש בתכונות וכלים מענפי מתמטיקה נוספים.

המשימה שהצגתי מאפשרת לגשת לפתרונה במספר דרכים, אשר מסתמכות על תכונות של פעולת החילוק, על תכונות מספרים המופיעים במשימה, ועל שילובן של תכונות אלו.

אציג כאן **חלק** מהפתרונות האפשריים כאשר הם מחולקים לחמש קבוצות עיקריות, כולל האפשרויות לייצוג ויזואלי-מוחשי של הפתרון.

קבוצה 1

אפשר למצוא את המנה בדרך הבאה[2] (חילוק מונה במונה ומכנה במכנה):

$$\frac{9}{20}:\frac{3}{5}=\frac{9:3}{20:5}=\frac{3}{4}$$

השאלות שאותן יעלו התלמידים הן:

האם הדרך הזו "תעבוד" תמיד? ובכלל, האם הדרך הזו היא תקפה למציאת מנת חילוק של שני שברים כלשהם?

אתייחס קודם כל לנכונות החישוב בדרך זו.

ארשום את השברים באמצעות אותיות:

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, כאשר a, b, c ו- d הם מספרים טבעיים.

[2] התייחסות נוספת לדרך פתרון זו אפשר למצוא במאמר הבא:
Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal of Research in Mathematics Education*, *31*,5-25.

אילו היינו רוצים למצוא את המנה באמצעות האלגוריתם הרגיל היינו מקבלים:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}.$$

אראה שבאמצעות הדרך הראשונה נקבל את אותה התוצאה:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}=\frac{a:c}{b:d}\times\frac{c}{c}=\frac{a}{b:d\times c}\times\frac{d}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

דרך זו אכן תמיד נכונה, אך לא תמיד נוחה. ברור שהיא תהיה יעילה במקרה שהמונה של המחולק מתחלק במונה של המחלק, והמכנה של המחולק מתחלק במכנה של המחלק.

אציין שדרך זו של חילוק שברים יכולה להיות בעייתית מבחינת ההוראה, משום שהיא נכונה במקרה של כפל או חילוק, וזאת בניגוד למקרים של חיסור או חיבור.

זו הזדמנות טובה להתעכב על התכונות של שני הזוגות של פעולות החשבון: חילוק-כפל (עבור שתיהן הדרך נכונה בשל דמיון בין התכונות שלהן - למעשה זו פעולה אחת לגבי קבוצות המספרים המוכרות לילדים בשלב זה של הלמידה), וחיסור-חיבור שלגבי שתיהן היא איננה נכונה, למעשה מאותה הסיבה.

קבוצה 2

דרכי פתרון מקבוצה זו מסתמכות על התכונה הבאה של פעולת החילוק:

> *אם נכפול את המחולק במספר טבעי ונכפול את המחלק באותו המספר, המנה לא תשתנה.*
>
> *או באותיות:* $a:b=(a\times m):(b\times m)$
>
> *(כאשר כל המספרים הם מספרים טבעיים).*

ובמקרה שלנו:

$$\frac{9}{20}:\frac{3}{5}=(\frac{9}{20}\times 5):(\frac{3}{5}\times 5)=\frac{9}{20}\times 5:3=\frac{3}{4}$$

דרך זו אכן מתאימה בכל המקרים, ומספיק יעילה לצורך מציאת המנה כאשר המחולק והמחלק הם שברים פשוטים.

אפשר להשתמש בדרך זו כהסבר למשמעותו של האלגוריתם המקובל לחילוק שברים פשוטים (כפל במספר ההופכי למחלק כחלופה לחילוק), כאשר גם הוא דרך נוספת למציאת המנה:

$$\frac{9}{20}:\frac{3}{5}=\frac{9}{20}\times\frac{5}{3}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}.$$

קבוצה 3

קבוצה נוספת של פתרונות אפשריים הם פתרונות המסתמכים על הרחבת השברים ותכונות פעולת החילוק.

