שיח מתמטי בסביבות משתנות: תלמידים מפתחים מושגים מתמטיים בקבוצה

חיותה רגב
ואילנה מרגולין

מבוא

האתגר העומד בפני מורי המתמטיקה הוא מורכב במיוחד, ודורש סוגים שונים של ידע, כמו גם, התמודדות עם המתחים והסתירות בין יציבות לבין גמישות, בין פירוק הפרקטיקה ליחידות קטנות לבין שמירה על שלמות הדיסציפלינה. רבים ממורי המתמטיקה עדיין מלמדים באופן אינסטרומנטלי, מתמקדים בחישובים טכניים ובהכנות לקראת מבחני הישגים. לפיכך, למרות ההתקדמות במחקר בתחום החינוך המתמטי, חסר ידע מפורט באשר לפרקטיקה, ובעיקר לאופן בו ניתן להתמודד עם אתגרים ודילמות בשיעורי המתמטיקה. מאמר זה מדגים התמודדות עם הבעייתיות הזו באמצעות חקר מקרה בבית ספר יסודי, המתמקד בשיח לימודי מתמטי בקבוצה קטנה של תלמידים.

שיח מתמטי

שלושה סוגי ידע שזורים זה בזה בהוראת הדיסציפלינות:

1. **ידע תוכן**: מקיף הבנה מעמיקה של הרעיונות הגדולים של הדיסציפלינה, כמו גם של המושגים המדעיים שלה, תהליכים ויחסי גומלין ביניהם.
2. **ידע פדגוגי**: כולל ידע אודות הקוריקולום ומשימות ליבה בהוראה, בעיקר יכולת לתרגם ידע תיאורטי לידע פרקטי, ליצור פיגומים ולהדגים אותו לתלמידים.
3. **ידע לומדים**: משמעותו העיקרית היא היכרות עם האופן בו מפיק כל לומד משמעות מן הלמידה, זיהוי שגיאות ותפיסות שגויות של תלמידים ושימוש בהן כמנוף לחשיבה.

הדגש בהוראת המתמטיקה מושם על יכולתו של המורה להתאים הן את התוכן והן את שיטות ההוראה לידע הקודם של התלמידים,

ולהוביל לחשיבה ולביצוע באמצעות הוראה אינטראקטיבית (Grossman & McDonald, 2008; Hiebert & Morris, 2009; Lampert, & Graziani, 2009).

באופן ספציפי לגבי המתמטיקה, אחת מהדרכים המרכזיות להוראה יעילה היא זימון סיטואציה המאפשרת שיח מתמטי משמעותי בכיתה. ניהול שיח לימודי דורש שזירה של כל שלושת סוגי הידע לכדי מארג אחד, כדי לסייע להבניית הידע של התלמידים וחשיבה עליו, כמו גם קישורם לרעיונות מתמטיים גדולים. שטיין, אנגל, סמית ויוגס (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), מציעים מודל בן חמישה מרכיבים לקידום דיון מתמטי בכיתה: א. צפייה מראש של תשובות התלמידים והכנת תגובות הולמות, ב. מעקב אחרי תגובות התלמידים במהלך הדיון המתמטי בכיתה, ג. בחירה בתלמידים מסוימים להצגת התגובות המתמטיות שלהם בפני הכיתה, ד. עריכת התגובות ברצף, ה. קישור בין תגובות התלמידים לבין "רעיונות גדולים" במתמטיקה.

גם בול, סליפ, בוארסט ובאס (Ball, Sleep, Boerst, & Bass, 2009) מדגישים כמה מהמרכיבים שהוזכרו במודל, ומצביעים על ארבעה מאפיינים של דיון מתמטי פורה בכיתה שלמה: א. המשימה המוגשת צריכה להיות נגישה לתלמידים ומתאימה לדיון, ב. התחלת הדיון צריכה לאפשר הבנה מהירה וריכוז כל התלמידים סביבה, ג. הדיון צריך להיות ממוקד ברעיון מתמטי, ד. המסקנות הנובעות מן הדיון צריכות להיות קשורות להיבטים של הפעילות המתמטית, ולעודד נורמות פרודוקטיביות של דיון מתמטי. אין להסתפק במהלך הדיון בהתייחסות בלעדית לביצועים מתמטיים.

בעוד שטיין ואחרים (2008) ובול ואחרים (2009) מתארים מודלים ומאפיינים של דיון מתמטי כדרך הוראה מרכזית וכאמצעי להוראת המתמטיקה, ספרד (Sfard, 2007) מעריכה את השיח כָּאובייקט המרכזי של הלמידה, ומתייחסת ללמידת מתמטיקה כאל שינוי בשיח של הלומדים.

המסגרת הקומוגניטיבית

ספרד (Sfard, 2007, 2008) רואה במתמטיקה צורה של תקשורת ודוחה את ההפרדה בין חשיבה לבין תקשורת. כדי להדגיש את האחדות הזו היא יצרה שם תואר חדש - קומוגניטיבי, על-ידי חיבור שני המושגים קוגניציה וקומוניקציה. לימוד מתמטיקה, לפי גישה זו הוא שינוי השיח המתמטי של הלומד.

