סטודנטים ותלמידים מתמודדים עם בעיית השוקו

נעמי חדד

בעקבות בעיית השוקו (עבד אלח'אלק, 2011), שפורסמה בגיליון 19 של כתב העת **מספר חזק 2000**, הצגתי את הבעיה בפני הסטודנטים במסגרת שיעור דידקטיקה של המתמטיקה במכללה.

להלן הבעיה:

איזה שוקו מתוק יותר?

גלית הכינה לעצמה כוס שוקו.

"***שמת כמות הגונה של תרכיז שוקולד בכוס שלך***", העירה קרן, בשעה שחיפשה כוס כדי להכין גם לעצמה משקה שוקו.

"***רק שליש מהכוס הוא תרכיז***", ענתה גלית, "ואני ***רואה שגם את לא חוסכת בתרכיז***".

"***אצלי התרכיז ממלא רק רבע מהכוס***", העריכה קרן.

"***אבל קרן, הכוס שלך גדולה פי שניים משלי***", טענה גלית.

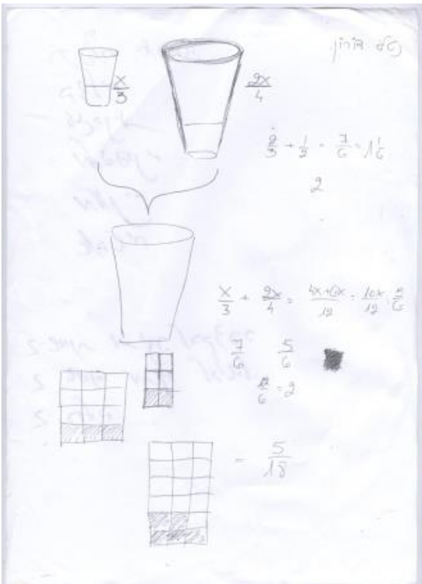
"***את יודעת מה***"? ענתה קרן, אחרי ששתיהן מלאו את יתרת הכוסות שלהן בחלב, "***בואי נאחד את שני המשקאות בתוך כד גדול יותר ואז נחלק בינינו את הכמות***."

בזמן שגלית מנסה להחליט אם ההצעה של קרן משתלמת עבורה (כלומר, תיתן לה משקה שוקו מתוק יותר), נסו למצוא איזה חלק של המשקה המאוחד מהווה התרכיז.

הסטודנטים התבקשו לפתור את הבעיה ולתאר את דרך הפתרון שלהם. הסטודנטים הציגו מספר דרכים לפתרון. חלק מהדרכים משלבות איורים, חלק משלבות פעולות אריתמטיות ואלגבריות, ובחלקן שגיאות התואמות שגיאות מוכרות בפעולות בשברים, המופיעות במאמרים של: צמיר ועמיתיה (2003); (Flores & Klein, 2005); (Carpenter, Coburn, Reyes & Wilson, 1976).

פתרון 1

פתרון זה הופיע אצל סטודנטים רבים, והוא תואם את הפתרון הגרפי בגישת החלקים השווים, כפי שמתארת Newton (2010), במאמר "איזהו השוקו המתוק ביותר." דוגמה לפתרון זה נתונה באיור 1 (באיור זה ובאיורים הבאים, השם ג'ני – המופיע בגרסה המקורית במאמרה של Newton (2010), מתייחס לגלית בבעיה שפורסמה בגיליון מספר 19 של כתב העת מספר חזק 2000).



איור 1: פתרון של נטלי

נטלי מציגה שתי דרכים לפתרון הבעיה. הדרך הראשונה, הרשומה למעלה, משלבת ייצוג אלגברי המתאר את היחסים בין הכוסות. נתייחס לדרך זו בהמשך.

דרך הפתרון השנייה, בחלקו התחתון של הדף, מייצגת את כמות השוקו באופן חזותי. הכוס של גלית, מיוצגת כמלבן המחולק ל- 6 משבצות*. 2 משבצות מהוות $\frac{1}{3}$ מהכוס של גלית ומתארות את החלק של התרכיז בכוס שלה. הכוס של קרן גדולה פי 2 מהכוס של גלית, על כן היא מיוצגת כמלבן הגדול פי 2 ומחולק ל- 12 משבצות.

