תכונות הקשורות לשטחי משולשים

משה סטופל, יחיאל פריש

הקדמה

חישוב גודלו של השטח מהווה כלי חשוב הן בעיסוק בבעיות מתמטיות והן ביישומים בתכנון הנדסי וכלכלי.

בהוראת מושג השטח בבית הספר היסודי מוקדש זמן רב להטמעת העקרונות הבסיסים של שימור שטח, השוואת שטחים, מדידות ישירות, בעזרת מתווכים, ומדידה ביחידת מידה אחידה. כמו כן ניתן דגש רב לפירוק והרכבה של צורות. לאחר שהוטמעו המושגים הבסיסיים נלמדת הדרך לחישוב שטח מלבן שבעזרתו ניתן להרחיב ולמצוא דרכים לחישוב שטח של צורות מוכרות כגון: מלבן, משולש, מקבילית ועיגול.

למרות שהלמידה מבוססת על עקרונות שניתן ליישם אותם כמעט בכל צורה מישורית, בשלבים מאוחרים יותר של הלמידה עדיין ניתן לראות שקיים קושי בחישוב השטח של צורות לא סטנדרטיות ובהשוואה בין שטחים של צורות שונות.

בכל רמה של בעיות במקרים בהם יש לחשב או להעריך את השטח של צורה לא סטנדרטית, יש לחלק את שטחה למספר צורות מוכרות שאת שטחיהן ניתן לחשב או להעריך תוך הסתמכות על העובדה שסכום שטחי החלקים שווה לשטח השלם. שיטת פתרון זו מתבססת על העקרונות שנלמדים בבית הספר היסודי והוזכרו לעיל.

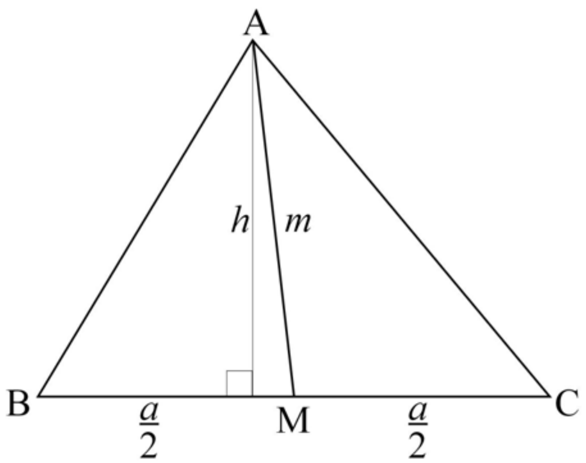
במאמר זה בחרנו להציג מספר משימות בנושא שטחים המבוססות על העקרונות הבסיסיים בנושא שטחים שנלמדים בבית הספר היסודי. המשימות הן ברמת העמקה למורה אולם מדגישות היטב את השימוש בעקרונות הנלמדים החל מכיתה ב.

תכונת התיכון במשולש בהקשר לשטח

לפי ההגדרה, התיכון במשולש הוא קו ישר היוצא מקודקוד המשולש ומתחבר לנקודת האמצע של הצלע מולו. להגדרה זו ישנה משמעות נוספת והיא שהתיכון מחלק את שטח המשולש לשני משולשים שווי שטח (להוציא שני משולשים מיוחדים – שיוזכרו בהמשך, שני השטחים אינם חופפים).

הדבר נובע מכך שלשני המשולשים שנוצרו ע"י העברת התיכון ישנם בסיסים בעלי אורך שווה וגובה משותף, כשבמשולש אחד הגובה הוא בתוך המשולש (משולש חד-זוויות) ואצל השני הגובה מחוץ למשולש (משולש קהה-זווית), כנראה באיור 1.

איור 1



מי הם שני המשולשים המיוחדים ואיזה תיכון (או תיכונים) מחלקים את שטחו לשני משולשים חופפים?