הדרך הראשונה בקבוצה זו היא הרחבת השברים לאותו מכנה:

$$\frac{9}{20}:\frac{3}{5}=\frac{9}{20}:\frac{3\times 4}{5\times 4}=\frac{9}{20}:\frac{12}{20}$$

כאן אנסח תכונה נוספת של פעולת החילוק:

> *אם נחלק את המחולק במספר טבעי ונחלק את המחלק באותו המספר, המנה לא תשתנה,*
>
> *או באותיות:* $a:b=(a:m):(b:m)$
>
> *(כאשר כל המספרים הם מספרים טבעיים).*

באמצעות כלל זה אפשר להפוך את תרגיל החילוק $\frac{12}{20}:\frac{9}{20}$ לתרגיל $9:12$ (להסתכל על המכנה 20 כמספר בו מחלקים גם את המחולק וגם את המחלק), ואת התרגיל החדש – להפוך לשבר:

$$9:12=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

דרך אחרת, המסתמכת גם היא על הרחבת השבר ועל תכונות פעולת החילוק, היא הפיכת השברים לשברים בעלי מונה משותף:

$$\frac{9}{20}:\frac{3}{5}=\frac{9}{20}:\frac{9}{15}=\frac{9:9}{20:15}=\frac{1}{20:15}\times\frac{15}{15}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

באופן עקרוני, הרחבה - הכלל שנוסח בקבוצה הקודמת (קבוצה 2), גם מצדיק את מה שמוצג בקבוצה הזו.

כפי שצוין קודם לגבי אחדות כפל-חילוק (שזו למעשה פעולה אחת על קבוצת המספרים הרציונאליים), אחדות זו הופכת את שתי השיטות (ליתר דיוק, את שתי ההצדקות) לאחת.

קבוצה 4

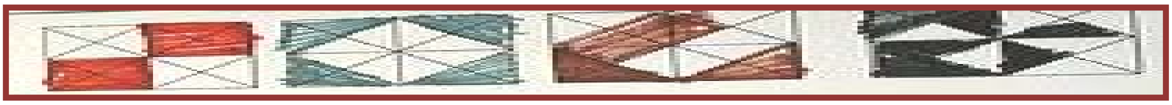
קבוצה זו היא קבוצה של פתרונות בהם הופכים את שני השברים הפשוטים למספרים עשרוניים. גם פתרונות אלה מסתמכים על תכונות של מספרים רציונאליים ותכונות של פעולת החילוק (האפשרות לכפול גם את המחולק וגם את המחלק באותו מספר, למשל 10).

הפתרון הראשון הוא הפיכת שני השברים למספרים עשרוניים, ושימוש בתכונת החילוק, אותה הצגתי בקבוצת הפתרונות השנייה:

$$\frac{9}{20}:\frac{3}{5}=0.45:0.6=4.5:6=0.75$$

באותו האופן אפשר לפעול כאשר כופלים את המחלק ואת המחולק במספר 100 במקום ב- 10:

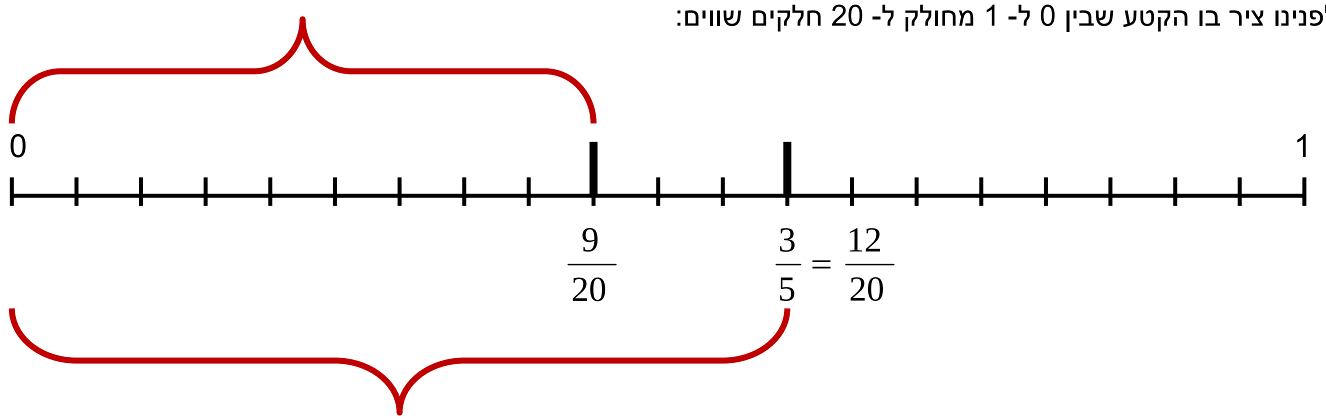
$$\frac{9}{20}:\frac{3}{5}=0.45:0.6=45:60=0.75$$



קבוצה 5

הקבוצה האחרונה של פתרונות היא קבוצת פתרונות המסתמכים על ייצוגים ויזואליים: ציר המספרים ומלבנים.