החלוקה ל- 6 משבצות, נבחרה, כי היא מאפשרת ייצוג של $\frac{1}{3}$ ממנה, ואם נכפיל את גודל הכוס, מספר המשבצות 12, יאפשר ייצוג נוח של $\frac{1}{4}$ ממנה.

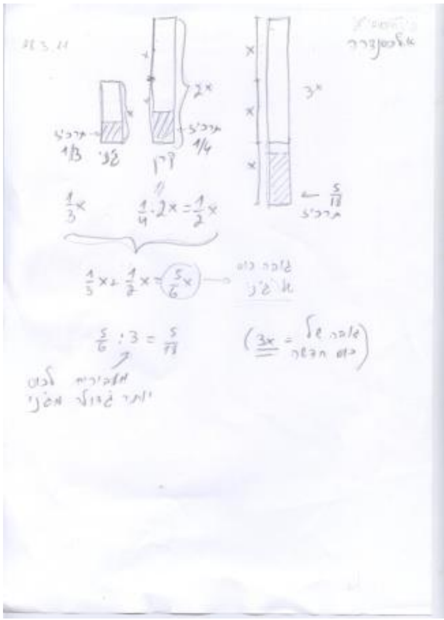
המלבן השלישי, מייצג את איחוד הכוסות של גלית ושל קרן, ומחולק ל- 18 משבצות (12 + 6). במלבן זה, צבועות 5 משבצות (2 "משבצות תרכיז", מהכוס של גלית ו- 3 "משבצות תרכיז" מהכוס של קרן). 5 משבצות אלה מייצגות את החלק אותו מהווה תרכיז השוקו בכמות המאוחדת. כלומר, $\frac{5}{18}$ מכוס האיחוד מייצג את התרכיז בכוס האיחוד.

$\frac{5}{18}$ מתאר ריכוז גבוה יותר מ- $\frac{1}{4}$ אבל קטן מ- $\frac{1}{3}$, ולכן גלית "מפסידה" כי השוקו המאוחד יהיה פחות מתוק מהשוקו שלה, לעומת קרן ש"מרוויחה" כי השוקו המאוחד יהיה מתוק יותר מהשוקו שלה. חלק מהסטודנטים תיארו את ה"הפסד" וה"רווח" באמצעות ייצוג מתמטי:

$$\frac{1}{4} < \frac{5}{18} < \frac{1}{3}$$

פתרון 2

פתרון זה, הופיע אצל מספר סטודנטים. לכאורה הוא מתחיל מייצוג חזותי, אך מהר מאוד עובר לפתרון המשלב ייצוג אלגברי וחישוב אריתמטי, כפי שמתואר באיור 2 - הפתרון של אלכסנדרה. ניתן לראות דרך זאת גם בחלק העליון בפתרון של נטלי (ראו איור 1).



איור 2: פתרון של אלכסנדרה

המלבן השמאלי, מסומן באות X, ומייצא את הכוס של גלית. $\frac{1}{3}$ מהמלבן, מייצא את ריכוז השוקו. המלבן לידו, גדול פי 2, ומייצא את הכוס של קרן. מלבן זה מסומן כ- 2X, ו- $\frac{1}{4}$ ממנו מייצא את ריכוז השוקו. המלבן הימני, מייצא את "מלבן האיחוד", ומתואר כ- 3X.

בהמשך, נרשם הסבר לפתרון בדרך הבאה:

גודל הכוס של גלית X , וגודל הכוס של קרן, הכפולה ממנה בממדיה, 2x.