ספרד (Sfard, 2007) מתייחסת למילים ולשימוש בהן כאל אחד מארבעת המאפיינים המרכזיים של השיח. שלושת המאפיינים האחרים של השיח הם: מתווכים ויזואליים, נרטיבים מתמטיים, ושגרות (routines). שינויים בכל אחד מן המאפיינים הללו מצביעים על התפתחות ועל ידע של הלומדים. אסטרטגיה רבת עצמה ללמידה על-פי הגישה הזו היא יצירת קונפליקט קומוגניטיבי. קונפליקט זה יעורר בלומד תחושה של חוסר עקביות באשר להבנה שלו את הנושא המתמטי, ויגרום לו להכיר בצורך בשינוי. הלמידה ברמת על (meta-level) תתחולל, קרוב לוודאי, כאשר הלומדים ייחשפו לדרכים שונות של חשיבה ולאסטרטגיות שונות, וישוו אותן לדפוסי החשיבה המקורית שלהם תוך עימות אתן. במהלך שיח כזה, הלומדים יפיקו משמעות מן החשיבה שלהם ושל עמיתיהם, וכך יבינו את ההיגיון הפנימי של השיח (Sfard, 2007). לאור הדברים הללו, תפקיד המורה כמתווך הוא מרכזי, בעיקר בניהול השיח ועירור הקונפליקטים הקומוגניטיביים.

המטרה הרחבה של "חקר מקרה" במאמר זה היא: לבחון, לאור הספרות המחקרית, את

הדרכים בהן תכנית הכשרת המורים במכללה מפתחת מורים עתידיים ומורים ותיקים, המיישמים את העקרונות של הבניית ידע מתמטי באמצעות שיח לימודי.

ההקשר והמשתתפים

חקר מקרה זה התרחש כחלק מתכנית ניסויית חדשנית להכשרת מורים, במסגרת שותפות בין מכללה להכשרת מורים (PDS - professional development school) לבין אחד מבתי הספר היסודיים, שהפך לבית ספר להתפתחות מקצועית של מורים וסטודנטים (מסטורוב, 2010; מרגולין וצלרמאיר, 2005). המקרה המתואר במאמר הוא דוגמה הלקוחה מהוראת המתמטיקה בכיתות ד בבית ספר יסודי במרכז הארץ. באופן ספציפי יותר, המאמר מתמקד בשיח המתמטי, ובעיקר בשינוי הדרמטי שחל בו מהוראה מסורתית פרונטלית בכיתה שלמה, לשיח פתוח קונסטרוקטיביסטי, בו הידע נבנה על-ידי הלומדים בקבוצה קטנה בתיווך המורה.

שיטה ומקורות הנתונים

בחרנו במתודולוגיה של חקר מקרה, מחמת היות המחקר חקירה אמפירית החוקרת תופעה בתוך ההקשר של החיים האמיתיים שלה. תופעה זו מאפשרת לערוך מחקר עומק של אירוע יחיד, בסביבה בה מיטשטשים הגבולות בין השיח בשיעור ספציפי בקבוצה קטנה, לבין סביבת הלמידה של הכיתה כולה (Yin, 2003). הנתונים נאספו במהלך שנת לימודים אקדמית אחת משלושה מקורות:

1. 150 תעתיקים של תצפיות בשיח מתמטי בכיתות ד שניהלו המורות, המדריכה הפדגוגית, והסטודנטים. את התצפיות הקליטו ותמללו הסטודנטים.
2. תמלולים של 30 הקלטות של מפגשים במסגרת הקורס של "חקר ההתנסות".
3. מחקרי פעולה של 18 סטודנטיות והמורות המאמנות שלהן.

באמצעות תהליך דיאלקטי בין הנתונים לבין הספרות המחקרית, הגדרנו ארבעה מאפיינים מרכזיים של השיח, שחזרו על עצמם: מטלת הלמידה הפתוחה והמאתגרת; השימוש בשפה מתמטית מדעית מדויקת; השימוש במתווכים ויזואליים הולמים; שגרות כמו: שאלות, הסברים, הנמקות וקונפליקט קומוגניטיבי כחלק אינטגרלי מן השיח.

כדי לתקף את הממצאים קראנו את כל התעתיקים של הקורס "חקר ההתנסות", ואת מחקרי הפעולה של הסטודנטים והמורים. ניתחנו את החומרים המתועדים וזיהינו בהם אסטרטגיות מרכזיות בהן השתמשו המורים:

א. הפעלת שיקול דעת בבחירה ובניסוח מטלות הלמידה;

ב. תיווך באמצעות שאלות של הבהרה והסבר במקום העברת מידע;

ג. הפעלת שיקול דעת בבחירה ובשימוש במתווכים ויזואליים;

ד. עירור קונפליקטים קומוגניטיביים;

ה. זגזוג בעזרת כל האמצעים הללו בין מושגים אינטואיטיביים לבין רעיונות ומושגים מדעיים, במילים אחרות, ניעה הלוך ושוב בין המושגים הספונטניים, המוכרים לתלמידים, לבין מושגים מתמטיים פורמליים (רגב, 2010).

לבסוף, בחרנו להדגים את השיח באמצעות מקרה אחד של שיעור ושל שיחת המשוב,

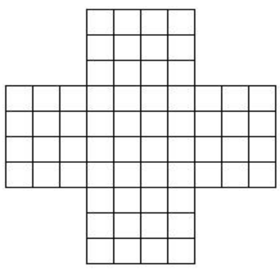
שהתקיימה כחלק מהשגרה בבית הספר, לאחר השיעור. השיעור ושיחת המשוב מייצגים את הממצאים המרכזיים.

ממצאים

בפרק זה מוצגת דוגמה של שיח שהתנהל בכיתה ד בת 35 תלמידים. דוגמה זו מאפיינת את סוגי השיח המתמטי המתרחשים תדיר בבית הספר המתואר למעלה. התלמידים עובדים בקבוצות קטנות בנות כ – 6 תלמידים כל אחת, כאשר המורה מלמדת כל פעם קבוצה אחת (כעשרים דקות), והתלמידים האחרים בכיתה עובדים בסביבת מחשב.

