



במה מחקרית

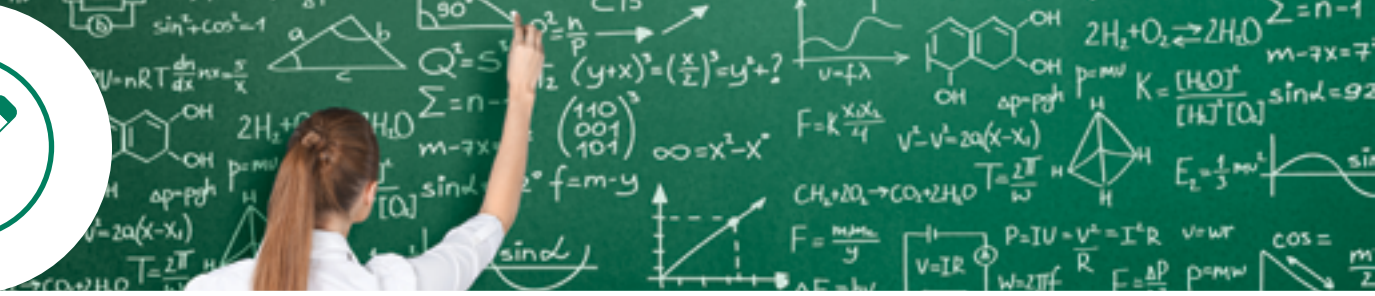
## מה בין תרגיל ודרך כתיבת פתרונו?

ד"ר מיכל סרי

"האקדמית גורדון" -  
המכללה האקדמית לחינוך, חיפה

חנה סביון

"האקדמית גורדון" -  
המכללה האקדמית לחינוך, חיפה



## מה בין תרגיל ודרך כתיבת פתרוננו?

מיכל סרי וחנה סביון

### תקציר

מורים למתמטיקה המלמדים בכיתות ז' מספרים לא פעם שעם תחילת לימודי האלגברה, התלמידים נתקלים בקושי שנראה במעבר מפתרון תרגיל חשבוני לכתיבה אלגברית של ביטויים ופישוטם. לימודי המתמטיקה בכיתות ז' נפתחים בחזרה ובהעמקה בחוקי החשבון המוכרים מבית הספר היסודי, לשם שילובם בכתיבה האלגברית וגם ליצירת תשתית ללימודי האלגברה. הקושי הנ"ל מתגלה תוך כדי החזרה שמבססת מיומנויות חישוב וידע של ביצוע פרוצדורות אריתמטיות, אשר מובילות למיומנויות אלגבריות המתבססות עליהן. מתוך קושי זה צמח המחקר. מטרתו להציג התייחסויות של מורים בחינוך היסודי והעל-יסודי לפתרון תרגיל חשבוני, המכיל שני סוגי סוגריים וארבע פעולות חשבון במספרים שלמים ולפתח כלי עזר למורים, שבעזרתו יוכלו לבחור את הדרכים בהן ילמדו את תלמידיהם מיומנויות חישוב, ידע וכתיבת פתרון תרגיל חשבוני לפי סדר פעולות חשבון. במחקר השתתפו תלמידי כיתות ו' שפתרו את התרגיל החשבוני ומורים למתמטיקה המלמדים בכיתות ו' ו-ז'. מממצאי המחקר פותחה טבלת "כלי החלטה" למורים ובלטה התייחסותם השונה של מורי בית הספר היסודי לעומת מורי בית הספר העל-יסודי בהקשר להכנת התלמידים לכתיבה אלגברית.

מילות מפתח: סדר פעולות חשבון, שוויון, שקילות, תרגיל חשבוני.

### מבוא

רכישת מושגים בחשבון המתייחסים לפעולות חשבוניות במספרים וחוקי סדר פעולות חשבון בחינוך היסודי על פי תכנית לימודי המתמטיקה, היא מטרה בהוראת המקצוע. הבנת המושגים בחינוך היסודי היא תוצר מתמשך ומצטבר של הלמידה (משרד החינוך - תכנית הלימודים במתמטיקה, 2006). על

הוראת פעולות חשבוניות וחוקי סדר פעולות החשבון להיבנות בהדרגתיות. ההדרגתיות בהוראה מובילה לתובנה מספרית ולשליטה במיומנויות מתמטיות תוך שימוש בעובדות, באלגוריתמים חישוביים ובמושגים מתמטיים הנלמדים בחינוך היסודי. טיפוח תובנה מתמטית ושליטה במיומנויות מתמטיות, מפתחים אצל התלמידים יכולת לעקוב אחר תהליך פתרון של תרגיל, מונעים שגיאות ומשפרים את היכולת לקשר בין חלקי ידע שנלמדו (ליפוביזקי, 2007; על מנת להקטין את הסיכוי שתלמידים יטעו בשימוש בחוקי סדר פעולות החשבון, יש לנסח את החוקים באופן מתמטי או מילולי. ניסוח החוקים מיועד לתלמידים שלהם קושי בזכירת חוקי סדר פעולות החשבון וגם לתלמידים שביצועיהם המתמטיים טובים באופן יחסי מעמיתיהם לכיתה (יבשובה, 1988-1990; Schifter, Russell and Bastable, 2009).

