תולדות המתמטיקה - מתמטיקה בבלית

חלק ב - גאומטריה

עטרה שריקי

במאמר הקודם נחשפנו למקצת מהידע של הבבלים בתחום האריתמטיקה. במאמר זה נעסוק בחלק מהידע שלהם בתחום הגאומטריה. היות והמתמטיקה שפותחה על-ידי הבבלים הייתה מונעת בעיקר מצרכים שימושיים ויום-יומיים, המניע להתפתחות הידע הגאומטרי היה הצורך של הבבלים לחשב שטחים של אדמות (ככל הנראה לצרכי מיסוי), ומאוחר יותר גם הצורך שלהם לחשב נפחים של מיכלים שיועדו לאכסון תבואה. המילה "גאומטריה" היא צירוף של שתי מילים: גאו-אדמה, ומטריה-מדידה. אכן, הגאומטריה התחילה את התפתחותה כתחום ידע העוסק בקשרים בין צורות מישוריות, תוך זיקה לצרכים שימושיים, כגון - מדידה של חלקת אדמה. למעשה, זהו אחד משני התחומים הראשונים, בנוסף לאריתמטיקה, מהם צמחה המתמטיקה. בגאומטריה עושים המתמטיקאים שימוש לא רק בסמלים, אלא גם בסרטוטים, ובכך למעשה ניתן להיעזר בהנמקה ויזואלית, ולא רק בהנמקה לוגית. יחד עם זאת, בהשוואה לסמלים, סרטוטים הם פחות פורמאליים, ופחות מדויקים במובן הלוגי, ולפיכך השימוש בהם גורם לא פעם למחלוקת בין החוקרים השונים. בנוסף, סרטוטים עשויים לכלול הנחות סמויות. לדוגמה, לא ניתן לסרטט משולש 'כלשהו', שכן כל משולש שנסרטט יהיה בעל צורה מסוימת ומידות מסוימות, ולכן הוא עלול שלא לייצג משולש אקראי. למרות כל זאת, לסרטוטים יש תפקיד מרכזי מאוד במתמטיקה, ולמעשה, הם מכניסים למתמטיקה את המושג "צורה", מושג שני בחשיבותו אחרי מושג המספר (סטוארט, 2008).

הגאומטריה הבבלית

כאמור במאמר הקודם, הבבלים תיעדו את חוקיהם, התנהלותם היום-יומית, האדמיניסטרציה, והידע המתמטי שלהם על גבי לוחות חמר. כפי שראינו, לבבלים היה ידע אריתמטי שכלל, בין השאר, עיסוק בשברים והוצאת שורש ריבועי. אך לבבלים היה גם ידע באלגברה. מלוחות החמר עולה שהבבלים פיתחו דרך לפתרון משוואות ממעלה שנייה ושלישית, והקוראים מוזמנים לקרוא על כך במקורות מידע שונים (ראו הפניות למקורות בסוף המאמר).

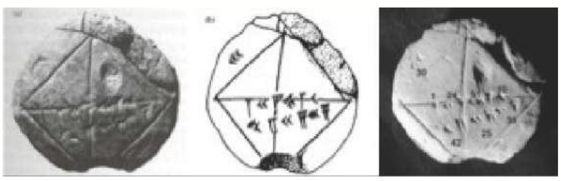
הבבלים פיתחו גם דרכים לחישוב שטחים של צורות בסיסיות, וכן ידעו לחשב נפחים. בנוסף, הם הכירו משפטים הקשורים ליחסים בין צלעות של משולשים דומים. אולם, היות ולא הכירו את המושג "מידת זווית", התמקדו הבבלים בחקר אורכי הצלעות ולא בחקר מידותיהן של זוויות. יחד עם זאת, לשיקולים גאומטריים היה תפקיד משני אצל הבבלים כאשר פתרו, למשל, משוואות אלגבריות. הם לא שאלו את עצמם האם בעיה מסוימת פתירה או שאינה פתירה, וסוגיית ההוכחה הכללית, כמו גם העיסוק בהיבטים המופשטים של הגאומטריה כלל לא באו לידי ביטוי בלוחות הבבליים, בניגוד, למשל, ליוונים. לאור זאת, חוקרים רבים סבורים שהמתמטיקה הבבלית פותחה בעיקר לצרכים

שימושיים (O'Connor & Robertson, 2000). מרבית הלוחות בהם מופיע המידע על הגאומטריה הבבלית מתוארכים לתקופה של 1900-1600 לפנה"ס. ארבעה מבין הלוחות הללו מוסרים את המידע הרב ביותר: א. YBC 7289 (ר' איור 1 במאמר זה, ואיור 10 במאמר שהופיע בגיליון 20.) ב. פלימפטון 322 (ר' איור 9 במאמר שהופיע בגיליון 20.) ג. לוח סוסא (לוח שנמצא בעיר הידועה מתוך מגילת אסתר בשם "שושן הבירה", אשר נכבשה כ- 2200 שנים לפנה"ס על-ידי השומרים), ד. לוח Tell Dhibayi. יש לזכור שקיימת סבירות גבוהה לכך שחפירות ארכיאולוגיות לא חשפו את כל לוחות החמר בהם תועד הידע המתמטי של הבבלים, ולכן ניתן לשער שארבעת הלוחות הללו מייצגים רק חלק מהידע הגאומטרי של הבבלים מאותה התקופה.

להלן נתמקד בידע של הבבלים בנושא משפט פיתגורס והדרך שבה השתמשו במשפט זה, וכן נכיר את הדרך שבה חישבו היקף של מעגל ושטח של עיגול.