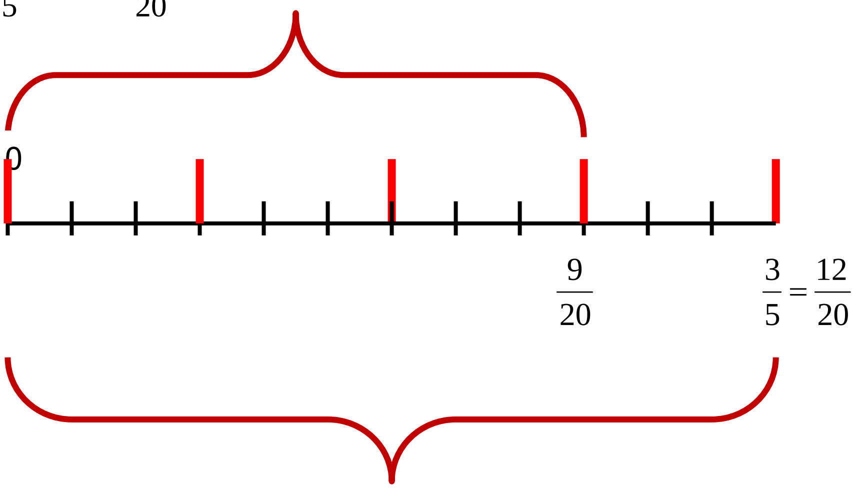
לפנינו ציר בו הקטע שבין 0 ל- 1 מחולק ל- 20 חלקים שווים:



נשתמש בתכונת ההפיכות של הכפל והחילוק. את התרגיל $\frac{9}{20}:\frac{3}{5}$ אפשר לבטא כמשוואת הכפל הבאה: $\frac{3}{5}\times\_\_\_\_=\frac{9}{20}$.

או, במילים אחרות, מהו המספר ש- $\frac{3}{5}$ ממנו הוא $\frac{9}{20}$?

לאחר ביצוע הסרטוט נשנה את "כללי המשחק" על-ידי שינוי הגדרתו של השלם. עד עכשיו השלם כלל 20 חלקים, נניח עתה שהוא כולל 12 חלקים. המטרה של שינוי זה היא לבדוק איזה חלק מהווה השבר $\frac{9}{20}$ מהשבר $\frac{3}{5}$.

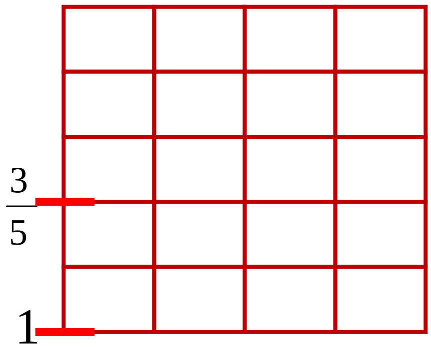


בשלם החדש יש 12 חלקים, השבר $\frac{9}{20}$ כולל 9 חלקים, כלומר, השבר $\frac{9}{20}$ "נכנס" $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ "פעמים" בתוך השבר $\frac{3}{5}$.

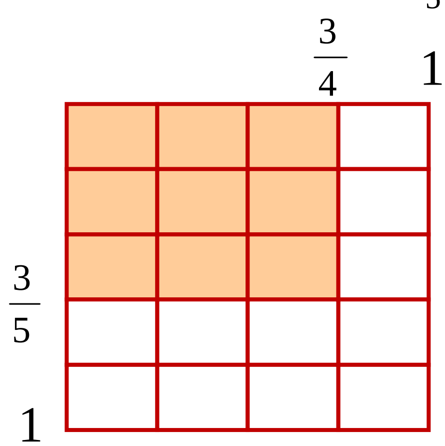
ייצוג ויזואלי נוסף מסתמך על המשפט ששטחו של מלבן שווה למכפלת אורכי צלעותיו. כדי למצוא את המנה $\frac{9}{20}:\frac{3}{5}$ יש למצוא את צלע המלבן ששטחו שווה ל- $\frac{9}{20}$ יחידות שטח ואחת מצלעותיו שווה ל- $\frac{3}{5}$ יחידות אורך.

ניקח ריבוע שצלעו שווה ליחידת אורך, אחת מצלעותיו נחלק לחמישה חלקים שווים ונסמן את האורך המתאים ל- $\frac{3}{5}$.

בשלב השני נחלק את הצלע הסמוכה של הריבוע לארבעה חלקים שווים, וזאת על מנת להגיע לשלב המחולק ל- 20 חלקים שווים.



