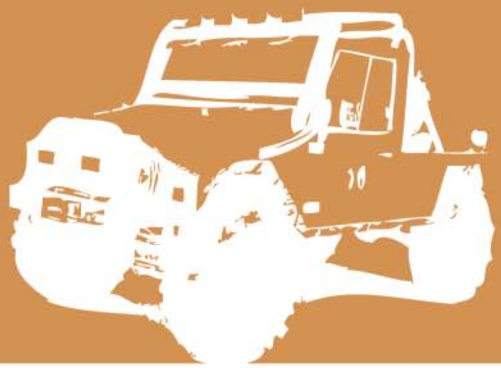


דיווחים מהשטח

"רכבת השוויונות" בכיתה ב'

חנה קלוז'ני

תלמידים רבים מגיעים ללימודי האלגברה בחטיבת הביניים עם תפישה בעייתית של מושג השוויון, כסימן שמייצג את התשובה לשאלה ולא כמייצג שקילות בין ביטויים. תפישה זו מקשה מאוד על לימודי האלגברה, ומהווה אחת מאבני הנגף של תלמידים כאשר הם עוברים מאריתמטיקה לאלגברה (Falkner, Levi & Carpenter, 1999). במהלך לימודי המתמטיקה בבית הספר, התלמידים נדרשים ל"עליית על התלמידים את "עליית המדרגה" היא להקנות יסודות איתנים של חשיבה מופשטת במהלך לימודיהם בבית הספר היסודי. אחד הנושאים של לימודי האלגברה בחטיבת הביניים סובב סביב הבנה של יחסים שקולים (Mollie & Kaye, 1999), מכאן החשיבות בהקניית הבנה יסודית בנושאים אלו, והבניית הבנה זו, תוך התחברות לחשיבה האינטואיטיבית.

מחקרים רבים מצביעים על קשיים של תלמידים בהבנת מושג השוויון. Falkner, Levi & Carpenter (1999), מתארים קשיים של תלמידי כיתה ח כשהם מתבקשים להצדיק את נכונות השוויון $45+34 = 46+33$. "תלמידים שתפסו את מושג השוויון כמבטא תוצאה של פעולה, הצדיקו את נכונות השוויון באמצעות פתרון נפרד של כל אגף בשוויון והשוואת התוצאות". בעיה זו מתועדת בספרות. "סימן השוויון קובע שהביטויים שמשני צדדיו שווי-ערך. לעתים קרובות ילדים סבורים שסימן השוויון מבטא פעולה" קופרמן (2011). החוקרים: Mollie & Kaye (1999), מתארים כיצד התלמידים תופסים את המשוואות: "הם רואים את הצד השמאלי של המשוואה כשאלה ואת הצד הימני כתשובה, שלפי ניסיונם הנה תמיד מספר יחיד. פירוש זה, אם הוא ממשיך גם בכיתות הגבוהות, מהווה מכשול רציני להבנה כיצד פועלים באלגברה. בביטוי האלגברי $2(x+1) = 2x+2$, למרות שתלמידים יכולים לפרש את $2(x+1)$ כשאלה, הרי ש- $2x+2$ אינו נראה כמו תשובה. במקום זה יש לנו ביטוי אודות שוויון: שתי הכמויות שוות וניתן להחליף אחת בשנייה אם צריך. תלמידים צריכים ללמוד כיצד לכתוב שוויונות". לפני עשור החלו אנשי החינוך המתמטי

בארץ, לחקור את הבנות התלמידים בנושא השוויונות. וייס, (2001), מתארת ניסוי אודות הבנה של התלמידים בכיתות השונות את השוויון $4+8=\square+5$.

בנוסף, היא מעלה במאמר את ההשערות לגבי מקור הטעויות הנפוצות של התלמידים בתפישה של שוויונות מתמטיים.

כל המחקרים הביאו להדגשת נושא השוויון גם בתכנית הלימודים החדשה במתמטיקה (תשס"ו, 2006), החל מכיתות א ו- ב (עמ' 22, 37, 38).

על-פי תפישתי, נכון לחשוף את התלמידים כבר בגיל צעיר לאפשרות של יצירת **שרשראות של ביטויים לוגיים שקולים,** תוך לקיחה בחשבון את הקושי של חלק מהתלמידים בגיל זה, להבין את ההיבט המתמטי של שרשרת השוויונות.