את ההבנה והידע שהתיכון חוצה את שטחו של משולש ניתן ליישם בקלות בשלוש המשימות הבאות:

משימה 1

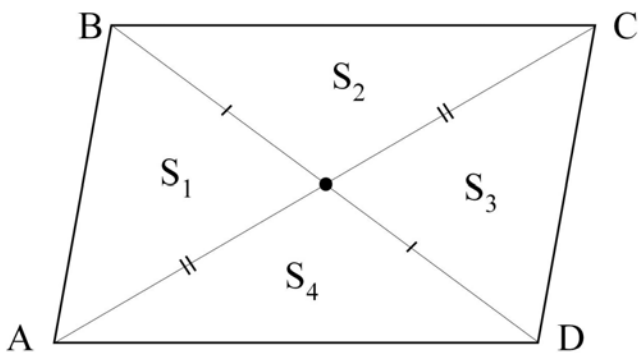
הוכיחו שאלכסוני המקבילית מחלקים את שטחה לארבעה משולשים שווי-שטח. (איור 2)

ההוכחה מסתמכת על התכונה שאלכסוני המקבילית חוצים זה את זה ובכך הם תיכונים זה לזה.

מכאן מקבלים ש-

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S$$

חשוב להדגיש שאלכסוני המקבילית לא רק מחלקים אותה לארבעה משולשים שווי שטח, אלא גם, לשני זוגות של משולשים חופפים.



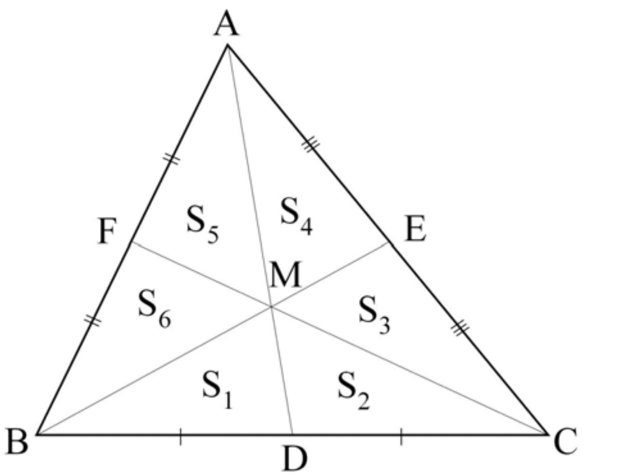
איור 2

משימה 2

שלושת התיכונים במשולש ΔABC נפגשים בנקודה M. התיכונים חילקו את שטח המשולש לשישה משולשים בעלי קודקוד משותף M. (איור 3)

נתון ששטחו של המשולש ΔBMD הוא S_1.

צריך להביע את שטחו של המשולש הנתון ΔABC באמצעות S_1.



איור 3

פתרון:

MD, ME ו- MF הם תיכונים במשולשים: ΔBMC, ΔAMC, ו- ΔAMB בהתאמה. לפי תכונת חציית השטח של התיכונים, מקבלים: $S_1 = S_2, S_3 = S_4, S_5 = S_6$

כשמצרפים לקשרים אלו את תכונת AD – תיכון במשולש ΔABC, כחוצה שטח, מקבלים:

$$S_1 + S_5 + S_6 = S_2 + S_3 + S_4$$
$$\Downarrow$$
$$2S_5 + S_1 = 2S_3 + S_2 \rightarrow S_5 = S_3$$

כנ"ל בהתאם לתכונת התיכון BE של משולש ΔABC , מקבלים:

$$S_4+S_5+S_6=S_1+S_2+S_3$$
$$\Downarrow$$
$$2S_5+S_4=2S_1+S_3 \rightarrow S_5=S_1$$

לכן, $S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6$

ושטח המשולש הנתון $S\Delta ABC=6S_1$

הערה: על סמך השוויון בין שש השטחים ניתן להוכיח את המשפט: "התיכונים במשולש חותכים זה את זה ביחס של 2:1".