סדר פעולות החשבון הוא סוגיה דקדוקית הנובעת מהצורך למנוע תשובות שונות לאותו תרגיל ושואפת להיות נוחה לקריאה ולכתיבה. את חוקי סדר פעולות החשבון ניתן לחלק לשני רבדים: הרובד הראשון מתייחס לחוקים כמו "חזקה" שקודמת לכל פעולות החשבון האחרות, או כפל וחילוק הקודמים לחיבור וחיסור. הרובד השני מתייחס לחוקים כמו פתרון "משמאל לימין" (בתרגיל בו מופיעות פעולות חיבור וחיסור או כפל וחילוק). החוקים המשלבים את שני הרבדים, מובילים לתשובה נכונה (צמיר וקורן, 2004; קופרמן, 2015; Bay-Williams and Martinie, 2015; (Dr. Math, 2000; Kyungsoon, 2012).

דרך מפורטת לחישוב תרגילים, מסדרת את תהליך הפתרון ומפתחת אצל התלמידים חשיבה מתמטית (Carey, 1992). נוסף לכך, ניתן לעודד את התלמידים לחשב בדרכים שלהם, כך שלא יוותרו על דרך חשיבה עצמית



## מטרות המחקר

- א. להציג תיאורים של מורים למתמטיקה בחינוך היסודי ובחינוך העל-יסודי לתרגיל חשבוני המשלב סדר פעולות חשבון ופתור על ידי תלמידי כיתות ו'.
- ב. לפתח למורים כלי עזר המשקף מגוון אפשרויות של דרכי כתיבת פתרון תרגיל, כך שלפיו יוכלו המורים לכוון ולמקד את תלמידיהם לכתיבת הפתרון.

## אוכלוסיית המחקר

- 158 תלמידי כיתות ו' (להלן: תלמידים).
- 20 מורים המלמדים מתמטיקה בחינוך היסודי בכיתות ו' (להלן: מורים בחינוך יסודי).
- 15 מורים המלמדים מתמטיקה בחט"ב בכיתות ז' (להלן: מורים בחינוך על-יסודי).
- כל המורים הינם בעלי ותק של לפחות 4 שנות הוראת מתמטיקה בכיתות ו' ו-ז' כמתואר לעיל. חלקם של המורים מחנכי כיתה.

## כלי המחקר

במחקר כל אחד מהמורים קיבל כ-9 פתרונות של תרגיל חשבוני המכיל שני סוגי סוגריים וארבע פעולות חשבון במספרים שלמים.

## מהלך המחקר

המחקר נערך בשלושה שלבים עיקריים:

### שלב ראשון:

פתרון תרגיל חשבוני על ידי תלמידים. בסוף שנת הלימודים קיבלו תלמידי כיתות ו' תרגיל חשבוני בו משולבים שני סוגי סוגריים וארבע פעולות חשבון במספרים שלמים. פתרון התרגיל התבסס על חוקי סדר פעולות חשבון. המורים בכיתות ביקשו מהתלמידים לפתור את התרגיל ולכתוב את הפתרון בכל דרך שנראית להם.

לתלמידים הוסבר כי פתרון התרגיל נועד לצרכי מחקר, הם התבקשו שלא לכתוב את שמם והודגש בפניהם

על תלמידים המדלגים (Kamii and Dominick, 1998). לפחות שלב אחד, יכולים לפתח דרך פתרון שגויה, גם אם הם שומרים על כללי סדר פעולות חשבון. אם תלמידים לא שומרים על חישובים "משמאל לימין", הם יכולים להגיע למצב של חוסר הבנה של הכללים (זסלבסקי, 2003; Soares, Blanton and Kaput, 2005-2006). תלמידים המתארים את תהליך הפתרון באמצעות סימון מספרי של חלקי התרגיל או על ידי חישובים חלקיים, תוך כדי שמירה על מבנה התרגיל המקורי וחוקי סדר פעולות חשבון, מפתחים חשיבה מתמטית בעלת משמעות רבה (Ameis, 2011; Rambhia, 2002; Wiebe, 1989). תוספת של סוגריים בפתרון תרגיל להדגשת סדר החישוב, לעתים מיותרת ולעתים עוזרת לחישוב נכון לפי חוקי סדר פעולות החשבון (Gunnarsson, 2016). סימן ה"שווה" מהווה מושג בסיסי לפיתוח חשיבה מתמטית אצל ילדים (Oksuz, 1998) ומשמעותו היא שקילות ולא פעולה שאותה יש לבצע (פישביין, 1995). הבנת משמעות סימן השוויון חשובה גם במעבר מאריתמטיקה לאלגברה ויוצרת את הבסיס להבנת משוואות ואי שוויונות (Leavy, Hourigan and McMahon, 2013). במעבר מאריתמטיקה לאלגברה אי הבנת השוויון מהווה מכשול בפישוט ביטויים אלגבריים (Falkner, Levi and Carpenter, 1999; Powell, Kearns and Driver, 2016).