מהניסיון האישי

ניסיוני וניסיון עמיתיי מלמדים כי מדובר בבעיה אקוטית. ראשית, תלמידים רבים פותרים בעיות מילוליות רב-שלביות בעזרת רצף של תרגילים שבהם סימן השוויון הוא רק "תחנה" מחשבתית במעבר משלב לשלב. לדוגמה, בבעיה מהסוג: "בחנות סידרו משחקים. על כל אחד מ- 6 המדפים הניחו 27 משחקים, וליד הקופה הניחו 8 משחקים להדגמה. כמה משחקים סידרו בחנות?"

נראה לעתים את התרגיל הנ"ל: $27 \times 6 = 162 + 8 = 170$. בצורה דומה, תלמידים רבים בבתי-ספר יסודיים יגידו שהתרגיל (שוויון) 35-5=17+13 לא נכון, כי 35 פחות 5 לא שווה 17. למעשה, גם בכיתות ה-ו תלמידים רבים רגילים לראות ביטויים מתמטיים כתרגיל מצד שמאל ותשובה לו מצד ימין, ולפעמים מנסים לתקן אותי כשאני כותבת את התשובה בצד שמאל. תפישת "התרגיל והתשובה" מעמידה את התלמידים בפני קושי עצום, ולראיה, השאלה הנפוצה ביותר בעת לימוד שוויונות בכיתה ז היא: "איפה התשובה?".

הבעיה הנפוצה הזו מקשה מאוד על "עליית המדרגה" המחשבתית הנדרשת למעבר מאריתמטיקה לאלגברה. במאמר זה אביא שיעור (שנלמד כחלק מרצף שיעורים) שנועד "לזרוע" בתלמידי כיתה ב את ההבנה שהשוויון המתמטי מבטא יחס של שקילות. השיעור התנהל תוך השתתפות פעילה של התלמידים החזקים לצד המתקשים, והגעה עצמאית של התלמידים להכללות חשובות.

הרציונל של השיעור

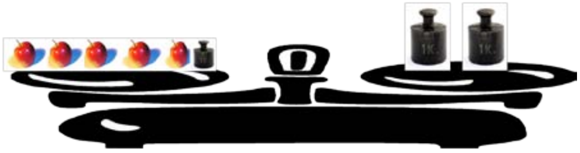
אחד הכלים המתאימים להבנת השוויון המתמטי הוא מאזני כפות. המאפיינים של מאזני כפות מביאים לידי ביטוי תכונות רבות של ביטויים אלגבריים. ראשית, אין "שאלה" ו"תשובה" וקיימת סימטריה פוטנציאלית בין צדי המאזניים. כמו כן, עבור כל צמד של "מטענים" בשני צדי המאזניים, ניתן להגדיר את היחס ביניהם - שוויון או אי-שוויון, ואם קיים אי-שוויון אזי ניתן להפכו לשוויון על-ידי הוספת "מטען" בצד הקל. במקרה של שוויון, ניתן לגלות משקל לא ידוע על-ידי השוואה למשקל ידוע על-ידי פתרון משוואה. אך גם אם איננו יודעים מה הם המשקלים המדויקים בכל אחד מהצדדים, ואיננו יכולים להגיע כלל ל"תשובה", עדיין ניתן להגדיר את היחס ביניהם, ולשמור על השוויון על-ידי הוספת משקלים זהים משני הצדדים.

עוד לפני מספר עשורים אנשים השתמשו במאזני כפות, והבינו את משמעות השוויון באופן אינטואיטיבי, וזאת משום שהיה צורך לשקול סחורה באופן מדויק, ובמצב בו לא היו מספיק משקולות מתאימות, היה אפשר לאזן את המאזניים בעזרת הנחת משקולות בשתי כפות

המאזניים. למשל, אם בכף הימנית יש שתי משקולות של קילוגרם (ראו איור 1), משקל התפוחים בכף השמאלית הוא פחות משני קילוגרם.

