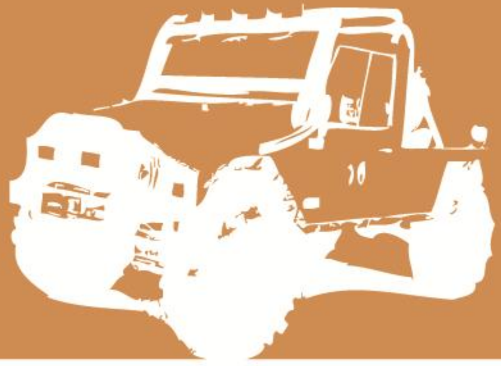


דיווחים מהשטח

התבטאויות של תלמידים כמשאב להעצמת ידע המורה ולעידוד הלמידה

אורלי גוטליב

הקדמה

הנושא התבטאויות של תלמידים ודרכי התגובה להתבטאויות אלה מעסיק אותי זמן רב, מתוך הבנה שתגובה מתאימה יכולה לקדם מורים ותלמידים. לקדם מורים - מכיוון שהתבטאויות של תלמידים במהלך שיעור יכולות לאתגר מורים המעוניינים להתחשב בהן בהוראה, ולקדם תלמידים - מכיוון שתגובה רלוונטית יכולה להתחבר לנקודות קריטיות בחשיבה של תלמידים, לעורר עניין ואתגר ומתוך כך להניע את תהליך הלמידה.

מטרת המאמר, להעלות למודעות של המורים את המקום שהתבטאויות של תלמידים יכולות לתפוש במהלך ההוראה והלמידה.

במאמר זה תיאור של שני אירועים מכוננים שחוויתי בהוראה בכיתות, הקשורים בהתבטאות של תלמידים, בעקבותיהן התעצם הידע הפדגוגי והמתמטי שלי, וכן הידע המתמטי של התלמידים. תיאור שני האירועים כולל את הרקע להתבטאות, ההתבטאות של התלמיד / התלמידה, והתגובה והתובנות שעלו בעקבות ההתבטאות.

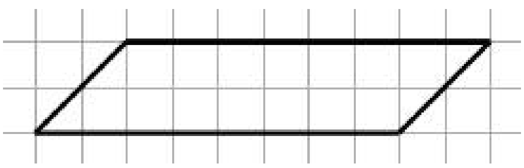
אירוע א

הרקע להתבטאות

בשיעורים הקודמים עבדו התלמידים על מציאת דרך יעילה לחישוב שטחים של מלבנים ומשולשים ישרי-זווית (מחצית משטח המלבן 'המתאים' למשולש). המטרה של השיעור בו התרחש האירוע הייתה למצוא דרך יעילה לחישוב שטח מקבילית, וליישם דרך חישוב זאת למציאת שטחים של מקביליות שונות. בשיעור היו שלושה חלקים עיקריים.

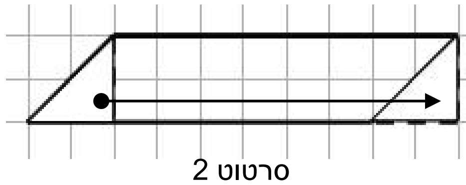
חלק 1: העלאת דרכים לחישוב שטח המקבילית.

למשל, על-ידי מניית משבצות וחצאי משבצות במקבילית הבאה:



סרטוט 1

או על-ידי העברה של משולשים ישרי-זווית חופפים (ולכן שווים בשטחם) לקבלת מלבן, כפי שמתואר בסרטוט 2.



סרטוט 2

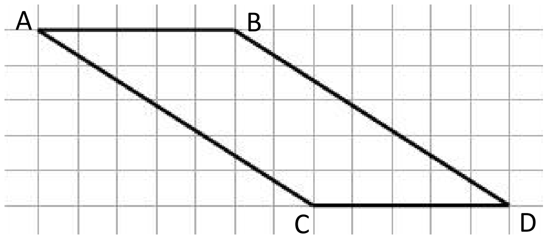
חלק 2: הסקה של דרך כללית לחישוב שטח מקבילית, גם במקרה שלא ניתן למנות משבצות, על-ידי חישוב שטח המלבן 'המתאים' למקבילית, שאחת מצלעותיו שווה באורכה לאורך אחת הצלעות של המקבילית, והצלע השנייה של המלבן היא גובה המקבילית.

