ערכים מדויקים של π במקורות היהדות

בועז צבאן ודוד גרבר, המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב, אוניברסיטת בר-אילן

מאז ומעולם הייתה שאלת היחס בין היקף העיגול לקוטרו (יחס זה מסומן כיום באות היוונית π, וערכו המקובל הוא ...3.141592) אחת השאלות המרתקות ביותר בתחום המתמטיקה, והעסיקה מדענים ואנשי מעשה בעבר ובהווה. שרידים מניסיונות חוזרים ונשנים להתמודד עם השאלה אנו מוצאים לא רק בספרות המתמטיקה היוונית, אלא גם בספרות העתיקה של ההודים, הסינים, הבבלים והיהודים. כאן נתמקד בשתי סוגיות תלמודיות, המתמודדות עם נושא זה (לדיון מעמיק יותר ראו רשימת המקורות בסוף מאמר זה).

הקירוב ל π נדון בתלמוד הבבלי (עירובין י"ד:א). במשנה שם מובא הכלל "כל שיש בהיקפו שלושה טפחים, יש בו רוחב טפח", ומכאן שהיחס בין היקף עיגול לקוטרו הוא 3. דעתם של חכמי התלמוד אינה נוחה ממשנה זו, כיוון שידועים להם ערכים "יותר מדויקים" ל π, ולכן מתפתחת שקלא וטריא שלא נפרטה כאן. החשוב לענייננו הוא, שרבי יוחנן מפנה אותנו לפסוק בתנ"ך אשר ממנו נלמד הכלל (מלכים א', ז' כ"ג):

> וַיַּעַשׂ אֶת־הַיָּם מוּצָק עֶשֶׂר בָּאַמָּה מִשְּׂפָתוֹ עַד־שְׂפָתוֹ עָגֹל סָבִיב וְחָמֵשׁ בָּאַמָּה קוֹמָתוֹ וקוה [וְקָו] שְׁלֹשִׁים בָּאַמָּה יָסֹב אֹתוֹ סָבִיב׃

רבים תמהו על הנוסח המסורבל, לכאורה, של הפסוק, ובמיוחד משכה את תשומת לִבם ה"ה" היתרה במלה "קו" (כתיב "קוה" וקרי "קו"). מהו המידע הנוסף שמנסה כותב הפסוק למסור לנו? כיוון שמדובר בקירוב ל π , יש להניח כי מסתתר כאן קירוב "טוב יותר" מ-3, וכיוון שהערכת "שגיאות" מתבצעת תמיד על ידי פרופורציות, נוכל לשחזר קירוב מדויק יותר ל π מתוך הכתוב. הדבר מתבצע בצורה הבאה: נסמן ב- π_{HEBREW} את הערך המדויק יותר ל π וב π_0 את הערך 3 הנמסר לנו בפשט הפסוק, אזי:

$$\frac{\pi_{HEBREW}}{\pi_0}=\frac{\text{קו}}{\text{קוה}}=\frac{111}{106}\Rightarrow \pi_{HEBREW}=3\text{x}\frac{111}{106}=3.141509...$$

(קו = 106 בגימטריה. קוה = 111 בגימטריה.)

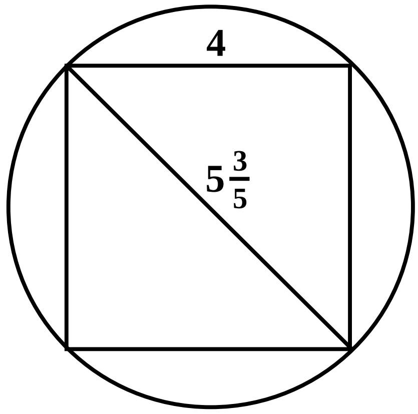
והרי לנו קירוב נפלא! (למקור הרעיון וסימוכין מדרשיים לעניין זה, ראה סעיף(2) ברשימה הביבליוגרפית) אם נניח שאכן הייתה לחכמים האפשרות להשתמש בערכים מדויקים יותר עבור π, יהיה עלינו להסביר מדוע בכל הסוגיות התלמודיות מוזכר הערך 3.