איור 1 - מאזניים לא מאוזנים

אפשר לאזן את התפוחים בעזרת הוספת משקולת של 3/4 קילוגרם בכף השמאלית - מכאן משקל התפוחים הוא: 2000-750 = 1250 גרם, כלומר, קילו ורבע. (ראו איור 2)



איור 2 - איזון מאזניים

אפשר כמובן "להתחכם" ולכתוב משוואה. אם משקל התפוח הוא x והתפוחים הם מתמטיים (שווי- משקל), אזי המשוואה היא:

1000 + 1000 = 750 + 5x. מכאן, משקל התפוח – 250 ג'. (עם תלמידים צעירים, ניתן לצייר תפוח במקום סימן הנעלם).

בשיעור שאתאר השתמשתי במאזני כפות ובקוביות עץ צבעוניות, שכל אחת מהן בגודל ובמשקל זהה (ראו איור 3), עם זאת, ניתן כמובן להשתמש בעזרים אחרים ובלבד שיהיו שווי-משקל, ושיתאימו לסוג המאזניים שיש בבית הספר.

איור 3 - קוביות עץ

לאחר הבהרת מושג השוויון התלמידים כתבו שוויונות במחברותיהם, בהמשך שיתפו זה את זה בתוצריהם על הלוח, תוך דיון ורפלקציה.

מהלך השיעור

ראשית, הצגתי בפני הכיתה את המאזניים, והצגתי את האנלוגיה לתרגיל - כל כף היא אגף בביטוי, ולשון המאזניים היא הסימן. הצגנו שוויונות שונים והבהרנו את הדמיון בין המצב

5 = 5 למצב 0 = 0.

כעת הוספנו מספר שונה של קוביות בכל צד, למשל, 3 קוביות בצד שמאל בלבד, ראינו כיצד מגיבים המאזניים. הסברתי את משמעות הסימנים >, < והבהרתי כי ניתן לתאר את המצב בתור 0 > 3. כעת הצגתי את האפשרות להגיע לשוויון על-ידי הוספת קוביות בצד ה"קל" (ימין).

בהמשך, הרחבנו את מושג השוויון והאי-שוויון ל"תרגילים": במידה ומוסיפים ל- 3 הקוביות בצד שמאל עוד 6 קוביות, האם נוצר מצב חדש? מחד, מספר הקוביות השתנה, מאידך הסימן נותר על כנו. מצב זה ניתן לתיאור גם באמצעות הביטוי:

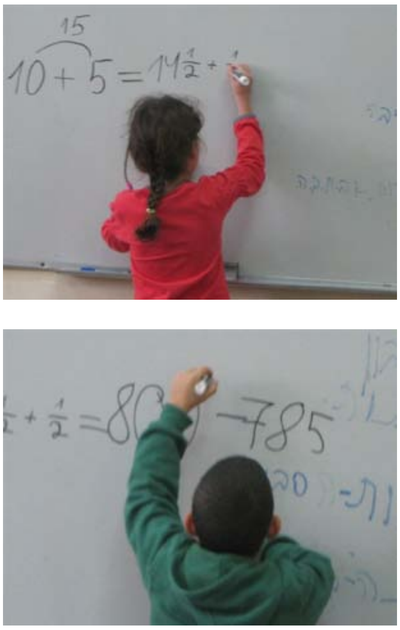
0 > 3 + 6.

בשלב הבא עבדנו על הלוח והתחלנו "להניח" על כל כף "תרגילים". השתמשנו בקוביות בצבעים שונים כדי להפריד בין מחוברים. אם ייצגתי על הכף הימנית את התרגיל 7+8, התלמידים היו צריכים לאזן את המאזניים בתרגיל אחר. הביטוי המתמטי נרשם על הלוח והמשימה שהועלתה

לפני התלמידים – איך נאזן את המאזניים? (ראו איור 4.)

איור 4 - מאזניים לא מאוזנים: 2+4 □ 3+6

התחלנו לבנות רצף של תרגילים שונים, השקולים לתרגיל הראשון על הלוח (רכבת תרגילים) וכאן היו הפתעות. חלק מהתלמידים הפגינו יכולת להתנתק מהמודל המוחשי והביעו רצון להציע תרגילים יצירתיים. הם העלו שאלות כמו: האם אפשר לבנות תרגיל חיסור? האם אפשר לבנות תרגילי כפל ואף חילוק? האם אפשר לחבר תרגילים עם שברים? (התלמידים נחשפו למושג ה"חצי" באמצעות פעילויות באתר סנונית.) (ראו איור 5.)