המטרה בהוראה בסביבות משתנות, משולבות תקשוב, היא לפתח ולהעצים את השיח המתמטי בקרב התלמידים כדי לקדם את החשיבה המתמטית. שילוב התקשוב מזמן לתלמידים פעילות אינטראקטיבית, ולמורה - אמצעי לקידום שיח מתמטי פורה ושימוש באסטרטגיות מטה-קוגניטיביות להבנת דרכי החשיבה והביצוע של התלמיד.

בתחילת השיעור הקרינה המורה על הלוח צורה (ראו איור 1).



איור 1: הצורה שהוקרנה על-ידי המורה [1]

[1] מתוך פעילות בתכנית "עת הדעת מערכות חינוך".

המורה המאמנת (ורד) מבקשת מהתלמידים לפתוח במחשבים האישיים את המסך בו מוצגת הצורה, ומאפשרת להם בעבודה אינטראקטיבית מול המחשב, במהלך מספר דקות, למצוא את שטח הצורה, כל אחד בדרכו שלו. המורה מדגישה, שעליהם להציג ולהסביר לקבוצה את פתרונם ואת הדרך בה הגיעו אליו.

משימת ההוראה שנבחרה

המשימה שנבחרה מאפשרת סיטואציה בה מופיעים מושגים מתמטיים ורעיונות גדולים. יתירה מכך, היא פתוחה, מתאימה לשיח, ובעלת פוטנציאל לחשיפה ולהצגה של אסטרטגיות מגוונות אפשריות לפתרונה. יש לה מטרה מתמטית מוגדרת היטב - הבנת המשמעות של המושג "שטח" של צורות מורכבות, ואבחנה בין המושג "שטח" לבין המושג "היקף". המשימה נגישה לכל התלמידים בקבוצה, על בסיס היכרות המורה עם הידע הקודם שלהם, ומודעותה לטווח ההתפתחות הקרובה שלהם (ZPD- zone of proximal development) (Vygotsky, 1986).

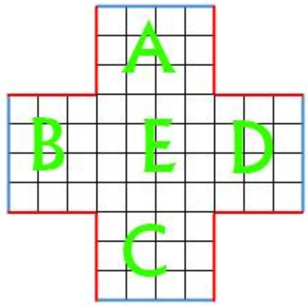
המורה מנהלת את השיח עם קבוצה בת 6 תלמידים (ערד, ניר, תמי, טל, נטע ורעי), בעוד שאר תלמידי הכיתה חוקרים את הסוגיה בקבוצות שלהם ודנים בה.

במהלך החקירה של התלמידים את המשימה, המורה קשובה, אוספת מידע, ומתכננת את הרצף בו יוצגו תגובותיהם. היא פונה לערד: ספר לי בבקשה, איך מצאת את השטח של הצורה.

ערד: אני חישבתי את השטח של הקובייה הזו (מצביע על המלבן המסומן באיור 2 באות A).

ורד (המורה): האם אתה מתכוון לשטח של המלבן?

ערד: כן, ועשיתי 4 פעמים ארבע כפול שלוש, כי יש 4 כאלה (4 מלבנים של 3 על 4 [השטח שלהם]), והוספתי את החלק באמצע [השטח שלו] שזה 4 כפול 4.



איור 2: תגובה ראשונה של התלמידים

ורד: מה דעתכם? (פונה לתלמידים בקבוצה).

ניר: לא הבנתי.

ורד: מי יכול להסביר מה עשה ערד?

ניר: אה (מסתכל בצורה), זה נכון, אני כבר מבין למה 4 פעמים.

ורד: איך אפשר לכתוב זאת בשפה מתמטית? (פונה לניר).

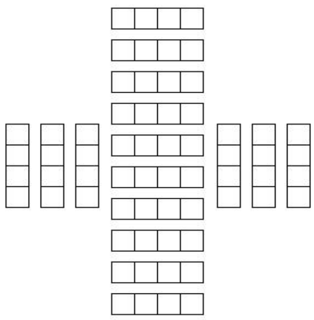
ניר: מכתיב (כולל סוגריים) והמורה רושמת על הלוח: 4X(4X3)+4X4

ורד: צריך סוגריים?

ניר: לא, כי כפל קודם לחיבור, ובכפל פותרים לפי הסדר הכתוב.

כנקודת פתיחה לשיח בחרה המורה באסטרטגיה הנכונה של ערד, וביקשה ממנו להציגה ולהסבירה לחבריו. ערד השתמש בסרטוט של הצורה כדי להסביר את דרך הפתרון שלו, אך קרא ל"מלבן" "קובייה". המורה הזכירה לתלמידים, שיש להשתמש במושגים המתמטיים הנכונים ובהצביעה על המלבן הדגישה את המושג הזה בשאלה את ערד, אם הוא התכוון לשטח המלבן. לאחר מכן היא שאלה את התלמידים, מה הם חושבים על תגובתו של ערד. ניר לא הבין את האסטרטגיה שהציג ערד, אך המורה השהתה את תגובתה, כדי לאפשר לו להתבונן בצורה שוב ולחשוב מחדש על ההסבר של ערד. ואכן, ניר התבונן והבין זאת בעצמו. כדי להבטיח שהוא אכן הבין ולהדגים את התשובה לתלמידים, השתמשה המורה במתווך ויזואלי נוסף: היא ביקשה מניר לחשוב על פסוק מתמטי המייצג את התשובה. בנצלה את הפסוק שהכתיב ניר ובשאלה בדבר הסוגריים בתוכו, גרמה המורה לניר לחזור על אחד הכללים של סדר פעולות החשבון, לפני שפנתה לתלמיד הבא. יחד עם זאת היא לא התעכבה על המשפט "בכפל פותרים לפי הסדר הכתוב", ולא הביאה את התלמידים להבנה, שהכוונה היא, כי בכפל הסדר בין גורמי הכפל לא חשוב (קיים חוק החילוף).