1. משפט פיתגורס ויישומו

במאמר הקודם הכרנו את לוח YBC 7289 (ר' איור 1), והראנו כיצד חישבו הבבלים את הערך של $\sqrt{2}$. נחזור ונתעמק בלוח זה. כפי שניתן לראות מתוך איור 1, בלוח מופיע סרטוט של ריבוע. ליד צלע הריבוע רשום המספר 30 בכתב יתדות, ומסורטטים האלכסונים שלו, ועל אחד האלכסונים רשומים המספרים 1 24 51 10 ומתחתיו רשומים המספרים 42 25 35. כזכור, הבבלים נהגו לספור בבסיס 60, ומובן שמספרים אלה רשומים בבסיס הספירה הבבלי.



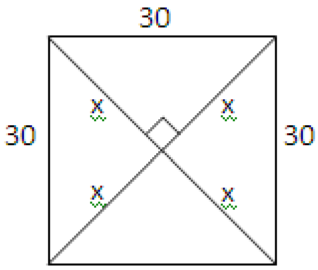
איור 1- לוח YBC 7289

למרות שהמספרים אינם מופרדים לחלק השלם ולחלק המציין שבר, כפי שלעיתים נהגו לעשות הרי שניתן להבין את כוונת הבבלים על סמך הסרטוט עצמו. ראינו שהמשמעות של המספרים הרשומים מעל לאלכסון, 1; 24, 51, 10 (בבסיס 60) היא $\sqrt{2}$ בבסיס העשרוני (או ליתר דיוק, קירוב שלו): $1+\frac{24}{60^1}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.414213$.

נתבונן עתה במספר הרשום מתחת לאלכסון: 42; 25, 35. נתרגם את המספר מבסיס 60 לבסיס עשרוני, ונקבל: $42+\frac{25}{60^1}+\frac{35}{60^2}=42.42641$ שהוא, למעשה, המספר $30\times\sqrt{2}$, בהתאם לקירוב הבבלי עבור $\sqrt{2}$. במילים אחרות, החישובים מצביעים על כך שהבבלים טוענים שבהינתן ריבוע שאורך צלעו 30 [יחידות מידה] אורך האלכסון של הריבוע הוא [יחידות מידה].

ניעזר במשפט פיתגורס כדי לבדוק האם החישוב הבבלי אכן נכון:

בהתאם לסרטוט המופיע בלוח, אורך צלעו של הריבוע הוא 30 [יחידות אורך]. כידוע, אלכסוניו של ריבוע שווים זה לזה, חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה. לכן, האלכסונים בריבוע מחלקים אותו לארבעה משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים חופפים. נסמן ב- x את האורך של מחצית אלכסון הריבוע. נקבל ארבעה משולשים ישרי-זווית שאורך כל אחד מניצביהם הוא x, אורך היתר שלהם הוא 30 (ר' איור 2).



איור 2

לפי משפט פיתגורס מתקיים:

$$x^2+x^2=30^2 \Rightarrow 2x^2=30^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}x=30 \Rightarrow x=\frac{30}{\sqrt{2}}=\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{30\sqrt{2}}{2}$$

(הערה: בשלב הלפני אחרון כפלנו וחילקנו את המספר ב- $\sqrt{2}$ כדי להימנע מרישום מספר אי-רציונלי במכנה). המספר שהתקבל הוא מחצית אורך אלכסון הריבוע.

כלומר, אורך אלכסון הריבוע הוא אכן $30 \times \sqrt{2}$.
התוצאה עליה הצביעו הבבלים מעידה על כך שהם הכירו את משפט פיתגורס כ- 1,200 שנים טרם זמנו של פיתגורס (אשר לפי ההערכות נולד בין השנים 569-580 לפנה"ס), וידעו כיצד להשתמש בו!
נשים לב לכך שלמעשה ניתן להכליל את הפתרון של הבבלים, ולומר: אורך האלכסון של ריבוע שצלעו *a* הוא $a\sqrt{2}$ (החליפו את 30 ב- *a*, וכך תגיעו לתוצאה זו). $a\sqrt{2}$

בדקו את עצמכם:

(1) נתון ריבוע שאורך צלעו 45 ס"מ.
א. מהו אורך אלכסון הריבוע?
ב. חשבו את שטח הריבוע בעזרת אורך האלכסון שמצאתם.

(2) נתון ריבוע שאורך אלכסונו 45 ס"מ. מהו אורך צלע הריבוע?

(3) נתון ריבוע ששטחו 100 סמ"ר. מהו אורך אלכסון הריבוע? (פתרו בשתי דרכים שונות).

(פתרונות ניתן למצוא בסוף המאמר.)

2. שלשות פיתגוריות

שלשה פיתגורית היא שלשה של מספרים טבעיים, *a,b,c* המקיימת את הקשר:
$a^2 + b^2 = c^2$.
קיימות שלשות פיתגוריות יסודיות, כלומר, שלשות של מספרים שאין להם גורם משותף, ושלשות שאינן יסודיות. למעשה, מכל שלשה יסודית ניתן לקבל שלשה שאינה יסודית על-ידי כפל של כל המספרים שבשלשה באותו המספר. המספר שבו כופלים את השלשה צריך להיות מספר טבעי, אם רוצים שהשלשה תענה על הקריטריון של שלשה פיתגורית.
לדוגמה, השלשה 5, 4, 3 היא שלשה יסודית. 5, 4, 3 הם מספרים טבעיים שאין להם גורם משותף, וכן מתקיים הקשר: $3^2 + 4^2 = 5^2$.
למעשה, זוהי השלשה היסודית הקטנה ביותר.
משלשה זו ניתן לקבל אינסוף שלשות שאינן יסודיות. לדוגמה:
אם נכפול ב- 2 כל אחד מהמספרים בשלשה היסודית 3,4,5, נקבל את השלשה 6,8,10, ואכן $6^2 + 8^2 = 10^2$.