איור 5

מכאן התלמידים התמודדו עם בניית רכבת שוויונות במחברות שלהם – כל אחד לפי יכולתו והבנתו. המשימה נתנה אפשרות לביטוי עצמי בכיתה הטרוגנית, כך שחלק מהתלמידים כתבו רק תרגילי חיבור וחיסור, חלק השתמשו גם בפעולות כפל וחילוק, וחלק השתמשו בשבר של חצי, או ביותר מפעולה אחת בתרגיל.

כל תלמיד השתלב במשימה והרגיש את יכולתו לתרום לבניית הרכבת. בזמן העבודה עברתי בין התלמידים, ובניתי את הדיון שיתנהל לאחר מכן, במטרה לשתף את כל התלמידים בדוגמאות שכתבו תלמידים אחרים. בשלב זה של בניית הדיון תכננתי באיזה סדר ולפי אילו דגשים יש להביא את הדוגמאות שהתלמידים כתבו, תוך מתן ביטוי לתלמידים ברמות שונות.

התלמידים בכיתתי, עדיין לא למדו את חוקי סדר הפעולות, עם זאת, כל עוד השימוש האינטואיטיבי בתרגילים שיש בהם פעולות שונות היה נכון, הפעלתי שיקול דעת פדגוגי, ובשלב זה, לא התערבתי. אם הייתה טעות בכתיבה או בפתרון, תיקנתי אותה ואמרתי שנלמד את זה בקרוב.

לסיכום, ערכנו דיון כיתתי במהלכו הזמנתי תלמידים לכתוב את השוויונות שלהם על הלוח. בנוסף, ביקשתי מהתלמידים להעתיק למחברת תרגיל נוסף שהם אהבו במיוחד, ולשתף אותנו בסיבה לבחירת התרגיל. מעניין היה לשים לב שתלמידים רבים אהבו תרגילים מיוחדים שהם לא חשבו עליהם, כגון תרגילי חילוק ותרגילים עם יותר מפעולה אחת. הדבר מעיד על כך שבמהלך ביצוע המשימה הם התנתקו בהדרגה מהדוגמה המוחשית של המאזניים, והתחילו לחשוב בצורה יותר מופשטת. הם אף שילבו ברכבת השוויונות תרגילים עם שברים, שהם מעבר לתכנית הלימודים הפורמלית בכיתה ב (ראו איור 6, המתאר רכבת שוויונות שילדים כתבו על הלוח). לבסוף, הצגתי את השאלה:

"כמה שוויונות אפשר להוסיף לרכבת שלנו?" רוב התלמידים ענו: "אינסוף".

איור 6 - רכבת השוויונות

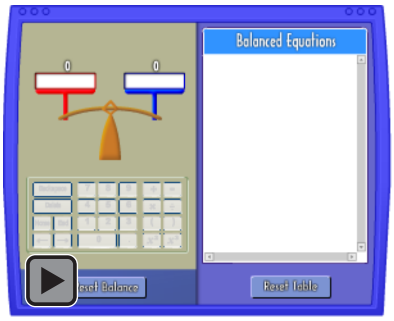
על הלוח רכבת שוויונות:

$$100:4-10 = 19-4 = 13+2 = 9+6 = 8+7 =$$

$$=10+5 = 14\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 800-785 = 5X3$$

הפעילות המתוארת, מהווה חוליה בשרשרת פעילויות שעסקה בנושא שוויונות.

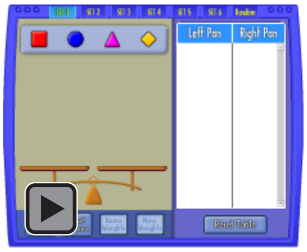
בהמשך, התלמידים עבדו ביישומון מאזני הכפות, חקרו ביטויי-שקילות במצבים נתונים (ראו איור 7), בנו מצבים של שוויונות ואי-שוויונות ביישומון, וכתבו שוויונות מתאימים במחברת.