טל: אני ספרתי כמה משבצות בשורה וחיברתי אותן: 4 ועוד 4 ועוד 4, 16 פעמים.



איור 3: תגובה שנייה של התלמידים

ורד רושמת ושואלת את טל: ככה?

4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4

(ר' איור 3).

טל: כן.

ורד: מה דעתכם?

נטע: זה גם נכון, אבל זה המון פעמים 4.

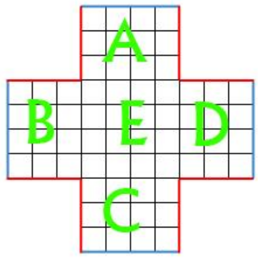
ורד: אז זה נכון או לא נכון?

ערד: זה דומה לתשובה שלי, רק אני הכפלתי כל 4 והיא ספרה אותם.

האסטרטגיה השנייה הייתה פשוטה, והמורה תרגמה אותה על הלוח על-ידי פסוק מספרי. אחד התלמידים הצביע על החיסרון של שימוש בדרך זו.

אחרי שתי האסטרטגיות האלה המורה הזמינה את ניר להציג את הדרך שלו, דרך שהייתה שגויה.

ניר: אני עשיתי שמונה כפול שלוש (מצביע על שמונה הקווים האדומים בצורה, איור 4), ועוד ארבע כפול ארבע (מצביע על הקווים הכחולים).



איור 4: תגובה שלישית של התלמידים

ורד: רגע, אני רושמת: 8X3+4X4, מה דעתכם?

טל: רגע... זה לא נכון, זה לא יכול לצאת 64.

ורד: אנחנו מדברים על דרכים שונות למציאת השטח, ואתה אומר שזה לא יוצא, אז אולי יש טעות בחישוב והדרך נכונה? מה דעתכם?

המורה מנסה לעורר קונפליקט קומוגניטיבי בין שני המושגים ביניהם התבלבל ניר – שטח והיקף – בהתעקשה על הדרך, גם אם החישוב שגוי.

ערד: רגע, זה לא השטח זה מסביב.

ורד: מה זאת אומרת מסביב?

ערד: זה ההיקף.

תמי: אני לא מבינה כלום.

ורד: מי יכול להסביר מה הבעיה. מה ההבדל בין הדרך של ערד לדרך של ניר?

ערד: תראי, הוא חיבר 8 פעמים את הקו הזה (מצביע על הצלעות האדומות של הצורה באיור 4) והוסיף 4 פעמים את הקו הזה (מצביע על הצלעות הכחולות של הצורה) וזה לא השטח.

ורד: איך קוראים ל"קו" הזה בצורה?

נטע: צלע.

ורד: כמה צלעות יש לנו בצורה?

התלמידים סופרים וצועקים: 8, 12, לא, 12.

ורד, פונה לתלמידים: אתם מתכוונים שהוא חיבר 8 פעמים את הצלע האדומה ו– 4 פעמים את הצלע הכחולה (המורה מצביעה על הצלעות)?

ערד: כן, אמרתי שהוא חישב את ההיקף (מצביע בסרטוט על הקווים של ההיקף).

ורד פונה לתמי: האם את אתנו? סכמי בבקשה את ההבדל בין ההצעה של ערד לבין ההצעה של ניר (המורה מצביעה על הפסוקים המתמטיים של השניים).

תמי: ערד מצא את השטח של כל מלבן וחיבר את כולם וניר חיבר את הצלעות.

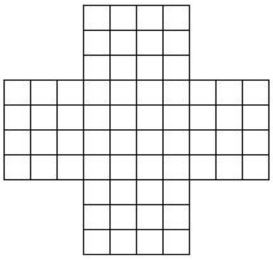
ערד: הוא מצא את ההיקף.

התייחסות לתשובות שגויות שונות

המורה החליטה להציג את התגובה השגויה אחרי שתי תשובות נכונות, וחשפה בלבול שכיח בין שני מושגים. הדבר דומה לבלבול השכיח בין חישוב היקף על-ידי ספירת יחידות אורך, לבין חישוב שטח על-ידי ספירת משבצות (יחידות שטח). בלבול מסוג זה מופיע במאמרן של שיפטר ואובריאן (Schifter & O'Brien, 1997). גם כאן המורה ניצלה את ההזדמנות כדי לחדד את ההבדל בין מושג ההיקף לבין מושג השטח. האסטרטגיה נראית כביכול נכונה ודומה לתשובה הראשונה, אך הראשונה הייתה כפל של צלע אחת במלבן בצלע השנייה, ואילו בתשובה הזו הצלע הוכפלה במספר הפעמים שבהן היא הופיעה. במילים

אחרות, שימוש בכפל כחיבור חוזר של אורך הצלעות, כלומר, מציאת היקף.

המורה אף השתמשה במתווכים ויזואליים וביקשה מהתלמידים להסביר את הנמקותיהם על-ידי הדגמתן בסרטוט. כשתלמיד לא הבין את התגובה, המורה הובילה אותו למצוא את התשובה בעצמו. במקרה זה, הסרטוט שימש כפיגום לזיהוי הטעות ולמציאת התשובה הנכונה.