נצבע 9 חלקים בצורה שהתקבלה ונשמור על שני כללים: הצורה הצבועה צריכה להיות מלבן שאורך אחת מצלעותיו $\frac{3}{5}$ יחידת אורך:



על-פי הסרטוט אפשר לראות שאורך הצלע השנייה של המלבן אותו בנינו, שווה ל- $\frac{3}{4}$ יחידת אורך.

כמובן שדרך זו אינה מתאימה לכל המקרים, אך יעילה מאוד כאשר המכנה של אחד השברים הוא מחלק של המספר שבמכנה השני.

דרך כללית המתאימה לכל המקרים של חילוק שברים, וייצוגה באמצעות המלבן, אפשר למצוא במאמר של Jaehoon Yim (2010).

סיכום

כפי שראינו, קיימות לפחות חמש קבוצות אפשריות של פתרונות למציאת מנת חילוק של שבר בשבר. בכל אחת מהקבוצות הנ"ל אפשר להציג דרכים שונות שתהיינה יעילות לסוגים מסוימים של שברים פשוטים, ודרכים שתהיינה יעילות לכל סוגי השברים הפשוטים. חשוב לציין שכפי שעברנו משברים פשוטים למספרים עשרוניים, אפשר גם ההפך: לעבור ממספרים עשרוניים לשברים פשוטים, ואז כל הדרכים שעסקנו בהן מהוות גם אלטרנטיבה לחילוק עשרוני בעשרוני.

המשימה עליה נבנה המאמר נראית לכאורה כתרגיל רגיל, אך מתגלה כמאוד עשירה מבחינה מתמטית, ולכן מזמנת אפשרויות כל כך רבות לפתרון. כמו כן, היא יכולה גם לתת מענה לאוכלוסיות שונות של תלמידים, למשל, לאלה שקל להם יותר לעבוד עם מספרים עשרוניים, או לתלמידים המעדיפים להסתמך על ייצוגים ויזואליים.

משימה זו היא דוגמה למשימה המתאימה לשיעור שלם בכיתה ו', ובאמצעותה אפשר ללמד חומר חדש (הקניית חילוק שברים פשוטים) וגם לבצע קישורים עם נושאים שנלמדו קודם: פעולת החילוק ותכונותיה, מספרים עשרוניים, ציר המספרים ועוד.

באמצעות משימות המאפשרות טיפוח קישוריות מתמטית, אפשר לטפח גם חשיבה אסטרטגית של התלמידים: מאחר ואין להם ב"ארגז הכלים" (המבוסס על הידע הקודם) אלגוריתם מוכן להתמודד עם המשימה, התלמידים נאלצים לפתח דרכים משלהם. וגם אם האלגוריתם של חילוק שברים פשוטים נלמד, אך מבקשים מהתלמידים יותר משיטה אחת להתמודד עם המשימה, הם חייבים לחשוב לא רק על השיטה המוכרת. בנוסף,

בדרך זו של לימוד פרוצדורות אפשר לפתח גמישות מחשבתית של התלמידים, לחבר יחדיו פרקי ידע שנרכשו בהקשרים שונים בשיעורי המתמטיקה, וגם להבין את ייעודם (כגון חוקי חילוף בין חילוק לכפל) ופחות להסתמך על למידת העובדות בעל פה ועל שינון כללים.

אדגיש שדרך העבודה המוצגת במאמר מאפשרת לטפח יצירתיות מתמטית יחסית של התלמידים. בין הדרכים שמחקרים שונים מציגים כמפתחים יצירתיות מתמטית, הדרך של פתרון משימות בדרכים רבות ככל האפשר נחשבת כאחת הדרכים היעילות לפיתוח יצירתיות מתמטית. וזאת מכיוון שפתרון בעיות בדרכים שונות מפתח קישוריות של הידע המתמטי, גמישות ושטף מחשבתי (Leikin, 2009).

על כותבת המאמר:

ד"ר ראיסה גוברמן

ראש החוג להוראת המתמטיקה במכללת אחווה, מדריכת מורים ו"פרחי הוראה".

מקורות

פרידלנדר, א' (2002). מתמטיקה תרגולית לעומת מתמטיקה אחרת, *הרצאה בכנס הארצי ה-9 של החינוך המתמטי*, מכון ויצמן למדע.

http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/kenes2002/lecture6.pdf

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students.* (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Yim, J. (2010). Children's strategies for division by fractions in the context of the area of a rectangle. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 105-120.