איור 7 - יישומון מאזני כפות

לחצו על כדי להפעיל את היישומון.
היישומון לא נפתח? נסו בקישור הבא.

בשלב מאוחר יותר (סוף כיתה ב או בכיתה ג), התלמידים יעבדו ביישומון המשלב את הבנת המושגים שוויון ושקילות, ובצורה אינטואיטיבית גם את הבנת מושג היחס. (ראו איור 8.)



איור 8

לחצו על כדי להפעיל את היישומון.
היישומון לא נפתח? נסו בקישור הבא.

דיון

במאמר זה תיארתי שיעור שערכו הוא פיתוח חשיבה אלגברית והבנת רעיון השוויון, וזאת באמצעות מודל מוחשי - כפות המאזניים. בפעילות המתוארת הושם דגש על פיתוח עקרונות מתמטיים באמצעות התנסות, חיפוש, גילוי, בנייה ורישום ביטויים מתמטיים המביעים שוויון. השיעור עורר בתלמידים התלהבות ומוטיבציה לכתוב תרגילים יצירתיים, ותוך כדי כך הם שילבו תרגילים שהם מעבר לתכנית הלימודים הפורמלית לכיתה ב, כגון, תרגילים עם שברים.

שיעור מעין זה דורש הכנה מקדימה, וניהול של הדיון והעבודה במהלכו, בדרך שתעודד את הגילוי, הסקרנות והיצירתיות. חשוב לציין שהכוונת הדיון המתמטי הביאה את התלמידים להכללה חשובה – לכל תרגיל אפשר לכתוב אינסוף תרגילים שקולים.

התפישה הרווחת של מושג השוויון המתמטי בבתי הספר היסודיים היא תפישת ה"תרגיל והתשובה". תפישה זו עשויה לנבוע מגישה אל הוראת החשבון של מורים בבתי הספר היסודיים,

הרואים במקצוע הזה תחום המתמקד במציאת תשובות קונקרטיות לבעיות וחישובים קונקרטיים. לעתים מורים נוטים להשאיר את פיתוח מיומנויות החשיבה המופשטת ויכולות הכללה לכיתות גבוהות יותר, או לתלמידים בעלי יכולות גבוהות. על-פי תפישתי, ניתן לטפח מיומנויות חשובות אלה בקרב כל התלמידים. חשוב לעודד סקרנות ועניין בתלמידים, ולבנות בהדרגה יסודות מושגיים איתנים לאורך כל שנות בית הספר היסודי.

עניין נוסף חשוב בעיניי, על מנת להצליח להנחיל לתלמידים את המושג היסודי של השוויון, שיעור זה צריך להיות חלק מרצף ספירלי, שיימשך לאורך כל שנות הלימוד בבית הספר היסודי. שיעור אחד, ככל שיהיה מעמיק ומלהיב, לא בונה ידע ולא מקנה כישורי חשיבה אלגברית, אם אינו מקושר לנושאים שנלמדו קודם לכן, ואף אינו פותח צוהר למגוון נושאים שיילמדו בעתיד. השיעור המתואר במאמר לקוח מתוך רצף שיעורים ומפתח מיומנויות שהילדים כבר קיבלו בכיתה א.

וזו רק ההתחלה במסע אל האלגברה!

תודה מיוחדת למורה ליאת שחם על הצילומים ותיעוד השיעור.

מקורות

ווייס, ו' (2001). בעקבות המאמר: ההבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה. *מספר חזק 2000*, גיליון מס' 1. 30-33.

קופרמן, ר' (2011). *מתמטיקה של בית ספר יסודי*. הוצאת מעלות.

תכנית הלימודים במתמטיקה. ירושלים-התשס"ו, 2006.

יישומון מאזני כפות:

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=26

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?id=33

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics, 6 (4), 232-236.*

תרגום המאמר לעברית

Mollie, M., & Kaye, S. (1999). A Flying start to Algebra. *Teaching Children Mathematics. 6*(2). 78-85.

תרגום המאמר לעברית

חנה קלודז'ני
רכזת מתמטיקה ומורה למתמטיקה בבית הספר הפתוח בחיפה.
בוגרת מכללת "גורדון", התמחות בהוראת המתמטיקה, ובעלת תואר M.A. במוסיקה.