איור 5: תגובה רביעית של התלמידים

תמי: אני ספרתי את הריבועים וקיבלתי 63.

ורד: מה אתם חושבים?

טל: היא חישבה.

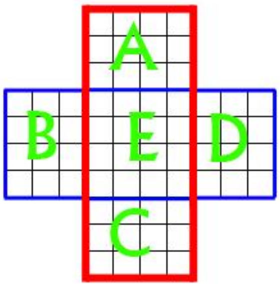
ורד: מה דעתכם?

ניר: כן, אבל...... (מפסיק באמצע).

טל: כן, אבל אפשר גם כך.

ורד: גם זו דרך לגיטימית, אבל אנחנו יכולים לטעות בספירה, תבדקי שוב אם זה 63.

כאן המורה מאשרת את הדרך, אך מזהירה מטעות אפשרית בספירה ומרמזת על אסטרטגיות יעילות יותר ופחות.



איור 6: תגובה חמישית של התלמידים

נטע: לי יש דרך נוספת. אני חישבתי את השטח של המלבן הזה (מצביעה על המלבן הכחול באיור 6) 10 כפול 4 ואת המלבן הזה (מצביעה על המלבן האדום) וחיברתי.

ורד: האם את מתכוונת ל- 10 כפול 4 ועוד 10 כפול 4? מה דעתכם?

ניר: זה לא כל כך נכון.

ורד: במתמטיקה יכול להיות "לא כל כך נכון"?

ניר: אז זה לא נכון, כי היא ספרה את האמצע פעמיים. צריך רק מלבן אחד גדול - 10 כפול 4, ועוד 3 כפול 4 ועוד פעם 3 כפול 4.

ורד פונה לתמי: מה דעתך?

תמי: לא יודעת.

ורד: תנסי להכתיב לי את התרגיל המתאים (המורה מדגישה בצבע את ההצעה של נטע).

תמי: (סופרת את השורות) 10 כפול 4.

ורד: ומה נשאר עוד?

תמי: 4 כפול 3 ועוד פעם 4 כפול 3.

ורד: כלומר (היא רושמת) 10X4+3X4+3X4 האם אפשר לכתוב זאת בקיצור?

תלמידים: למה את מתכוונת?

ורד: האם אפשר לכתוב את הפסוק המתמטי הזה בדרך קצרה יותר?

תמי: כן, 10 כפול 4 ועוד 3 כפול 4 כפול 2: 10X4+3X4X2

ניר: צריך סוגריים.

תלמידים צועקים: לא צריך.

ורד: צריך או לא צריך?

תלמידים: זה כפל, וכפל עושים לפי הסדר שכתוב.

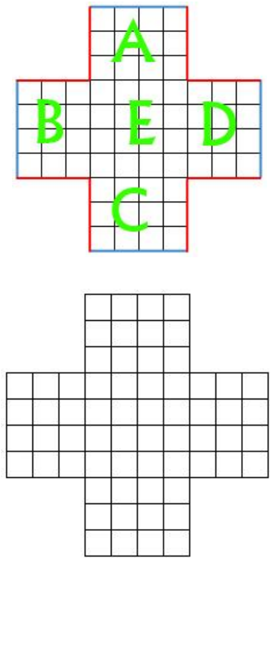
התפיסה השגויה של נטע קשורה לאי-הבנה של הרעיון, ששטח צורה הוא סכום השטחים של כל חלקיה. שוב, המורה תיווכה בתהליך הבנת מושג השטח על-ידי הובלת תלמיד אחר להסביר את השגיאה, ולהסיק את האסטרטגיה הנכונה. ניר הבחין בכך שנטע חישבה את הריבוע המרכזי במלבן פעמיים. המורה הזכירה שוב את הכלל של סדר פעולות החשבון, על-ידי כך ששאלה אודות השימוש בסוגריים, אך שוב לא דנו בניסוח הנכון בהקשר לחוק החילוף בין גורמי הכפל, והמורה לא דנה באופן מפורש בתשובה השגויה, ולא הדגישה את החישוב הכפול של הריבוע המרכזי.

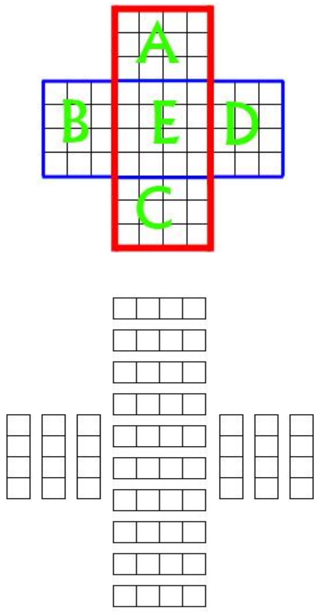
השיעור הסתיים בסיכום שביקשה המורה מהתלמידים.

ורד: מי רוצה לסכם את השיעור שלנו?

רעי: ראינו, שיש הרבה דרכים לחישוב שטח.

ורד מקרינה את הצורה המקורית והֶרכבים אחרים שלה, שמייצגים את תגובות התלמידים (איור 7).





איור 7: כל ארבע הצורות

ורד: אלו הן הדרכים בהן מצאתם את שטח הצורה. מה שונה ומה דומה בין הדרכים השונות?

ערד: לכולם הייתה אותה צורה.

טל: כל אחד פתר בדרך אחרת.

ורד: במה היא אחרת? ולמה זה נכון?

ניר: כל אחד פירק את הצורה לחלקים שונים בדרך שונה.

רעי: אבל ביחד זו אותה צורה, לא חשוב איך מפרקים אותה, העיקר שלא עושים פעמיים אותו דבר.