רבי שמעון בן צמח דוראן (ספרד 1361 – אלג'יר 1444) בספרו התשב"ץ (תשובות שמעון בן צמח, חלק א' סימן קס"ה), מספק לנו את ההסבר: החכמים אמנם ידעו את הערכים המדויקים, אולם כדי להקל על תלמידיהם את הלימוד, השתמשו בערכים מקורבים, לקיים "לעולם ישנה אדם לתלמידו בדרך הקצרה" (תלמוד בבלי, פסחים ג:ב; ס"ג:ב). מכל מקום, כאשר בא הדבר לידי מעשה, **ערכו החכמים את החישובים בעזרת הערכים המדויקים**.

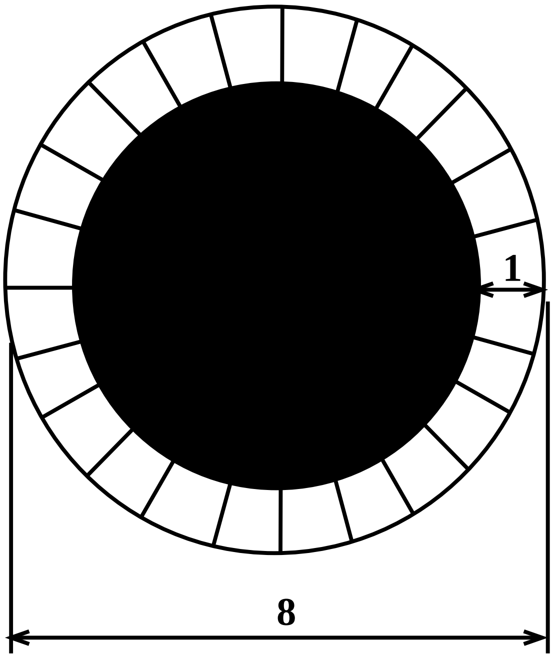
כדי להבין זאת, נפנה לסוגיית "סוכה עגולה" (תלמוד בבלי, סוכה ז:ב – ח:ב, ועיין במקור [1]). רבי יוחנן, בהסתמך על הכלל שסוכה ריבועית כשרה צריכה להיות 4x4 אמות, אומר: "סוכה עגולה, אם יש בהיקפה כדי לישב בה כ"ד בני אדם – כשרה, ואם לאו – פסולה". הגמרא מוצאת את היקף הסוכה העגולה החוסמת סוכה ריבועית בגודל 4x4 אמות (ראה איור 1).

כיוון שאורך אלכסונו של ריבוע גדול פי $1\frac{2}{5}$ בקירוב (הערך המדויק הוא $\sqrt{2}$) מצלע הריבוע, עולה שאורך האלכסון הוא $1\frac{2}{5}\cdot 4=5\frac{3}{5}$. השלב הבא בחישוב הוא מציאת היקף העיגול בעל קוטר זה. לאור הכלל הנזכר לעיל לגבי היחס שבין היקף עיגול לקוטרו, ההיקף הוא: $16\frac{4}{5}=3\cdot 5\frac{3}{5}=5\frac{3}{5}\cdot\pi_0$. שיעור זה עדיין רחוק מאד מהשיעור שנקט רבי יוחנן, ולכן רב אסי מבאר את דברי רבי יוחנן: 24 האנשים יושבים מחוץ לסוכה, בצורה המתוארת באיור 2, כאשר כל מקטע מציין את מקום מושבו של אדם אחד (מובן שהם יושבים שם לצורכי מדידה בלבד, שכן הסוכה הכשרה עצמה היא העיגול המרכזי המושחר). לפי הכלל "גברא באמתא יתיב" (=המקום שאדם תופס בישיבתו הוא אמה), ההיקף החיצוני של הסוכה הוא 24 אמות.

מכאן, שקוטר המעגל החיצוני הוא $8=\frac{24}{\pi_0}$ (על פי הכלל שהשתמשנו בו קודם, שהיחס בין היקף המעגל לקוטרו הוא $\pi_0=3$). כדי לקבל את קוטרו של המעגל הפנימי (המושחר), יש לחסר שתי אמות (אמה מכל צד) שהן מקום מושבם של האנשים, ולכן קוטר המעגל הפנימי הוא 6 אמות. לפי הכלל שהיקף המעגל הוא פי 3 מקוטרו, נקבל כי ההיקף הוא $6\cdot\pi_0=18$ אמות, שזה קצת יותר מההיקף הדרוש שחושב קודם ($16\frac{4}{5}$).