חלק 3: שימוש בדרך הכללית לחישוב שטחים של מקביליות שונות.

ההתבטאות, התגובה להתבטאות ותובנות בעקבות האירוע

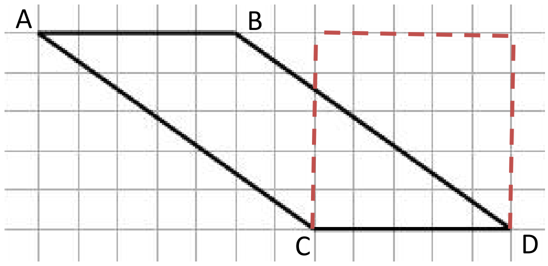
ההתבטאות של התלמיד נאמרה בחלק השלישי של השיעור, בו התלמידים התבקשו לסרטט לכל מקבילית נתונה את המלבן 'המתאים' לה, ועל סמך המרה של משולשים ישרי-זווית לחשב את שטח המלבן השווה לשטח המקבילית הנתונה.

אחת המקביליות הנתונות הייתה:



סרטוט 3

על-פי שאלה של תלמיד בשיעור, הסתבר שהוא לא הצליח לחשב את שטחה. טענת התלמיד הייתה שבסרטוט המלבן 'המתאים' (המלבן המקווקו בסרטוט 4) למקבילית הנתונה, הוא לא הצליח למצוא את שני המשולשים ישרי-הזווית החופפים, אשר באמצעותם תתבצע ההמרה של שטח המקבילית למלבן שווה-שטח, כבמקרים שהוצגו במליאת הכיתה בשני החלקים הראשונים של השיעור.



סרטוט 4

העובדה שקדקוד B נמצא שמאלה מקדקוד C היא התכונה שייחדה את המקבילית בסרטוט 3 מהמקביליות האחרות שהיו במשימה.

השאלה של התלמיד התעוררה, מכיוון שהוא למד לחשב שטח מקבילית מתוך הוכחת הקשר בין שטח המקבילית ושטח המלבן 'המתאים' לה, ולא באופן מכני על-ידי שימוש בנוסחה (בסיס x גובה). בעקבות שאלת התלמיד נוכחתי שהמהלך למציאת שטח של מקבילית לא היה מלא, וכי חסרה בו חוליה, שהיעדרה לא אפשר חישוב של שטח מקבילית במקרים כאלה. יש לציין שאת המהלך הזה לימדתי כבר פעמים רבות, ושאלת התלמיד הפתיעה אותי, מכיוון שהרי ידוע ששטח של מקבילית שווה לבסיס (בסרטוט הצלע CD המשותפת למקבילית ולמלבן) כפול גובה (אורך הצלע השנייה של המלבן), בלי תלות באופייה של המקבילית.

בסיטואציה שנוצרה בכיתה הבהרתי לתלמידים את שאלת התלמיד, וביקשתי שיחשבו האם גם במקרה של המקבילית בסרטוט 3, שטחה יהיה שווה לשטח המלבן 'המתאים', ואם כן, מדוע. בסופו של הדיון הושלמה הוכחת הטענה בכוחות משותפים (להלן הוכחה 1, המתאימה לבית הספר היסודי).

התעניינותי בשאלת ה"חור" במהלך מציאת שטח המקבילית לא תמה עם סוף השיעור. לאחר השיעור עניינתי עמיתים העוסקים בהוראת מתמטיקה בשאלה שהתעוררה. ההתעניינות סביב שאלת התלמיד הובילה להוכחות נוספות,

שהעלתה את שאלתו ל'בעיה טובה' (תיק אלגברה, 1996). להלן שתיים מההוכחות.