$\frac{1}{3}x$ ← החלק של השוקו במשקה של גלית

$\frac{1}{4}2x=\frac{1}{2}x$ ← החלק של השוקו במשקה של קרן

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x=\frac{5}{6}x$$

$\frac{1}{3}x$ ← החלק של השוקו במשקה של גלית

$\frac{1}{2}x$ ← החלק של השוקו במשקה של קרן

$\frac{5}{6}x$ ← סה"כ החלק של השוקו אילו הועבר כולו לכוס של גלית

כלומר, כמות השוקו המשותפת, מהווה $\frac{5}{6}$ הכוס של גלית. גודל הכמות המשותפת: 3X

על כן, יש לחלק את כמות השוקו שהתקבלה ל- 3: $\frac{5}{6}:3=\frac{5}{18}$ מה שאומר שהחלק של השוקו בכוס החדשה יהיה $\frac{5}{18}$.

כפי שניתן ללמוד מפתרון הסטודנטים, שנקטו באסטרטגיית פתרון זו, **הייתה בשלב זה, התעלמות מה- x בשני הגדלים**. במהלך הדיון בפתרונות, לא הייתה לכך התייחסות, **אך נכון וראוי להתייחס לעניין זה ולבחון את המקור להשמטת ה- x.** האם היא נובעת **מחוסר**

התייחסות? אולי הייתה כאן **פעולת צמצום. נקודה זו, ראויה לדיון מתמטי!**

באמצעות פתרון זה, ניתן ללמוד מי ה"מרוויחה" ומי ה"מפסידה" מהאיחוד, שכן, $\frac{5}{18}$ קטן מ- $\frac{1}{3}$ אך גדול מ- $\frac{1}{4}$.

פתרון זה, דומה במידת מה, לפתרון האלגברי המוצג במאמר "איזהו השוקו המתוק ביותר" (Newton, 2010).

בשני הפתרונות הבאים, ניתן לזהות תעתועי אינטואיציה, ואולי אף סדקים בהבנת המהות של פעולות בשברים פשוטים.

פתרון 3

פתרון זה לווה בקריאה ספונטנית: "קרן הרוויחה!" – המשקה שלה הפך להיות מתוק יותר, כי רבע מכוס שגדולה פי 2, זה רבע מ- 2 ולכן זה חצי, וחצי גדול משליש (ריכוז השוקו בכוס של גלית).

תגובה זו עוררה דילמה בעת שהחלו להציג את הפתרון באמצעות סרטוט. את ריכוז השוקו בכוס של גלית, ייצגו במלבן בעל 6 משבצות וצבעו 2 מהן (1/3 מהכוס). את הכוס של קרן ייצגו באמצעות מלבן בעל 12 משבצות (כפליים מהכוס של גלית), וצבעו 3 משבצות (1/4 מהכוס). כשחיברו את שני הריכוזים בצעו את הפעולה הבאה: $\frac{2}{6}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

אך כשחיברו את הייצוגים המלבניים של שתי הכוסות, קיבלו $\frac{5}{18}$ (כמוצג באיור 1 ואיור 3).

מוזר... $\frac{5}{18}\neq\frac{7}{12}$ מה לא בסדר? איזו תפישה שגויה באה לידי ביטוי בפתרון זה?

במאמר "איזהו השוקו המתוק ביותר" Newton (2010), מתייחסת המחברת לשגיאה אופיינית זו, בה נוטים תלמידים לחבר את השברים בבעיה, מבלי להתייחס לעובדה שמדובר בשני שברים המייצגים חלקים מתוך יחידות שלמות שונות, המתחברות ליחידה שלמה חדשה לאחר צירוף הכמויות.

פתרון 4

בפתרון זה, הגיע אחד הסטודנטים לתשובה שריכוז השוקו בכוס המאוחדת הוא: $\frac{5}{18}$, עם זאת, הוא התעקש ואמר שלא יכול להיות שכל אחת תקבל כעת משקה שהריכוז שלו הוא: $\frac{5}{18}$, הרי כל אחת תקבל רק חלק מהמשקה ולכן יהיה ריכוז נמוך יותר מ- $\frac{5}{18}$ של שוקו. זה צריך להתחלק לשלושה חלקים - 2 חלקים לקרן וחלק אחד לגלית.

איזו תפישה שגויה באה לידי ביטוי באמירה זו?