ורד: המסקנה היא שכדי למצוא שטח של צורה ניתן לפרק את הצורה לחלקים בדרכים שונות, ואז שטח הצורה הוא סכום שטח כל החלקים שלה.

בשיעור הבא נתחיל מנקודה זו: אני אציג את 4 הצורות שמייצגות את האסטרטגיות השונות שלכם, וננסה להבחין ביניהן ולראות אילו יעילות יותר או פחות.

למורה לא נותר זמן לשמוע את הרעיונות והמושגים של השיעור מהתלמידים במילים שלהם, כדי להעריך את הבנתם, דבר שהיא

בדרך כלל עושה, לפיכך, החליטה לחזור לכך בשיעור שלאחר מכן.

שיחת המשוב

לאחר כל אחד מהשיעורים מתנהלת שיחת משוב המוקדשת לניתוח השיעור שנצפה על בסיס התיעוד שערכו הסטודנטים. בשיחה משתתפים מורי המתמטיקה בבית הספר והסטודנטים המתמחים במקצוע זה, ומנהלת אותה המדריכה המתודית למתמטיקה.

החלק הבא מסכם את ההערות המרכזיות של המדריכה המתודית, הנוגעות לאסטרטגיות בהן השתמשה המורה בשיעור.

- הרעיון המרכזי של השיעור היה, שאפשר למצוא שטח צורה על-ידי פירוקה והרכבתה מחדש בדרכים שונות מבלי לשנות את השטח. אולם, היה חסר עיסוק מפורט ומוגדר במושג שטח, שהוא אחד הרעיונות הגדולים של הדיסציפלינה. התלמידים ניסו לחבר צורות שונות באופן אינטואיטיבי, מבלי להבין את הרעיונות המתמטיים המצויים בשטח. המעבר בין תשובות אינטואיטיביות של חיבור צורות לנרטיב מתמטי של מציאת השטח ולא רק חישובו עדיין לא נידון לעומק.

- המושגים המרכזיים בשיח היו: צורה, שטח, היקף, מלבן, צלע וסדר פעולות חשבון. אלה הם מושגים שהתלמידים כבר למדו, אך אין משמעות הדבר שהם יודעים להשתמש בהם באופן נכון. לפיכך, עלינו לנצל כל הזדמנות כדי להמשיך ולבנות את המשמעות של המושגים על-ידי זגזוג בין המושגים המדעיים לבין המושגים האינטואיטיביים של הילדים. הזגזוג התרחש באופן מזערי במהלך השיעור, אם כי המשימה זימנה שיח מעמיק על מושגים ספציפיים באפשרה דרכים מגוונות לפתור את הבעיה. אולם, הזדמנות זו לא נוצלה במידה מספקת.

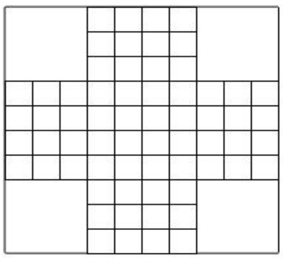
- המורה רצתה להיות בטוחה באמצעות פירוש התגובות, שהתלמידים הבינו את משמעות המושגים. על בסיס זה היא עוררה קונפליקט קוגניטיבי על-ידי הצגת אסטרטגיה שגויה באמצעותה היא הבהירה 2 מושגים: שטח והיקף.

השימוש בשני המתווכים הוויזואליים שימש אמצעי להבנות מושגים ספציפיים. הסרטוטים של הצורה וחלקיה, היו חשובים מאוד וקידמו את השיח. התלמידים השתמשו בהם כדי להראות ולהוכיח את ההנמקות שלהם ולהדגים את פתרונותיהם, והמורה השתמשה בהם כדי להדגים, להסביר ולזגזג בין המושגים האינטואיטיביים של התלמידים לבין המושגים המדעיים. כיוון שהמורה צפתה מראש את הפתרונות השונים הנכונים והשגויים של התלמידים, היא הכינה מתווכים ויזואליים תוך ניצול הסביבה המקוונת. היא יצרה את הצורה כולה, כמו גם את הצורות המפורקות של כל אחת מהתגובות המצופות, כדי לסייע לתלמידים להבין אותן ולהשוות ביניהן. לכן, הסרטוטים השונים הדגימו באופן ברור את הרעיון המרכזי של השיעור: ניתן למצוא שטח של צורות מורכבות בדרכים רבות על-ידי פירוקן לתת-צורות, אותן התלמידים כבר למדו.

המתווך הוויזואלי השני, הפסוקים המתמטיים, הוא מתווך חשוב, שיכול לוודא את ההבנה של התלמידים ולאפשר מעבר לייצוג מתמטי, ובכך להדגים נרטיב

מתמטי. חשוב לציין, שמטרת השיעור התייחסה לדרכים שונות למציאת שטח, ולכן ההתייחסות לתוצאות חישוב השטח היא משנית. יחד עם זאת, היה מקום להתייחס (כבר בתגובה הראשונה) לשאלה מדוע בכלל מתאים תרגיל הכפל של 4 כפול 3. ייתכן והקשר בין כפל אורך של צלע אחת במלבן באורך הצלע השנייה, לבין מציאת השטח של המלבן אינו מובן.

כיוון שאחת המטרות המשמעותיות של הוראת המתמטיקה היא להעשיר את רפרטואר האסטרטגיות של התלמידים, ובכך להעמיק את התובנה המתמטית, המדריכה הפדגוגית רצתה להציג אסטרטגיה אפקטיבית נוספת. לפיכך, היא העלתה את השאלה, אם כדאי להציג בפני התלמידים אסטרטגיה שאיש מהם לא חשב עליה. היא הציגה את הצורה מוקפת על-ידי ריבוע (איור 8).