הוכחה 1:

כדי להוכיח ששטח מקבילית ABDC שווה לשטח המלבן CDFE 'המתאים' (בסרטוט 5)

נשים לב ששטח משולש GCD משותף לשניהם.
לכן נותר להוכיח כי שני הטרפזים ABGC ו- EFDG שווים בשטחם כלומר,

$$S_{ABGC} = S_{EGDF}.$$

נסתכל על המשולשים AEC ו- BFD .
משולשים אלו חופפים (על-פי שני ניצבים וזווית ישרה) ולכן שווים בשטחם:

$$S_{AEC} = S_{BFD}$$

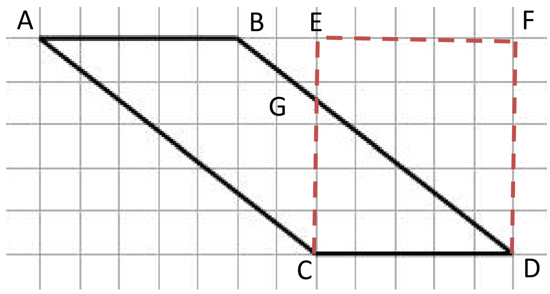
כעת,

$$S_{AEC} = S_{ABGC} + S_{BEG}$$

$$S_{BFD} = S_{EGDF} + S_{BEG}$$

ולכן נקבל,

$$S_{ABGC} = S_{EGDF}$$



סרטוט 5

הערה: יש לציין שההוכחה נותנת דוגמה של שתי צורות שונות (במקרה כאן שני טרפזים שונים) בעלי שטחים שווים.

הוכחה 2:

לצורך ההוכחה נעתיק את הצלע AB ימינה באופן שהקצה הימני יימצא מימין ל- C (סרטוט 6). מתקבלת הצלע A'B' השווה לצלע AB. נחבר את A' עם C ואת B' עם D, נקבל מקבילית A'CDB' (נא להשלים הוכחה) השווה בשטחה לשטח המלבן 'המתאים' (שהרי הקדקוד B' נמצא מימין לקדקוד C).

כמו כן,

$$S_{ABDC} = S_{AA'C} + S_{A'BDC}$$

$$S_{A'B'DC} = S_{BB'D} + S_{A'BDC}$$

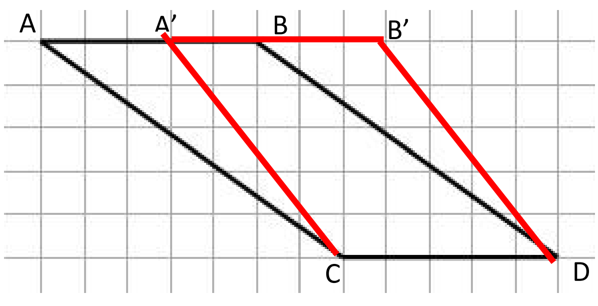
ומכיוון ש-

$$S_{BB'D} = S_{AA'C} \qquad \Delta AA'C \cong \Delta BB'D$$

נקבל,

$$S_{ABDC} = S_{A'B'DC}.$$

כעת, מכיוון ששטח המקבילית A'B'DC שווה לשטח המלבן 'המתאים', גם שטח המקבילית ABCD יהיה שווה לו בשטחו (סרטוט 6).



סרטוט 6

הקוראים מוזמנים להציע דרכים נוספות להוכחה.

ה"חור" במהלך מציאת שטח המקבילית, העסיק אותי גם מעבר לחיפוש אחר הוכחות שונות. כתוצאה מגילוי 'החור' בעקבות שאלת התלמיד, בחנתי כמה ספרי לימוד בארץ העוסקים בהוראת שטח של מקבילית, ולהפתעתי לא מצאתי בהם טיפול או התייחסות כלשהי להסבר מדוע ה'נוסחה' לחישוב שטח מקבילית מתאימה גם למקרים המיוחדים הללו. לעומת זאת, מצאתי מאמר העוסק בסוגייה זו (Resnick, 1976).

אירוע מכונן זה העשיר את הידע המתמטי שלי ושל התלמידים, ושיפר את המהלך של הוראת היחידה העוסקת במעבר משטח מלבן לשטח של מקבילית (Simon, 1997). בשיעורים הבאים של הוראת היחידה דאגתי שבעבודה העצמית בחלק השלישי של השיעור, המקביליות לא יהיו כמו זו המוצגת בסרטוט 3, ועם תום העבודה העצמית העליתי ביוזמתי את השאלה: האם גם במקרה של המקבילית בסרטוט 3, שטחה יהיה שווה לשטח המלבן 'המתאים' ואם כן, מדוע.