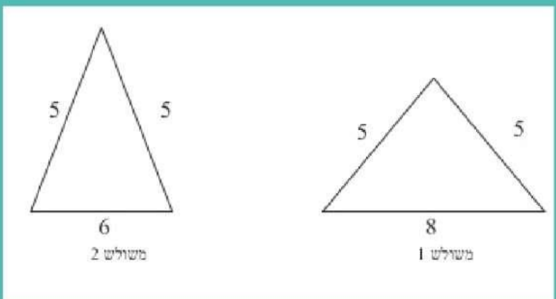
אם נכפול ב- 5 כל אחד מהמספרים בשלשה היסודית 5,12,13, נקבל את השלשה 25,60,65, ואכן $25^2 + 60^2 = 65^2$.
באופן כללי ניתן להראות שמכל שלשה יסודית, *a,b,c* המקיימת את הקשר $a^2 + b^2 = c^2$, ניתן לקבל שלשה פיתגורית באמצעות הכפלת כל אחד מהמספרים בשלשה במספר טבעי כלשהו *k*:
המספרים של השלשה המתקבלת הם: *ka,kb,kc*.
צריך להראות ששלשה זו מקיימת את הקשר: $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$. כאמור, מתקיים הקשר: $a^2 + b^2 = c^2$ נכפול את שני אגפי המשוואה ב- k^2, ונקבל:
$k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2 =>$
$k^2a^2 + k^2b^2 = k^2c^2 =>$
$(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$
ובכך הוכחנו את הטענה.

בדקו את עצמכם:

(4) איזו מהשלשות היא שלשה פיתגורית:
א. 20,22,30; ב. 28,45,53; ג. 40,80,90?

(5) מהי השלשה הפיתגורית היסודית שממנה התקבלה השלשה הבאה: 144,308,340?

(6) א. היעזרו במשפט פיתגורס כדי לקבוע לאיזה מהמשולשים הבאים יש שטח גדול יותר:



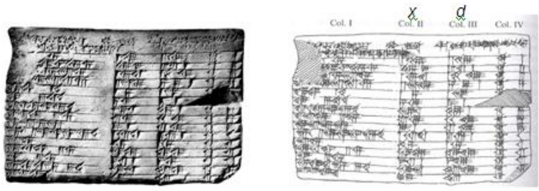
ב. היעזרו בידע שלכם על שלשות פיתגוריות, ובנו באופן דומה שני משולשים שווי-שוקיים אחרים שיש להם שוקיים בעלי אותו האורך, בסיס באורך שונה, ושטח שווה.

(פתרונות ניתן למצוא בסוף המאמר.)

כפי שראינו לעיל, הבבלים הכירו את משפט פיתגורס, שכמובן לא כונה כך, כי כאמור פיתגורס נולד רק כ- 1,200 שנים לאחר מכן. כאן המקום לציין כי החוקרים אינם יודעים בוודאות את הסיבה לכך שהמשפט המפורסם נקרא על שמו של פיתגורס, למרות שלא הוא עצמו גילה את המשפט

וגם לא השאיר כל עדות כתובה לידע שלו בנושא (כפי שלא השאיר כל עדות בכתב לגבי כל הנושאים האחרים בהם עסק), (Burton, 2006). ייתכן והסיבה לכך היא העובדה שהשימוש במשפט זה הוביל את פיתגורס ותלמידיו להכיר בכך שאחת התיאוריות המרכזיות שלהם - זו שעסקה בקיומם של יחסים בין אורכי קטעים שניתנים לביטוי באמצעות מספרים שלמים, הופרכה באמצעות משפט זה, וגרמה להתמוטטות הדרגתית של כת הפיתגוראים. במאמר שיעסוק בפיתגורס ובפועלו, נחזור ונרחיב בעניין זה.

במאמר הקודם ציינו שחלק מלוחות החמר הכיל טבלאות של חישובים מוכנים מראש. לוח פלימפטון 323 הוא דוגמה לטבלה של חישובים מוכנים של שלשות פיתגוריות (Buck, 1980; Fribert, 1981) נתבונן באיור 3:



איור 3

כפי שניתן לראות, הפינה השמאלית של הלוח נפגמה, וחתיכה ממנו חסרה במרכז צידו הימני (O'Connor & Robertson, 2000). בלוח מופיעות 4 עמודות (מסומנות באיור של הלוח ב- I, II, III, IV), ו- 15 שורות המכילות מספרים בכתב יתדות.

עמודה IV היא הקלה ביותר לפיענוח. בעמודה זו מופיעים המספרים 1-15 (המספרים 5,6,15 לא ניתנים לזיהוי בגלל שברים בלוח החמר, וניתן רק לשער שהם מופיעים שם).

נסמן ב- *x* את המספרים המופיעים בעמודה II, וב- *d* את המספרים המופיעים בעמודה III.

החוקרים Sachs & Neugebauer (בתוך Zara, 2008) מצאו שבכל שורה, כאשר מפחיתים את *x* המופיע בעמודה II מהריבוע של המספר *d* המופיע בעמודה III (d^2-x), התוצאה היא ריבוע שלם (כלומר, מספר טבעי שהשורש שלו גם הוא מספר טבעי. לדוגמה: 9 ו- 64 הם ריבועים שלמים, שכן השורש שלהם הוא מספר טבעי: 3 ו- 8, בהתאמה. לעומת זאת, 10 ו- 65 אינם ריבועים שלמים, שכן השורש שלהם אינו מספר טבעי). נסמן ב- *y* את הריבוע השלם הזה.