איור 8: אסטרטגיה נוספת

בצורה זו יש לחשב את שטח הריבוע (10X10) ואז להחסיר את שטח ארבעת הריבועים שנוצרו בצדדים (3X3)4 - 10X10.

ההחלטה להציג אסטרטגיה חשובה נוספת, שאיש לא השתמש בה, תלויה בהקשר של השיעור, דהיינו בזמן שנותר, במיקוד המטרה, בטווח ההתפתחות הקרובה של התלמידים ועוד. יתירה מכך, התפיסה של אסטרטגיה זו היא שונה מכל הפתרונות האחרים, כיוון שהיא מדגימה אפשרות שהתלמידים לא חשבו עליה (ייתכן, שאילו הייתה המורה מבקשת מהתלמידים לחשוב על דרכים מעניינות נוספות, הייתה עולה גם הדרך הזו): להשלים את הצורה לצורה אחרת (במקרה זה לריבוע), שאת שטחו הם כבר למדו לחשב, ולהחסיר את השטחים של הריבועים המיותרים, וזאת, במקום לפרק את הצורה לתת-צורות שהם כבר יודעים לחשב.

דיון

הנחת היסוד של מאמר זה היא שהוראת מתמטיקה אינה רק רכישה של אוסף פרוצדורות ונוסחאות, אלא טרנספורמציה בדרך החשיבה והשפה באמצעות שיח מתמטי. טענתנו היא: שכדי להשיג את המטרה של שינוי השיח בקרב התלמידים, ולעורר שיח מתמטי משמעותי, וכדי להכשיר מורים עתידיים למשימות אלה, צריכים להתקיים מספר תנאים הכרחיים ומספיקים בבית הספר בכלל ובכיתות בפרט. להלן פירוטם.

קבוצות קטנות בכיתה

שיח מתמטי משמעותי, בו המורה יכולה להתבונן בעיסוקו של כל תלמיד במשימה, לזהות את טווח ההתפתחות הקרובה שלו, כמו גם את התפיסות השגויות שלו, ולהתייחס אליהם כדי לאפשר הבניה של מושגים ורעיונות, יכול להתרחש בקבוצות קטנות. בדיון המקובל בכיתה השלמה רק לחלק מן התלמידים ניתנת ההזדמנות לבטא את מחשבותיהם, או לחשוף את תפיסותיהם הנכונות או השגויות בפומבי. במצב זה למורה יש אפשרות מוגבלת לזהות את הקשיים של התלמידים ולהתייחס אליהם. בנקודה זו התחולל השינוי העיקרי והדרמטי ביותר בתרבות בית הספר המתואר: במקום הפינג-פונג המסורתי של שאלה תשובה, המורים

למדו להקצות זמן לחשיבה ולא לצפות לתשובה נכונה מידית של התלמידים. הם הפכו את התלמידים לשותפים מלאים בשיח, מתַקשרים, מגיבים לעמיתים וחושפים את קשייהם. בעוד המורה עובדת עם קבוצה אחת, שאר התלמידים חוקרים או מתרגלים באופן אינדיבידואלי או בקבוצות קטנות, פנים מול פנים או באמצעות תוכנת מחשב. כיוון שהשיח הוא אינטנסיבי וקצר באופן יחסי, המורה יכולה לעבוד עם יותר מקבוצה אחת בכל שיעור. הנורמות הסוציו-מתמטיות והשגרות התומכות בחקר השיתופי, ועבודת הקבוצה של התלמידים, בה תומכים המבוגרים המלמדים בשיתוף בכיתה, בנו בבית הספר תרבות שונה מזו הרווחת בשיעורים פרונטליים מסורתיים.

אסטרטגיות של תיווך

מעבר לידע המתמטי של המורים והידע שלהם את תלמידיהם, ועל בסיס סביבת הלמידה שתוארה, עליהם לדעת, כיצד לתווך בין המושגים המתמטיים והרעיונות הגדולים לתלמידיהם.

זיהינו חמש אסטרטגיות מרכזיות, שהמורים למדו כדי להוביל שיח מתמטי משמעותי:

1. מטלת הלמידה שנבחרה לשיעור הייתה פתוחה, מאתגרת, בטווח ההתפתחות הקרובה של התלמידים, וזימנה דרכי חשיבה רבות ושיח משמעותי.
2. המורים הקפידו על שימוש בשפה מתמטית מדעית מדויקת וזגזגו בין המושגים האינטואיטיביים היומיומיים של התלמידים, לבין המושגים והרעיונות המתמטיים המדעיים של הדיסציפלינה.
3. המורים צפו מראש את התפיסות השגויות האפשריות של התלמידים ואת השגיאות האופייניות בכל נושא ועודדו את חשיפתן. המורים השתמשו בטעויות אלה ובתפיסות השגויות כאמצעים למנף את הדיון, כדי להתאים את האסטרטגיות של התלמידים לידע המתמטי, ולסייע להם בבניית מושגים מתמטיים.
4. השימוש במתווכים ויזואליים בסביבה מתוקשבת היה קריטי כדי לתווך ולהדגים את המושגים ואת הרעיונות. בדוגמה שלנו המורה השתמשה בסרטוטים של הצורה, ובדרכים שונות שהתלמידים הציעו כדי למצוא את השטח. היא אף עברה בין ייצוגים שונים והשתמשה בביטויים מתמטיים כדי להבהיר ולוודא, שהתלמידים אכן הבינו את המושגים.
5. שגרות, כמו שאלות, הסברים, טיעונים וקונפליקט קומוגניטיבי, היוו חלק מהותי של השיח. הדפוס החוזר בשיח המתואר הוא תגובות המורה לאסטרטגיות התלמידים. היא כמעט תמיד החזירה את השאלה למגיב, או לקבוצה כולה, במקום להשיב ולהסביר בעצמה. מטרתה הייתה שהמשתתפים יחשבו על האסטרטגיה המוצגת, יעמתו אותה עם האסטרטגיה שלהם, יאשרו את הבנתם, או יחשפו את טעויות החשיבה שלהם. תגובות המורה הזמינו הבהרות, אימות, דיוק במושגים, או שאלות החושפות הסכמה או אי-קבלה, כדי לעורר קונפליקטים.