כאמור, אירוע זה הביא להעצמת הידע המתמטי והידע הפדגוגי שלי כמורה. העצמת הידע המתמטי נעשתה על-ידי ההבנה שההוכחה השגרתית אינה מכסה את המקרה המיוחד, ועל-ידי מציאת הוכחות שונות של 'נוסחת שטח של מקבילית' למקרה המיוחד. העשרה של הידע הפדגוגי נעשתה בכמה מובנים:

הגעה למסקנה שחסרה חוליה להחלת 'נוסחת שטח של מקבילית' העוסקת במקרים מיוחדים.

גיבוש תגובה מתאימה במקרה זה.

גיבוש דרכי הוראה אחרות של יחידת לימוד זו, לפעמים הבאות.

הבנה שיש בהוראת יחידה זו הזדמנות אמיתית לעסוק בצורך ובמשמעות של הוכחה במתמטיקה.

חיזוק לגישה בהוראה שלמורה יש זכות וחובה להקשיב לתלמידים.

אירוע ב

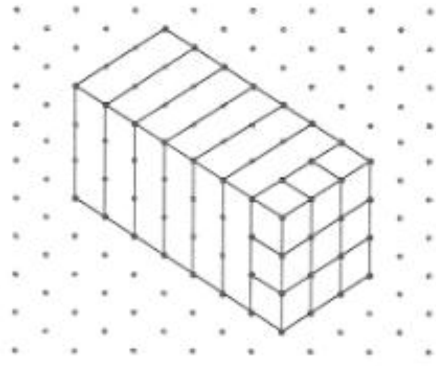
הרקע להתבטאות

במספר שיעורים עבדו התלמידים בכיתתי (בחטיבת הביניים), על מציאת דרך יעילה לחישוב נפח של מנסרות, ולמדו על הדרך לחישוב נפח של פירמידות. השיעור המתואר להלן עסק בתרגול החישוב למציאת נפח של מנסרות בעלות בסיסים שונים (משולש ישר-זווית, משולש שווה-צלעות, מלבן, ריבוע, ומשושה משוכלל). האירוע התרחש בהקשר של חישוב נפח של מנסרה ישרה שבסיסה משושה משוכלל. התלמידים פעלו בחישוב לפי השלבים הבאים.

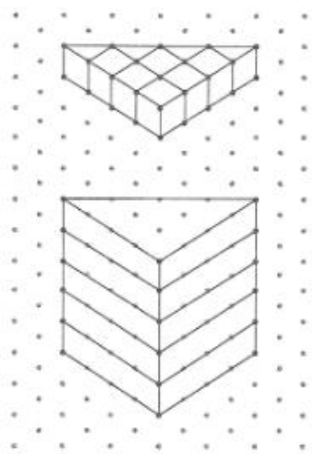
שלב ראשון - מציאת מספר ריבועי היחידה בבסיס המנסרה, השווה למספר קוביות היחידה ב'קומה הראשונה' של המנסרה.

שלב שני - הכפלה של התוצאה בגובה, שמבטא את מספר 'הקומות' במנסרה.

סרטוטים 7 ו- 8 (הסרטוטים לקוחים מתוך: הנדסת המרחב, המדריך למורה מאת גוטליב והדס, (1999)) ממחישים את שני השלבים הנ"ל בתיבה ובמנסרה שבסיסה משולש ישר-זווית בהתאמה.



סרטוט 7



סרטוט 8

ההתבטאות, התגובה להתבטאות ותובנות בעקבות האירוע

כאשר הגיעה אחת התלמידות לתרגיל שעסק במציאת נפח של פירמידה ישרה שבסיסה משושה משוכלל, היא פנתה אליי בשאלה: "איך מחשבים שטח של משושה משוכלל?" תשובתי המידית הייתה: "חלקי את המשושה לצורות גאומטריות שאת שטחן את יודעת לחשב". בתגובה זו חשבתי שקידמתי את התלמידה בפתרון בלי לחשוף בפניה את הפתרון המלא. לאחר השיעור עיינתי בחוברת העבודה של התלמידה, ואז התברר לי שבתרגיל קודם בו התבקשו התלמידים לחשב נפח של פירמידה ישרה, שבסיסה משולש שווה-צלעות שאורך צלעו 6 ס"מ, התלמידה חישבה את שטח הבסיס על-ידי ההכפלה של *6 x 6 x 6*.