בראש עמודה II רשמו הבבלים: "ריבוע של הצלע הקצרה", ובראש עמודה III רשמו: "ריבוע של היתר" (Katz, 2003). את הקשר בין המספרים הרשומים בלוח ניתן לייצג באופן הבא: $d^2 - x^2 = y^2$. לכן, ניתן לומר שהמספרים הרשומים בלוח פלימפטון 323 מייצגים שלשות פיתגוריות. שלשות אלה מתורגמות למספרים עשרוניים באופן הבא (איור 4 לקוח מתוך Zara, 2008):

$(d/y)^2$	x	d	#	y
1.9834028	119	169	1	120
1.9491586	3367	4825	2	3456
1.9188021	4601	6649	3	4800
1.8862479	12,709	18,541	4	13,500
1.8150077	65	97	5	72
1.7851929	319	481	6	360
1.7199837	2291	3541	7	2700
1.6845877	799	1249	8	960
1.6426694	481	769	9	600
1.5861226	4961	8161	10	6480
1.5625	45	75	11	60
1.4894168	1679	2929	12	2400
1.4500174	161	289	13	240
1.4302388	1771	3229	14	2700
1.3871605	28	53	15	45

איור 4

בטבלה שלעיל התווספה עמודה שכותרתה *y*, (*y* הוא למעשה $\sqrt{d^2 - x^2}$), שאינה מופיעה בלוח פלימפטון 323 המקורי. עמודה זו תעזור לנו להבין את המספרים הרשומים בעמודה I. למרות שחלק מהמספרים בעמודה I אינם מופיעים בשל השחיקה בלוח, מרבית החוקרים מסכימים שמספרים אלה הם תוצאה של החישוב $(\frac{d}{x})^2$, וכנראה שחישוב זה קשור לחישובים טריגונומטריים שביצעו הבבלים (Calinger, Brown & West, 1999). לא נרחיב כאן את הדיבור על ההקשר הטריגונומטרי. המעוניינים יוכלו למצוא את עבודתו של המתמטיקאי הבריטי Erik Christopher Zeeman באתר שכתובתו:

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html

למרות הסכמת החוקרים בנוגע לכך שלוח פלימפטון 323 מכיל שלשות פיתגוריות, הרי שהם לא מתעלמים מכך שבלוח מופיעות 4 טעויות, שכנראה בוצעו על-ידי מי שהעתיק את המספרים ללוח זה. המספרים המופיעים בטבלה שבאיור 4 כבר תוקנו בהתאם

לתוצאות שאמורות היו להתקבל בפועל. למשל, בשורה 6, הכותב רשם בעמודה III את הערך 9,1, השווה ל- $9 \times 60^1 + 1 \times 60^0$, כלומר - 541. אולם, בהקשר של שלשות פיתגוריות מספר זה הוא שגוי, שכן אם $x = 319$, ו- $y = 360$, הרי ש- d אמור להיות 481 ולא 541 (כפי שאכן רשום באיור 4, המתוקן). הערך $d = 541$, שמופיע בטבלה המקורית, התקבל מתוך המספר 9,1, שנרשם בטעות ($9 \times 60^1 + 1 \times 60^0 = 540 + 1 = 541$). במקום זאת כותב הלוח אמור היה לרשום 8,1 ($8 \times 60^1 + 1 \times 60^0 = 480 + 1 = 481$).

בנוסף לטעויות העתקה, הרישום של השלשות הפיתגוריות מעלה תהיה בקרב חוקרים: אם הבבלים אכן התכוונו לרשום שלשות פיתגוריות, מדוע לא רשמו שלשות יסודיות כמו 3,4,5 או 5,12,13. למעשה, השלשה הפיתגורית הקטנה ביותר המופיעה בלוח (שורה 11) היא 45,60,75 שהיא המכפלה של השלשה היסודית 3,4,5 ב- 15. בנוסף, השלשות עצמן אינן מופיעות בסדר הגיוני נראה לעין, מלבד העובדה שהמספרים בעמודה I מופיעים בסדר יורד (O'Connor & Robertson, 2000). נכון להיום לחוקרים אין כל השערה מבוססת בנוגע לשאלות אלה. שאלות נוספות שנשארו פתוחות, ושעליהן אין לחוקרים מענה הן השאלות הבאות (Robson, 2001): מהי השיטה שלפיה חישבו הבבלים את המספרים? מה הייתה המטרה של תוכן הטבלה, ומה היה ההקשר האינטלקטואלי שלה?

למרות שלא כל החוקרים מאמינים שהבבלים הכירו את משפט פיתגורס באופן מוכלל, אלה שכן מאמינים בכך, מציגים עדות תומכת מתוך לוח חמר נוסף הנמצא במוזיאון הבריטי. על לוח זה נרשם (O'Connor & Robertson, 2000):

הטקסט בלוח החמר	פרשנות
4 הוא האורך ו- 5 הוא האלכסון. מהו הרוחב?	נתון משולש ישר-זווית שאחד מניצביו באורך 4 [יחידות אורך], והיתר שלו באורך 5 [יחידות אורך].
האורך שלו לא ידוע.	צריך למצוא את אורך הניצב השני (נסמנו ב- x).
4 פעמים 4 זה 16	$4^2 = 16$
5 פעמים 5 זה 25	$5^2 = 25$
קח 16 מ- 25 זה 9	$x^2 = 25 - 16 = 9$
מה כפול מה אני צריך לקחת כדי לקבל 9?	$x^2 = 9$
3 פעמים 3 זה 9	$x = 3$
3 זה הרוחב	

העמודה השמאלית בטבלה היא תרגום של ימינו לפתרון הבעיה.)