השלכות לגבי הכשרת מורים

לאור כל זאת משתמע, שלא די בשינוי משמעותי בהכשרת המורים למתמטיקה, אלא בד בבד עם שינוי זה יש צורך לבנות תרבות אחרת בבתי הספר: תרבות המטפחת חשיבה ומזמנת שיח קונסטרוקטיביסטי בין לומדים.

תרבות כגון זו יכולה להיווצר באמצעות שותפויות בין מכללות להכשרת מורים לבין בתי ספר, שותפויות הבונות יחד קהילות מקצועיות לומדות, המאפשרות שיח בר-קיימא בין סגל אקדמי, למורים, לסטודנטים, ולתלמידים (מרגולין וצלרמאיר, 2005; רגב, 2005, 2010). רק על-ידי התעדכנות מתמדת, עיסוק בלמידה לאורך החיים, צבירת התנסויות ותובנות באמצעות דיאלקטיקה בין תיאוריה לפרקטיקה בכל הרמות, יכולים מורים לגרום ללמידה משמעותית. פרחי הוראה אמורים לקבל את הכשרתם בתרבות כגון זו מן היום הראשון של לימודיהם במכללה, ולהבין שזהו הצעד הראשון שלהם בהתפתחותם המקצועית לאורך חייהם. תוצאות המחקר שהוצג במאמר זה מצביעות על הצורך לבנות תרבות שונה בבתי הספר, בד בבד עם הכשרת המורים – תרבות המעודדת חשיבה ויוצרת שיח מתמטי בין לומדים.

מקורות

מסטורוב, ח' (2010). כשהפרקטיקה והאקדמיה נפגשות. בתוך א' מרגולין (עורכת), *מעבר לנהר: נתיב הכשרה רב מסלולי – הכשרת מורים כרב שיח*, (עמ' 552 – 580). תל אביב: מכון מופ"ת ומכללת לוינסקי לחינוך.

מרגולין, א' וצלרמאיר, מ' (2005). (עורכות). *בגוף ראשון: עמיתות מכללה – שדה. קובץ מחקרים עצמיים*. תל אביב: מכון מופ"ת ומכללת לוינסקי לחינוך.

רגב, ח' (2010). תהליך היווצרות מושגים "מדעיים" במתמטיקה בקרב תלמידים ומורים בבית הספר היסודי. בתוך א' מרגולין (עורכת), *מעבר לנהר: נתיב הכשרה רב מסלולי – הכשרת מורים כרב שיח*, (עמ' 331 – 359). תל אביב: מכון מופ"ת ומכללת לוינסקי לחינוך.

רגב, ח' (2005). הדרכה כהפעלת רשת של קהילות שיח: הדרכה מתודית בתחום המתמטיקה. בתוך: א' מרגולין, ומ' צלרמאיר (עורכות), *בגוף ראשון: עמיתות מכללה – שדה. קובץ מחקרים עצמיים*, (עמ' 265-294). תל אביב: מכון מופ"ת ומכללת לוינסקי לחינוך.

רגב, ח' ושמעוני, ש' (2000). לשוחח מתמטיקה - מדוע? למה? ואיך?, *על"ה 25*, 77-89.

Ball, D. L., Sleep, L., Boerst, T. A., & Bass, H. (2009). Combining the development of practice and the practice of development in teacher education. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 458-474.

Grossman, P., & McDonald, M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal*, *45*(1), 184-205.

Hiebert, J., & Morris, A. K. (2009). Building a knowledge base for teacher education: An experience in k-8 mathematics teacher preparation. *The Elementary School Journal, 109*(5), 429-441.

Lampert, M., & Graziani, F. (2009). Instructional activities as a tool for teachers' and teacher educators' learning. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 491-509.

Schifter, D. E., & O'Brien, D. C. (1997). Translating Principles into Practice. *Teaching Children Mathematics*, *4*(4) , 202-205.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of Learning Sciences, 16*(4), 567–615.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language*. Cambridge, MA: MIT Press.Yin, R. K. (2003). *Case study research, design and methods*, 3rd ed. Newbury Park: Sage Publication.

חיותה רגב
מרצה וחוקרת בתחום החינוך המתמטי במכללת לוינסקי לחינוך. מובילה תהליכי שינוי בתחום המתמטיקה לבית הספר היסודי, בדגש על שיח מתמטי משמעותי ובאמצעות בניית סביבות למידה משתנות.

פרופ' אילנה מרגולין
מרצה בכירה במכללת לוינסקי לחינוך במסגרת התואר השני. תחומי ההוראה והמחקר שלה הם: למידה והוראה, תכנון לימודים והתפתחות מקצועית של מורים.
כמו כן, מעורבת ביוזמות לשינוי ולהתחדשות בקרב מפקחים ומנהלים במחוז המרכז.