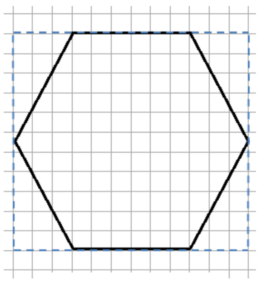
הפתרון שבו נקטה התלמידה לחישוב שטח של המשולש השווה-צלעות גרם לי להבין שתגובתי לשאלת התלמידה לא הועילה, כי היא לא נגעה בקושי האמיתי של התלמידה. השאלה של התלמידה והמידע שקיבלתי לאחר השיעור, הביאו אותי לחשיבה על הצעדים הבאים שעליי לבצע, כדי לטפל בקושי האמיתי שיש לתלמידה בהבנת המושג שטח, ולכן גם בדרך החישוב. במחשבה ראשונה שעלתה בדעתי חשבתי לפתוח את השיעור הבא בהסבר חוזר כולל על המשמעות של שטח, ועל דרכים לחישוב שטחים של צורות גאומטריות בסיסיות. אבל במחשבה שנייה, חששתי מהיעילות של תגובה כזו (לגבי התלמידה ולגבי כל שאר הכיתה), והחלטתי שאמתין בסבלנות שהקושי יצוץ פעם נוספת, כי חישוב שטחים הוא צורך חוזר בגאומטריה, ואם השגיאה כל-כך בסיסית יש להניח שהיא תצוף פעם נוספת. בפועל, זה מה שקרה. המתנתי ואכן הקושי שוב בא לידי ביטוי. הפעם התלמידה הציעה לחישוב שטח משושה משוכלל שאורך צלעו 6 יחידות אורך את המכפלה:

6 x 6 x 6 x 6 x 6 x 6. פתרון זה חיזק את התחושה שהייתה לי לאחר השיעור הראשון, שתשובתי "חלקי את המשושה לצורות גאומטריות שאת שטחן את יודעת לחשב", לא סייעה במאום לתלמידה. בשלב זה כבר הייתי מצוידת בתגובה שהיא רלוונטית לקושי האמיתי של התלמידה. הפניתי אליה את השאלה הבאה: מהו שטח של ריבוע שאורך צלעו 6 יחידות אורך? בתוספת סרטוט על הלוח של ריבוע מדגים המחולק ל- 36 יחידות שטח. תשובת התלמידה הייתה: *6 x 6* (בהלימה למספר יחידות השטח שסורטטו על הלוח). ומיד המשיכה "אה, אז מה זה שטח של משולש?" השאלה האחרונה של התלמידה הבהירה לי שהתלמידה חשה בשגיאה שלה בחישוב של שטח משולש (במקרה של משולש שווה-צלעות מהשיעור הקודם), ואולי גם

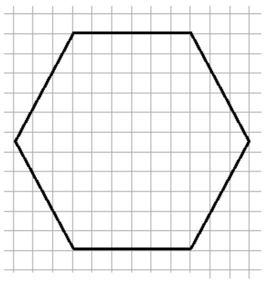
בתפישה המוטעית שלה לגבי שטח. ברגע זה של צורך, הייתה לי תחושה שהתלמידה יכולה להכיל את ההסבר לדרך חישוב שטח משולש.

השאלה שהפניתי לתלמידה יצרה עימות קוגניטיבי בין ההצעה שלה לחישוב שטח על-ידי המכפלה $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$, והמהות של שטח (מספר יחידות שטח שצורה תוחמת).

תגובה נוספת אפשרית היא, ליצור קונפליקט בין ההצעה לחישוב שטח המשושה על-ידי 6^6, למהות המושג שטח, על-ידי בקשה להשוות בין הערכה של מספר המשבצות שהמשושה בסרטוט 9 תוחם, או אפילו מציאת מספר המשבצות שהמלבן החוסם את המשושה תוחם, בסרטוט 10, לתוצאת החישוב 6^6. הפער בין תוצאת המכפלה שהוצעה וספירת המשבצות, יכול לעורר לחשיבה מחודשת על הדרך למציאת שטח המשושה שהוצעה.