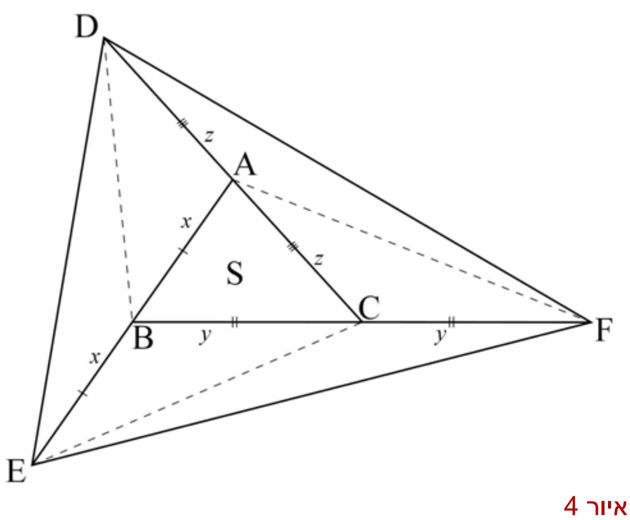
ההוכחה של משפט זה ניתנת במהלך לימודי הגיאומטריה בחינוך העל-יסודי לרוב בדרך אחרת.

משימה 3

נתון משולש ΔABC שאורכי צלעותיו: x, y, z ושטחו S.

האריכו את כל אחת מצלעות המשולש כאורכה כלפי חוץ כנראה באיור 4.

צריך להביע את שטחו של המשולש ΔDEF באמצעות S.



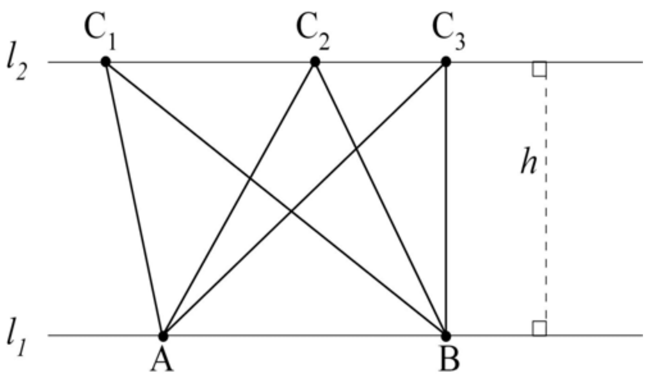
איור 4

פתרון:

על-ידי שימוש בתכונה של התיכון כחוצה שטח משולש מקבלים שנוצרו עוד 6 משולשים שווי שטח השווים בשטחם לשטח המשולש הנתון. לפיכך השטח המבוקש $S\Delta DEF=7S$.

תכונת הקו המקביל ביצירת משולשים שווי שטח

שטחו של משולש שווה למחצית מכפלת אורך הבסיס בגובהו של המשולש. נובע מכך שכל המשולשים שהם בעלי אותו אורך בסיס ואותו גובה, הם בעלי אותו שטח. ניתן בקלות להדגים תכונה זו באמצעות שני קווים מקבילים ℓ_1 ו- ℓ_2 כך שעל אחד מהם נמצאים A ו- B – קודקודי הבסיס של משולש ועל המקביל השני נמצא הקודקוד השלישי, C, כנראה באיור 5.



איור 5

השטחים של כל המשולשים:

$\Delta ABC_1, \Delta ABC_2, \Delta ABC_3,...$ הם בעלי אותו שטח משום שהבסיס AB משותף לכולם וכך גם הגובה h שהוא המרחק בין שני הישרים המקבילים.

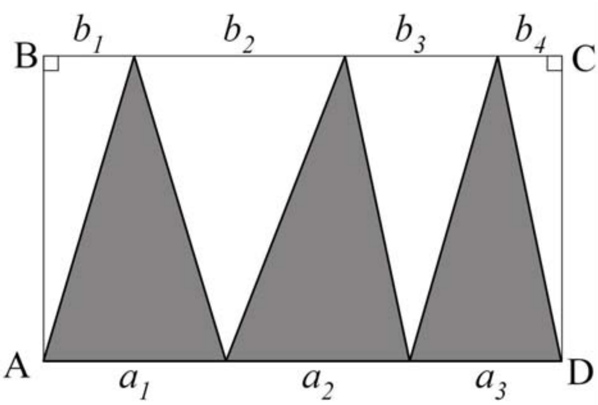
ניתן לקבוע בעזרת ניסוי ומדידה מי הוא מבין כל המשולשים שקודקודיהם על הישר ℓ_2 הוא בעל ההיקף הקטן ביותר. סביר להניח שלאחר ניסיונות מדידה בודדים יגיעו התלמידים למסקנה שהמשולש בעל ההיקף הקטן ביותר הוא משולש שווה-שוקיים. ההוכחה המתמטית

ניתנת בדרך כלל רק באמצעות חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי לתלמידי 4 ו- 5 יחידות לימוד בלבד.