בעיה גאומטרית נוספת נמצאה בלוח Tell Dhibayi. הלוח הוא אחד מ- 500 לוחות שנמצאו על-ידי ארכיאולוגים ליד בגדד בשנת 1962, והוא מתוארך לשנת 1750 לפנה"ס. לוח זה יוצא דופן, שכן מרבית הלוחות שנמצאו באזור זה קשורים לאדמיניסטרציה של העיר.

בלוח מוצגת בעיה גאומטרית ובה שאלה בנוגע לממדיו של מלבן שהשטח שלו 0;45 (כלומר, $\frac{45}{60}\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$) ואורך אלכסונו 1;15 (כלומר, $1 \times 60^0 + \frac{15}{60} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$). הפתרון הבבלי לשאלה זו מסתמך על משפט פיתגורס ועל נוסחאות הכפל המקוצר. בשל מורכבותו של הפתרון הבבלי לא נציג אותו במסגרת זו, אף שחוקרים רבים מתייחסים לפתרון זה כאל אחד מההישגים המתמטיים המרשימים של הבבלים, המעיד על כך שלאנושות הייתה תובנה מתמטית יוצאת דופן כבר לפני למעלה מ- 3700 שנים! הקוראים מוזמנים לנסות לפתור את הבעיה באמצעות הסימנים המקובלים כיום

3. חישוב היקף מעגל ושטח עיגול

במהלך הדורות נעשו ניסיונות רבים ושונים לחשב את היקפו של מעגל ואת שטחו של עיגול. המשותף לכל הניסיונות הללו הוא השימוש ברדיוס המעגל (או בקוטרו), והשונה הוא

הקירובים השונים שהתקבלו במהלך הדורות עבור [π]. כידוע, π הוא מספר אי-רציונלי. מספר אי-רציונלי הוא מספר שלא ניתן לבטא אותו כמנה של שני מספרים שלמים. מספרים שכן ניתן לבטא אותם כמנה של שני מספרים שלמים יכולים להיות משלושה סוגים:

א. מספר שלם (לדוגמה, $\frac{30}{6}=5$)

ב. מספר לא שלם, בעל חלק עשרוני סופי (לדוגמה: $\frac{32}{5}=6.4$).

ג. מספר לא שלם, בעל חלק עשרוני אינסופי (לדוגמה: $\frac{30}{7}=4.285714285714\ldots$).

כפי שניתן לראות בדוגמה האחרונה, החלק העשרוני האינסופי הוא מחזורי (המחזור הוא 285714). אולם, כאשר מדובר במספר אי-רציונלי, מספר שלא ניתן לבטא אותו באמצעות מנה של שני מספרים שלמים, הרי שהחלק העשרוני של מספר זה הוא אינסופי לא מחזורי. לכן, במקרה של המספר האי-רציונלי π, כל חישוב המבוסס על חלק עשרוני סופי יהיה חישוב מקורב בלבד. במהלך אלפי שנים נעשו ניסיונות למצוא קירובים שונים לערכו של π, והקוראים מוזמנים [לקרוא על כך], וכן להתרשם [מ- 100,000 הספרות הראשונות של π].

נחזור למעגל ולעיגול.

בהינתן מעגל שאורך רדיוסו r, מחשבים את היקפו בעזרת הנוסחה $P=2\pi r$, כאשר $2r$ הוא אורך הקוטר של המעגל ([דוגמה לפעילויות מתאימות לתלמידים בביה"ס היסודי]).

הבבלים ידעו לחשב את היקפו של מעגל על-ידי הכפלת האורך של קוטר המעגל פי 3. כלומר, בסימונים של ימינו, הבבלים חישבו את היקפו של מעגל שאורך הקוטר שלו הוא $2r$ בעזרת הנוסחה $P=2\cdot3\cdot r$. המשמעות של $2\pi r=2\cdot3\cdot r$ היא שהקירוב אותו הניחו הבבלים עבור ערכו של π היה 3.

את שטח העיגול חישבו הבבלים בעזרת $\frac{1}{12}$ היקף המעגל. כלומר, לצורך חישוב שטח של עיגול השתמשו הבבלים בנוסחה: $S=\frac{P^2}{12}$.

כיצד הגיעו הבבלים לנוסחה זו?

נציב בנוסחת השטח של מעגל את הנוסחה הבבלית לחישוב היקף מעגל, ונקבל:

$$S=\frac{P^2}{12}=\frac{(2\cdot3\cdot r)^2}{12}=\frac{36r^2}{12}=3r^2$$

כידוע, את שטחו של עיגול שרדיוסו r מחשבים בעזרת הנוסחה $S=\pi r^2$. היות והקירוב אותו הניחו הבבלים עבור ערכו של π היה 3, הרי שקיימת עקביות בחישובים שאותם ביצעו.

למרות שבמרבית החישובים הבבליים הערך של π היה 3, בשנת 1936 התגלה בחפירות לוח חמר שבו עדות המצביעה על כך שהבבלים היו מודעים לעובדה שקביעת ערכו של π כ- 3 מהווה קירוב "גס" (Burton, 2006). הנחיה המופיעה בלוח התייחסה לכך שכאשר רוצים לקבוע באופן מדויק יותר את השטח של עיגול, במקום להסתפק במכפלת ריבוע היקף המעגל ב- $\frac{1}{12}$, יש לכפול אותו, בנוסף, ב- 0;57,36 כלומר ב-

$$\frac{57}{60^1}+\frac{36}{60^2}=\frac{57\cdot60+36}{60^2}=\frac{3456}{3600}=\frac{24}{25}$$

מכאן ניתן לראות שהבבלים היו מודעים לכך שערכו של π איננו בדיוק 3, ונראה שהשתמשו בקירוב זה משיקולי נוחות בלבד. מהו, אם כן, הקירוב המדויק יותר עבור π שהיה ידוע לבבלים?