סרטוט 10



סרטוט 9

במהלך האירוע, ההתבטאות הכתובה של התלמידה נתנה לי משוב על תגובתי, ובעצם שיקפה בפניי את חוסר הרלוונטיות של התגובה שלי לשאלת התלמידה: "איך מחשבים שטח של משושה משוכלל?". בהשתלשלות האירוע ביצעתי רפלקציה על תגובתי וכתוצאה מכך תיקנתי לתגובה שהלמה את הסיטואציה. האירוע הזה לימד אותי שחשוב לבצע רפלקציה עצמית על ההוראה, וכי לפעמים התבטאויות של תלמידים יכולות לשמש מניע או זרז לביצועה. בנוסף, למדתי על האחריות של מורה למהלך הלמידה (לזכור מה תלמידים יודעים ולא יודעים), וכי לא תמיד מענה ספונטני או מידי הוא מענה הולם להתבטאויות של תלמידים.

כאמור, הפעילות שתוארה, התקיימה בחטיבת הביניים, עם זאת, התפישה השגויה שבאה לידי ביטוי, אודות חישוב שטח מצולעים, ובמקרה ספציפי זה חישוב שטח משולש שווה-צלעות וחישוב שטח משושה משוכלל, עשויה להופיע בבית ספר יסודי. דוגמה זו חשובה על מנת להעלות את רמת המודעות של המורה לגבי תפישות שגויות, ודרכי התמודדות או אף דרכי מניעה בבעיות הדורשות חישובי שטח מצולעים.

סיכום

תיאור שני האירועים מהשטח מעיד על המקום שהתבטאויות של תלמידים יכולות לתפוש בהוראה. באירוע הראשון ההתבטאות של התלמיד הובילה לפיתוח הידע הפדגוגי הקשור בהשלמה של יחידת לימוד, ובנוסף לשדרוג הידע המתמטי הרלוונטי ליחידת הלימוד, ובאירוע השני לשדרוג תובנות פדגוגיות הקשורות לרפלקציה. בשני האירועים התבטאויות התלמידים היוו זרז להתפתחות המקצועית של המורה. יש לציין שהתבטאויות אלה של תלמידים ורבות אחרות במהלך ההוראה, חידדו אצלי את הרגישות להקשיב בתשומת לב להתבטאויות של תלמידים, ולמשמעות שיכולה להיות להן בהוראה.

כדי לאפשר ניצול התבטאויות של תלמידים להעצמת ידע של המורה, ולעידוד הלמידה אצל תלמידים בשיעורי מתמטיקה, חשוב לפתח קשב להתבטאויות של תלמידים, ולהתאמן בהעלאת תגובות אפשריות להתבטאויות של תלמידים, שהן מעבר למתן הערכה שיפוטית לגבי נכונות או אי-נכונות הרעיונות המועלים (Mehan, 1979).

שני האירועים, יחד עם אירועים רבים נוספים, עוררו אותי לערוך מחקר מעמיק וממושך שעסק בבחינת תגובות של מורה מומחית להתבטאויות של תלמידים בשיעורי מתמטיקה, ובהמשך לבניית אסטרטגיה שתעודד פרחי הוראה לתת הזדמנויות אמיתיות לתלמידים לבטא את עצמם במהלך השיעור, לשים לב להתבטאויותיהם ולהיות מסוגלים לנצלן כדי לקדם את הלמידה.

מקורות

תיק אלגברה (1996). המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע. רחובות.

גוטליב, א', והדס, נ' (1999). *הנדסת המרחב, מדריך למורה*. רחובות: מכון ויצמן למדע.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: Social organization in classroom*. Cambridge. MA: Harvard University Press.

Resnick, L. (1976). *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Simon, A. M. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. In E. Fennema & B. Scott-Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). Mahwah, NJ: Erlbaum.

ד"ר אורלי גוטליב
מרצה ומדריכה פדגוגית
להוראת המתמטיקה
במכללת אורות ישראל
ובמכללת תלפיות,
ומנחה מטעם אגף שחר
במשרד החינוך.