בניסיון למצוא הסבר לתפישה שגויה זו, חיפשתי במהלך השיעור דרך לטפל בפתרון

שהציג סטודנט זה. בחרתי להציג בעיה מקשרת – מתווכת, מעולמם של הסטודנטים, על בירה ואחוז האלכוהול.

על בירה ואחוז האלכוהול

בקבוק בירה של חצי ליטר מכיל 4.5% אלכוהול .

מה יהיה אחוז האלכוהול בבקבוק של ליטר אחד מאותו סוג של בירה?

אם אשתה כוס של רבע ליטר מאותה בירה? מה יהיה אחוז האלכוהול בכוס?

מה השתנה? מה לא השתנה? מה המסקנה?

מה הקשר בין בעיית ריכוז השוקו לבעיית אחוז האלכוהול בכמויות השונות של הבירה?

אם נמזוג מהכוס הגדולה, ש- $\frac{5}{18}$ ממנה הוא תרכיז שוקו, לשתי כוסות, מה יהיה ריכוז השוקו בכל אחת מהן? האם ישתנה?

הדיון בבעיית הבירה, עזר לסטודנטים להבין שגם גלית וגם קרן קיבלו כל אחת משקה אשר $\frac{5}{18}$ ממנו הוא תרכיז שוקו, ואין זה נכון לחלק חלק זה כפי שהציע הסטודנט.

דרכי הפתרון שהוצגו על ידי הסטודנטים, עשויים להוות תשתית לניתוח והשוואה, לבחינת הידע המתמטי הנדרש לכל דרך, ולטעויות אפשריות בייצוגים ובפתרונות.

הדילמה שהעלה הסטודנט בפתרון 4, חידדה את חשיבותה של דוגמה הלקוחה מחיי יום-יום, להבהרת רעיון מתמטי, כמו גם את חשיבות הידע הדידקטי של מורה על מנת להתאים את הדוגמה למקרה הספציפי, ולעתים אף להביא דוגמה נוספת, שונה, שתעמיק את הידע של קבוצה אחרת של תלמידים. כאשר מורה חושף משימה מעין זו בפני תלמידיו הוא צריך להיות מודע ורגיש לתגובות התלמידים ולהתייחס אליהן.

בחירת בעיה, המאפשרת דרכים שונות לפתרון, מזמנת למורה אתגר של התמודדות עם חוסר וודאות (בעקבות פתרונות או תגובות לא צפויות). התמודדות זו, מחייבת גמישות בעת הדיון, ושימוש בידע המתמטי והדידקטי של המורה.

כמרצה בקורס לדידקטיקה נחשפתי באמצעות בעיה זו, לדרכי החשיבה של הסטודנטים ולטעויות האופייניות שלהם, דבר שאפשר לי לטפל בטעויות, ולתת בידי הסטודנטים כלים דידקטיים נוספים להתמודדות בכיתות בהן ילמדו בעתיד.

מקורות

עבד אל ח'אלק, א' (2011). פותרי הבעיות: בעיית השוקו. *מספר חזק 2000*, גיליון מס' 19. 41-42

צמיר, פ', ברקאי, ר', תירוש, ח', ותירוש, ד' (2003). *שברים מחקרים ופעילויות*. אוניברסיטת תל-אביב.

Carpenter, T.P., Coburn, T.G., Reyes, R.E., & Wilson, J.W. (1976). Notes from national assessment: Addition and multiplication with fractions. *Arithmetic Teacher, 23*(2), 137-141.

Flores, A., & Klein, E. (2005). From Students' Problem- Solving Strategies to Connections in Fractions. *Teaching Children Mathematics*, *11*(9), 452-457.
מאמר מתורגם לעברית

Newton, K.J. (2010). The sweetest chocolate milk: a nonroutine fraction problem provides many solution paths. *Mathematics in the Middle School*, *16*(3), 149-153.

נעמי חדד
מנהלת מרכז ח"ן למצוינות.
מרצה לדידקטיקה במכללה האקדמית לחינוך – אורנים.
בעבר מדריכה מחוזית למתמטיקה – מחוז חיפה.