נחזור לקשר בין שטח עיגול לבין היקף מעגל, שאותו ראינו קודם, אך הפעם נבחן אותו באופן כללי. בהינתן ששטחו של עיגול שרדיוסו r הוא $S=\pi r^2$, והיקפו של המעגל הוא $P=2\pi r$, נקבל:

$$S=\pi r^2/\cdot\frac{4\pi}{4\pi}=>$$

$$S=\frac{4\pi^2r^2}{4\pi}=\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\frac{P^2}{4\pi}$$

(יש לשים לב לכך שיחידות המידה של אורך אינן שוות ליחידות המידה של שטח, והנוסחה שלעיל מתארת קשר מספרי בלבד). כלומר, מהנוסחה עולה ש- $S=\frac{P^2}{4\pi}$. אם נציב עבור π את הקירוב 3, נקבל את התוצאה שקיבלנו קודם לכן (כלומר, השטח שווה למכפלת ריבוע היקף המעגל ב- $\frac{1}{12}$).

אולם, הבבלים טוענים שכדי לקבל קירוב מדויק יותר עבור π יש לבצע את חישוב השטח בהתאם לנוסחה: $S=\frac{24}{25}\cdot\frac{P^2}{12}$. המשמעות היא, שלפי החישוב הבבלי מקבלים:

$$S=\frac{24}{25}\cdot\frac{P^2}{12}=\frac{P^2}{4\pi}\quad /:P^2\ =>$$

$$\frac{24}{25\cdot 12}=\frac{1}{4\pi}=>\frac{24}{300}=\frac{1}{4\pi}=>$$

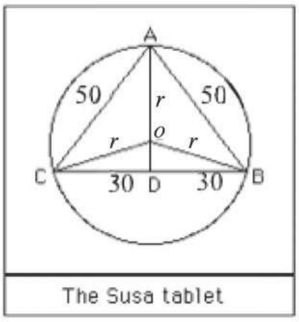
$$96\pi=300=>\ \pi=\frac{300}{96}=3.125=3\frac{1}{8}$$

מספר זה, כמובן, קרוב יותר לערכו האמיתי של π מאשר המספר 3.

כיצד יישמו הבבלים את הידע שלהם בנוגע למעגל?

בלוח סוסא, למשל, מופיעות הנחיות בנוגע לחישוב אורכו של רדיוס מעגל החוסם משולש שווה-שוקיים בעל צלעות שאורכן, במספרים בבסיס 10, הם: 50,50,60 [יחידות אורך].

להלן תיאור סכמטי של הבעיה, ופתרונה בסימונים של ימינו.



איור 5

באיור 5: A,B,C מייצגים את קודקודי המשולש, AD הוא הגובה לבסיס המשולש, ו- O היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש.

במשולש שווה-שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון לבסיס, ולכן: CD = DB = 30

המשולש ABD הוא משולש ישר-זווית, לכן לפי משפט פיתגורס:

$$AD^2+BD^2=AB^2=>AD^2=AB^2-BD^2=>$$

$$AD^2=50^2-(\frac{60}{2})^2=2500-900=1600\ =>$$

$$\mathrm{AD}=40$$

נסמן ב- r את הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש. נקבל: $AO=OB=OC=r$

ולכן: $\mathrm{AD}=\mathrm{OD}+r=40=>OD=40-r$ עתה

ניעזר $AD=OD+r=40\Rightarrow OD=40-r$ ישר-

זווית OBD, ונקבל: $r^2=OD^2+BD^2$.

$$OD^2+DB^2=r^2=>\ (40-r)^2+30^2=r^2$$

$$=>40^2-2\cdot 40\cdot r+r^2+30^2=r^2$$

$$1600-80\cdot r+r^2+900=r^2$$

$$=>1600-80\cdot r+900=0$$

$$=>2500-80\cdot r=0=>r=\frac{2500}{80}=31.25$$

בדקו את עצמכם:

(7) נתון מעגל שרדיוסו 10 [יחידות אורך].

א. מהו היקף המעגל, אם מחשבים אותו בעזרת הקירוב הבבלי $\pi=3$?

ב. חשבו את שטח העיגול בעזרת התוצאה שקיבלתם עבור היקף המעגל, כפי שחישבו זאת הבבלים.

ג. חזרו על החישובים, תוך שימוש בערך המקורב יותר של π שאותו הציעו הבבלים.

(8) א. מהו רדיוס המעגל החוסם את משולש 1 המופיע בשאלה 6א?

ב. השטח של משולש 1 שווה לשטח של משולש 2. האם, לדעתכם, הרדיוס של המעגל החוסם את משולש 1 שווה לרדיוס של המעגל החוסם את משולש 2? בדקו את תשובתכם.

(פתרונות ניתן למצוא בסוף המאמר.)

4. כמה מילים לסיכום

כפי שניתן לראות, כדי לפתור בעיות העוסקות בשטחים היה על הבבלים לעסוק בפתרון משוואות ריבועיות. באופן דומה, בעיות בהן עסקו הבבלים בהקשר של חישובי נפחים של מיכלים לאכסון תבואה, דרשו מהם לפתור משוואות ממעלה שלישית (Berriman, 1956).

במאמר זה הצגנו רק מעט מהידע הבבלי הנוגע לפתרונות הקשורים למשוואת ממעלה שנייה. למעשה, לבבלים היה ידע שאִפשר להם לפתור בעיות מסובכות, ובשל מורכבות הפתרון שלהן לא הצגנו אותן במסגרת זו.