איור 1



איור 2

הסבר זה, כפי שהוא כתוב, צורם מאד, משום שאילו דרש רבי יוחנן, ש– 23 אנשים ישבו בצורה הנ"ל (במקום 24 אנשים), היה מתקבל הערך 17 ($(\frac{23}{\pi_0}-2)\pi_0=23-2\pi_0=17$) שהוא הרבה יותר קרוב ל– $16\frac{4}{5}$.
מדוע, אם כן, הקפיד רבי יוחנן לדרוש דווקא 24 אנשים (ופסל ב– 23 אנשים, כלשונו "ואם לאו – פסולה")? מה עוד, שרבי יוחנן עצמו ידוע היה כמי שמקפיד מאוד בדבריו, דבר הבא לידי ביטוי בדרשתו: "'אמור לחכמה אחותי את': אם ברור לך הדבר כאחותך שהיא אסורה לך – אמרהו, ואם לאו – אל תאמרהו" (תלמוד בבלי, שבת קמ"ה:ב).
הפתרון לבעיה זו נמצא בדברי **רבי שמעון בן צמח הנ"ל: רבי יוחנן בחישוביו השתמש בערכים מדויקים יותר.**

אם לדוגמא ניקח את הערך $3\frac{1}{7}$ עבור היחס שבין היקף המעגל לקוטרו, נקבל שההיקף של סוכה עגולה כשרה (החוסמת סוכה ריבועית בגודל 4x4 אמות) הוא: $4\cdot1\frac{2}{5}\cdot3\frac{1}{7}=17\frac{3}{5}$ (שכן אלכסון הריבוע הוא כמו קודם $1\frac{2}{5}\cdot4=5\frac{3}{5}$, וכעת, כדי לקבל את ההיקף, נשתמש ביחס החדש $3\frac{1}{7}$ לקבל שההיקף הוא $5\frac{3}{5}\cdot3\frac{1}{7}=17\frac{3}{5}$). אם נשתמש עתה בשיטת רבי יוחנן על פי הבנתו של רב אסי לעיל, נקבל שההיקף שדורש רבי יוחנן הוא $17\frac{5}{7}$, שהוא ערך קרוב ביותר לערך 18 הדרוש.
הקירוב שלמדנו מהפסוק בתחילת המאמר על היחס שבין היקף עיגול לקוטרו נכנס עתה לתמונה: אם ניקח את π_{HEBREW} , וערך $1\frac{2}{5}+\frac{1}{100}=1.41$ עבור היחס שבין אלכסון הריבוע לצלעו (שהוא ערך יותר מדויק עבור $\sqrt{2}$), נקבל שההפרש בין היקף הסוכה לפי דברי רבי יוחנן לבין ההיקף המחושב ישירות (על ידי חישוב ההיקף של הסוכה החוסמת ריבוע של 4x4 אמות) הוא כ– 0.00113 אמות בלבד! ואילו כאשר ביצענו "היפוך של הבעיה" (היינו, יצאנו מפתרון הבעיה – שאין הפרש בין ההיקף לפי הסברו של רבי יוחנן להיקף שחושב ישירות, וחיפשנו עבור אילו ערכים של היחסים הנ"ל הדבר מתקיים), גילינו שהערכים האופטימליים להסבר דברי רבי יוחנן קרובים מאוד לערכים שהצענו כאן (ראה סעיף (5) ברשימה הביבליוגרפית).
לסיכום, קשה לקבוע אם רבי יוחנן אכן ידע את הערך π_{HEBREW} הנ"ל, אולם סביר מאוד להניח שערכים קרובים ל π היו ידועים לו, והוא אף השתמש בהם בחישוביו.
זוהי דוגמא נוספת לאותם מקרים, שבהם דברי חכמים נראים בלתי מדויקים בקריאה ראשונה, אך עיון נוסף מגלה לנו כמה מחושבים ומדויקים הדברים.

מאמרים נוספים (מאת כותבי המאמר) לעיון נוסף:
(1) **סוכה עגולה**, מגל י', תשנ"ד, 117–134.
(2) **סוכה עגולה** (ב), מגל י"א, תשנ"ה, 127–134.
(3) **כוורת**, המעין ל"ה ג', תשנ"ה, 57–69.
(4) **כל שיש בהיקפו**, הגיון ג', תשנ"ו, 103–131.

(5) On the rabbinical approximation of π, *Historia Mathematica* 25 (1998), pp. 75-84.
[6] A Mechanical derivation of the area of the sphere, *The American Mathematical Monthly*, 108 (2001) pp. 10-15.