משימה 4

נתון מלבן שעל שתיים מצלעותיו הנגדיות בנו משולשים, כנראה באיור 6.

למי מהמשולשים ישנו שטח גדול יותר, ללבנים או למושחרים?



איור 6

פתרון:

לכל אחד מהמשולשים משני הסוגים יש את אותו גובה (רוחב המלבן).

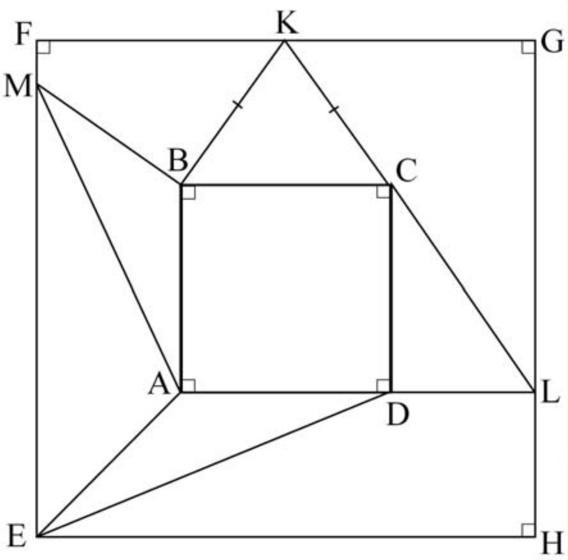
גם סכום אורכי הבסיסים שלהם שווים (אורך המלבן) לכן סכום השטחים שלהם שווה זה לזה.

היופי שבתשובה הוא בכך שהיא מתקבלת ללא תלות במספר המשולשים שעל כל צלע או בסוגיהם (שווי-צלעות, שווי-שוקיים, ישרי-זווית וכד').

משימה 5

נתונים שני ריבועים אחד בתוך השני. מרכזי הריבועים מתלכדים וצלעותיהם מקבילות. על כל אחת מהצלעות של הריבוע הפנימי בנו משולש שקודקודו השלישי נמצא במקום כלשהו על צלע הריבוע החיצוני המקבילה לה, כנראה באיור 7.

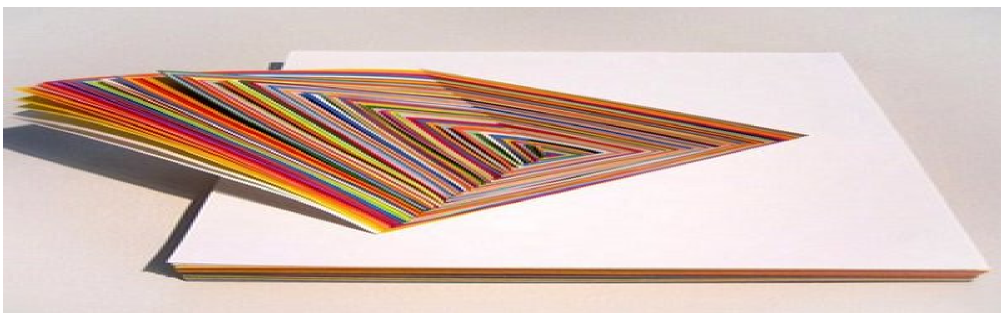
מי מארבעת המשולשים הוא בעל השטח הגדול ביותר?



איור 7

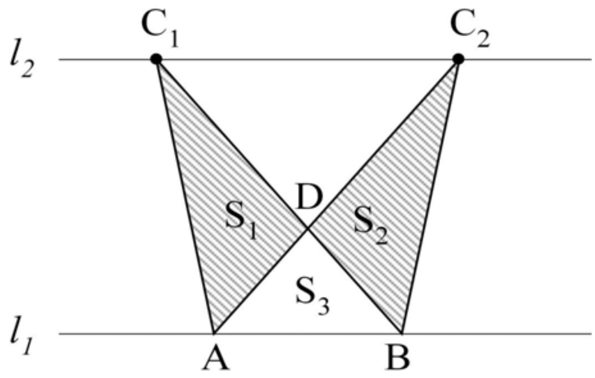
פתרון:

אורך בסיסי ארבעת המשולשים שווים זה לזה וכך גם גובהם (המרחק שבין הצלעות המקבילות של המשולשים) ועל-כן הם שווים בשטחים.