להלן נציג כמה דוגמאות לבעיות כאלה, רק כדי שניתן יהיה להתרשם מרמת הידע של הבבלים. הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם בפתרון הבעיות (Burton, 2006):

א. נתון ריבוע. מחברים 7 פעמים את שטחו עם 11 פעמים אורך צלעו, ומקבלים $6\frac{1}{4}$.
מהו אורך צלע הריבוע?

ב. מצאו את ממדיו של מלבן שסכום אורכי צלעותיו הוא 10, ושטחו 16.

רמז: נסמן ב- a ו- b את אורכי צלעות המלבן. נקבל: $a \cdot b = 16$; $a+b = 10$. כיום מקובל לפתור את מערכת המשוואות בעזרת שיטת ההצבה. אולם, הבבלים פתרו את הבעיה באמצעות שימוש בזהות $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$, מתוך מטרה למצוא את $a-b$ ולהשתמש בתוצאה זו בהמשך הפתרון. את הדרך שבה פתרו הבבלים את המשוואה ניתן למצוא בקישור:
http//:www-groups.dcs.st-and.ac.uk~/history/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html

ג. מצאו את ממדיו של מלבן שסכום אורכי צלעותיו הוא 24, ואם מחברים לשטחו את הפרש אורכי צלעותיו מקבלים 120.

ד. סכום שטחיהם של שני ריבועים הוא 1525. אורך הצלע של אחד הריבועים גדולה ב- 5 מ- $\frac{2}{3}$ אורך הצלע של הריבוע השני.
מהם אורכי הצלעות של שני הריבועים?

למעוניינים בהרחבה:

http://www.ias.ac.in/resonance/August2003/pdf/August2003p27-42.pdf

http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/egypt_babylon/babylon.pdf

http://www.gap-system.org/~history/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html

http://baber.servehttp.com/Professional/MiscWritings/TransfQuadEqCuneiform.pdf

סיפורה של המתמטיקה הבבלית תם אך לא נשלם. במאמר הבא נרד מעט דרומה, ונספר את סיפורה המופלא של המתמטיקה של המצרים הקדמונים.

מקורות

סטוארט, א' (2008). *אילוף האינסוף*, מאנגלית נ. מובשוביץ-הדר, הוצאת ספרי עליית הגג וידיעות ספרים, 2011.

Berriman, A. E. (1956). The Babylonian quadratic equation. *Mathematical Gazate, 40*, 185-192.

Buck, R. C. (1980). Sherlock Holmes in Babylon. *American Mathematics Monthly*, *87*, 335-345.

Burton, D. M. (2006). *The history of Mathematics: An Introduction*, 6th Edition, McGraw-Hill.

Calinger, R., Brown, J. E., & West, T. R. (1999). *A contextual history of mathematics: to Euler*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Katz, V. J. (2003). *The history of mathematics, brief version.* Boston: Pearson/Addison-Wesley.

Fribert, J. (1981). Plimpton 322, Pythagorean triples, and the Babylonian triangle parameter equations. *Historia Mathematica*, *8*, 277-318.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2000). Pythagoras's theorem in Babylonian mathematics. http://www.gap-system.org/~history/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html

Robson, E. (2001). Words and pictures - New light on Plimpton 323. American Mathematical Monthly, 109, 105-121.

Zara, T. (2008). A brief study of some aspects of Babylonian Mathematics. A Senior Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for graduation in the Honors Program Liberty University.

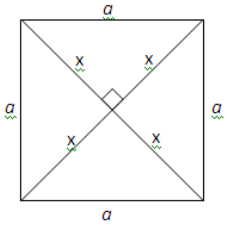
ד"ר עטרה שריקי

תחום עניינה העיקרי הוא: התפתחות מקצועית של מורים ושל פרחי הוראה כתוצאה מהתנסותם בביצוע פעילויות חקר מתמטיות, ומחקר פעולה בכיתותיהם.

פתרונות

(1) א. בהתאם לפתרון של הבבלים, אורך האלכסון של ריבוע שצלעו a הוא $a\sqrt{2}$. לכן, במקרה הנתון אורך האלכסון הוא: $45\sqrt{2} = 63.6396 \ldots$.

ב. נתבונן בריבוע שבסרטוט. אורך צלע הריבוע הוא a ואורך אלכסונו $2x$.



שטחו של כל אחד מהמשולשים הוא $\frac{x^2}{2}$, ולכן שטח הריבוע כולו הוא $4 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{(2x)^2}{2}$, כלומר, מחצית מכפלת האלכסונים.

לכן, במקרה שלנו שטח הריבוע הוא סמ"ר $\frac{(45\sqrt{2})^2}{2} = \frac{45^2 \cdot 2}{2} = 2025$. (אכן, הפתרון זהה לזה שיתקבל מתוך מציאת שטח הריבוע באמצעות מכפלת צלעותיו.)

(2). אורך האלכסון של ריבוע שצלעו a הוא $a\sqrt{2}$. במקרה שלנו:

$$a\sqrt{2} = 45 => a = \frac{45}{\sqrt{2}} / \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} => a = \frac{45\sqrt{2}}{2}$$

מכאן ניתן לראות שבהינתן ריבוע שאורך אלכסונו הוא d, אורך צלעו: $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

(3). פתרון ראשון: אורך צלע הריבוע 10 ס"מ. לפי משפט פיתגורס אורך האלכסון, d, הוא:

$$10^2 + 10^2 = d^2 => 100 + 100 = d^2 =>$$
$$200 = d^2 => d = \sqrt{200} = 14.14213 \ldots$$

פתרון שני: שטחו של ריבוע שווה למחצית מכפלת האלכסונים:

$$100 = \frac{d \cdot d}{2} => 200 = d^2 =>$$
$$d = \sqrt{200} = 14.14213 \ldots$$

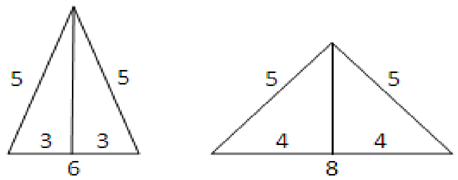
(4) שלשה ב, 28,45,53 היא שלשה פיתגורית, שכן היא מקיימת את משפט פיתגורס:

$$28^2 + 45^2 = 53^2; \;\; 784 + 2025 = 2809$$

(5) השלשה הפיתגורית היסודית שממנה התקבלה השלשה 144,308,340 היא 85, 77, 36. הגורם המשותף הגדול ביותר של המספרים המופיעים בשלשה הנתונה הוא 4. נחלק ב- 4 כל אחד מהמספרים המופיעים בשלשה זו, ונקבל את השלשה היסודית 85, 77, 36. למספרים המופיעים בשלשה זו אין גורם משותף.

(6) א. שני המשולשים הם שווי-שוקיים, ולכן בכל אחד מהם הגובה לבסיס הוא גם תיכון לבסיס. נתבונן במשולש מספר 1. הגובה מחלק אותו לשני משולשים ישרי-זווית. בכל אחד מהמשולשים הישרי-זווית יש ניצב שאורכו 4 [יחידות אורך] ויתר שאורכו 5 [יחידות אורך]. ראינו שקיימת שלשה פיתגורית 3,4,5, ולכן אורך הניצב השני (שהוא הגובה של המשולש הנתון) הוא 3 [יחידות אורך]. מכאן ששטחו של משולש 1 הוא:

משיקולים דומים, הגובה של משולש 2 הוא 4, ולכן שטחו: $\frac{6 \times 4}{2} = 12$. כלומר, שני המשולשים הנתונים הם שווי שטח.

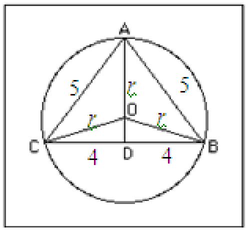


משולש 2 משולש 1

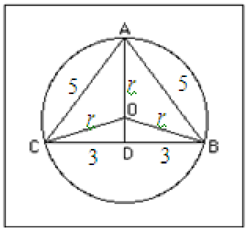
ב. התבוננות במספרים שהתקבלו, מצביעה על דרך כללית ליצור שני משולשים שווי-שוקיים בעלי שוקיים באורך שווה, בסיס באורך שונה, ושטח שווה. כל שוק מהווה את המספר הגדול ביותר בשלשה פיתגורית כלשהי. מחצית מאורך הבסיס הוא אחד המספרים הקטנים יותר בשלשה, והאורך של גובה המשולש שווה-השוקיים הוא המספר שנותר. למעשה, המספר המבטא את אורך הגובה, והמספר המבטא את אורך מחצית הבסיס, "מחליפים תפקיד" בשני המשולשים, וכך ניתן ליצור שני משולשים שווי-שוקיים שונים בעלי אותו שטח. ניקח, לדוגמה, את השלשה הפיתגורית 5,12,13.

המספר 13 הוא המספר הגדול בשלשה, ולכן הוא מבטא את אורך השוק בכל אחד מהמשולשים. במשולש אחד 12 יהיה מחצית אורך הבסיס (כלומר, אורך הבסיס הוא 24), ו- 5 יהיה אורך הגובה שלו. במשולש השני 5 יהיה מחצית אורך הבסיס (כלומר, אורך הבסיס הוא 10), ו- 12 יהיה אורך הגובה שלו. בשני המקרים שטח המשולש זהה. במשולש הראשון השטח הוא: $60 = \frac{24\times5}{2}$, ובמשולש השני השטח הוא: $60 = \frac{10\times12}{2}$.

נסו למצוא דוגמאות נוספות.



משולש 1



משולש 2

(7)

א. $P = 2\pi r = 2\cdot3\cdot10 = 60$

ב. $S = \frac{P^2}{12} = \frac{60^2}{12} = \frac{3600}{12} = 300$

ג. $S = \frac{P^2}{12} = \frac{24}{25}\cdot\frac{62.5^2}{12} = \frac{24}{25}\cdot\frac{3906.25}{12} = 312.5$


לוח הנמצא במוזיאון הבריטי
ועליו 16 בעיות עם פתרונותיהן

(8)

א. חישוב הרדיוס של המעגל החוסם את משולש 1:

$$AD^2 = 5^2 - (\frac{8}{2})^2 = 25 - 16 = 9 => AD = 3$$
$$OD^2 + DB^2 = r^2 => \ (3-r)^2 + 4^2 = r^2 =>$$
$$3^2 - 2\cdot3\cdot r + r^2 + 4^2 = r^2 =>$$
$$9 - 6\cdot r + r^2 + 16 = r^2 => 9 - 6\cdot r + 16 = 0$$
$$=> 25 - 6\cdot r = 0 => r = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$$

ב. חישוב הרדיוס של המעגל החוסם את משולש 2:

$$AD^2 = 5^2 - (\frac{6}{2})^2 = 25 - 9 = 16 => AD = 4$$
$$OD^2 + DB^2 = r^2 => \ (4-r)^2 + 3^2 = r^2 =>$$
$$4^2 - 2\cdot4\cdot r + r^2 + 3^2 = r^2 =>$$
$$16 - 8\cdot r + r^2 + 9 = r^2 => 16 - 8\cdot r + 9 = 0$$
$$=> 25 - 8\cdot r = 0 => r = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

קיבלנו שהרדיוסים של המעגלים החוסמים את שני המשולשים אינם שווים (מכאן גם ששטח העיגולים אינו שווה), למרות ששטחם של שני המשולשים שווה.