משימה 6

נתון שהישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 (באיור 8) מקבילים זה לזה. להוכיח ששטחי המשולשים S_1 ו- S_2 (השטחים המקווקווים שבאיור), שווים זה לזה.



איור 8

פתרון:

מסמנים $S_3 = S_{\Delta ADB}$

מהתכונה שצוינה על שטחי משולשים שקודקודיהם נמצאים על קווים מקבילים, נובע:

$$S_{\Delta C_1 AB} = S_{\Delta C_2 AB}$$
$$\Downarrow$$
$$S_1 + S_3 = S_2 + S_3$$
$$\Downarrow$$
$$S_1 = S_2$$

תכונה זו מתקיימת עבור כל זוג נקודות C_1 ו- C_2 הנמצאות על הישר ℓ_2.

משימה 7

נתון מרובע כלשהו. יש להפוך אותו למשולש כך ששטחו של המשולש יהיה שווה לשטח המרובע.

פתרון:

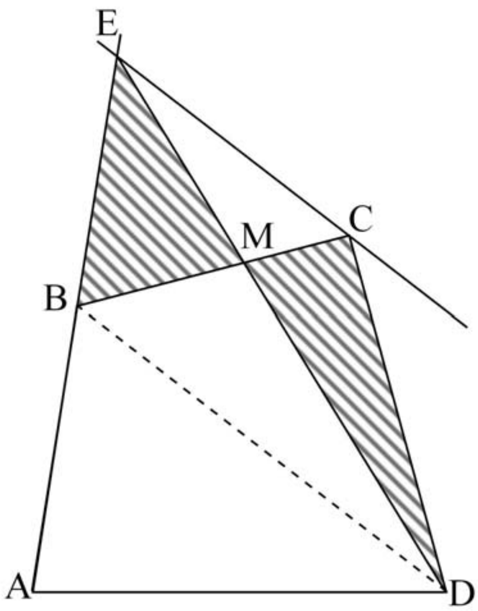
פתרון המשימה מסתמך על יישום המסקנה שהשטחים S_1 ו-S_2 של המשימה הקודמת שווים זה לזה.

דרך הקודקוד *C* של המרובע *ABCD* (הנראה באיור 9) מעבירים קו מקביל לאלכסון *BD* של המרובע.

הקו המקביל חותך את המשך הצלע *AB* בנקודה *E*.

המשולש ΔAED שווה בשטחו לשטח המרובע הנתון.

שטח המשולש ΔMDC נגרע משטח המרובע *ABCD* ובמקומו צורף המשולש ΔMBE. שטחי המשולש שנגרע והמשולש שצורף שווים זה לזה לפי המשימה הקודמת.

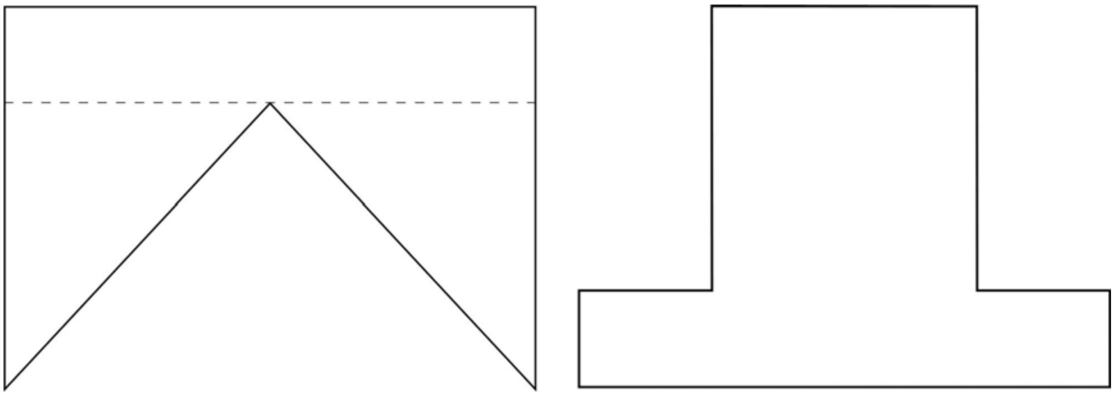


איור 9

משימות הקשורות בנושא השטח

משימה א

יש לחתוך את הצורה השמאלית ע"י חיתוך יחיד בקו ישר, כך שעם הצמדת החלקים תתקבל הצורה הימנית.



הפתרון הוא הקו המרוסק הנראה באיור.

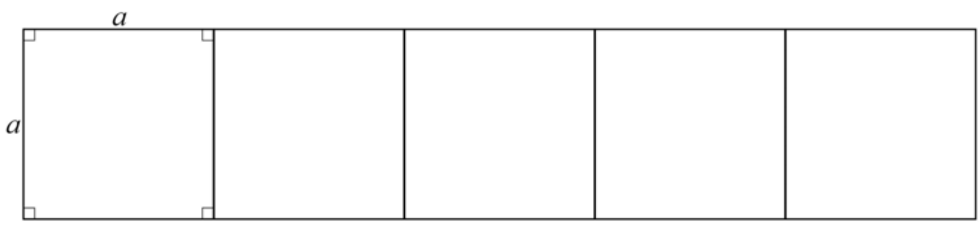
משימה ב

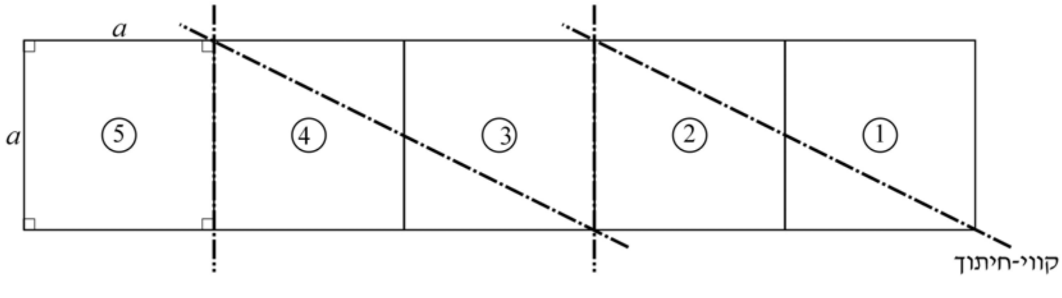
נתונים 5 ריבועים זהים צמודים זה לזה, כל אחד בעל צלע באורך a.

יש להעביר 4 קווי חיתוך ישרים כך שייווצרו 5 חלקים שניתן לצרף אותם יחד לריבוע גדול אחד.

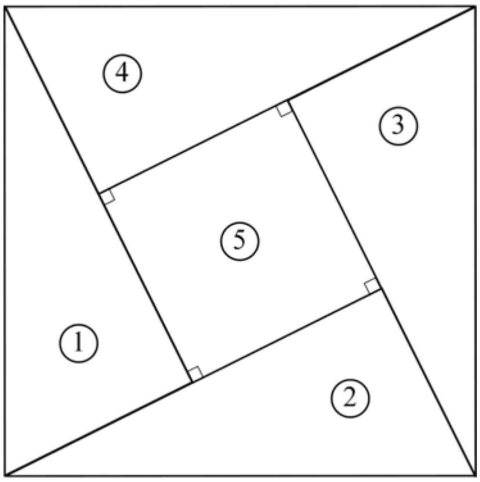
פתרון: (הפתרון מסתמך על משפט פיתגורס)

שלב ראשון:





שלב שני: הצמדת החלקים לריבוע



על כותבי המאמר:

ד"ר משה סטופל

פיסיקאי ומתמטיקאי בעל תואר שלישי בהנדסת חומרים מהטכניון. ראש החוג למתמטיקה במכללה האקדמית הדתית "שאנן" בקרית שמואל, חיפה.

בעבר מנהל בית-ספר תיכון דתי לבנות.

ד"ר יחיאל פריש

בעל תואר שלישי בחינוך. ראש המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן".

שותף בכיר למחקרים בתחומי יהדות, שפה ומתמטיקה בהיבטי חינוך והוראה.

Triangle, Mauro Staccioli (1996), Tournay-Solvay park, Brussels