פתרון תרגיל על פי חוקי סדר פעולות חשבון, הנכתב בשלבים המקושרים ביניהם בעזרת סימן "שווה", מציג שלכל שני ביטויים מתמטיים יש אותו ערך מספרי (Falkner, Levi and Carpenter, 1999). ישנם תלמידים המשתמשים בסימן ה"שווה" באופן שגוי כדי לקשר בין שלבים בתוך חישוב, לדוגמה בפתרון התרגיל:  $5+23=28 \times 3=84$ . התלמידים כותבים את תהליך החישוב כאילו חישובו אותו בעזרת מחשבון. סימן השוויון במקרה הזה מתפרש כ"חשב את הפעולה האחרונה" ולא כמקשר בין שני ביטויים בעלי אותו ערך מספרי השקולים זה לזה (פישביין, 1995; Kieran, 1981; MacGregor and Stacey, 1999).



- המזכירים את המראה החיצוני. השמות הם:
- כתיבה בחלקים
  - שימוש בקשתות
  - כתיבה אופקית
  - כתיבה אנכית
  - כתיבה משולבת (כתיבה המהווה שילוב של לפחות שתיים מארבע הקבוצות שלעיל)

### חלוקה שנייה

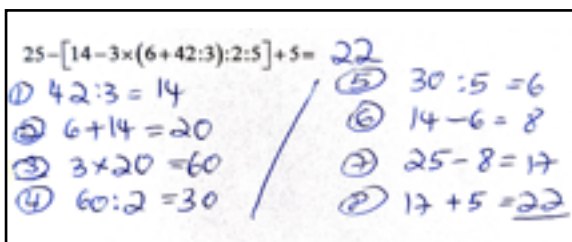
בה רוכזו תיאורי המורים ל"דרך כתיבת פתרון" התרגיל החשובי. הדוגמאות הבאות מציגות תרגילים לפי החלוקה הראשונה - לחמש הקבוצות של "מראה חיצוני". לכל איור (ראו מטה) של תרגיל פתור, הותאמו ציטוטים נפוצים של מורים מהחינוך היסודי ומורים מהחינוך העל-יסודי, המתארים את "דרך כתיבת פתרון" של התרגיל.

### (א) כתיבה בחלקים:

#### בכל שלב התלמיד פותר חלק של התרגיל לפי חוקי סדר פעולות החשבון

המאפיין העיקרי הוא, שכל פעולה נרשמת ומחושבת כחלק של תרגיל נפרד (עצמאי). התלמיד רושם את תהליך הפתרון על ידי מיני-תרגילים מתחת לתרגיל או לצדו.

### איור א



ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי: "התלמיד מחשב 'מיני תרגילים' רבים וממספר אותם"; "עבודתו מסודרת וניכרת שליטתו בסדר פעולות החשבון"; "רואים כל פעולה

שאף אחד לא ידע מי פתר אותו. כל התלמידים הסכימו לפתור את התרגיל.

### שלב שני:

תיאור הפתרון על ידי המורים. הפתרונות חולקו לצורך תיאורם בין 35 מורים. כל מורה קיבל בממוצע תשעה פתרונות שונים וכל פתרון תואר על ידי שניים מהמורים. ההנחיה שקיבל כל מורה הייתה: "לכל אחד מפתרונות התרגיל שלפניך, תאר בכתב את המראה החיצוני שלו ותאר את דרך כתיבת פתרונו לפי ראות עיניך".

כל אחד מהמורים שהסכימו להשתתף במחקר, התבקש לא לכתוב את שמו והובהר והודגש בפניו שלא יופיע שום פרט מזהה לגביו.

### שלב שלישי:

מיון תיאורי המורים לפי ההנחיה שקיבלו לחלוקות המתוארות בממצאי המחקר.

## ממצאי המחקר

מתוך תיאורי המורים למראה חיצוני ולדרך כתיבת פתרון של תרגיל חשובי, מוינו הממצאים לשתי חלוקות עיקריות, לפי המקרא הבא.

### מקרא

- "מראה חיצוני" - תיאור המראה החיצוני של הפתרון שבוצע על ידי תלמידים. המורה הבדק מתייחס למראה הפתרון מבחינת צורתו החיצונית (ראה חלוקה ראשונה להלן) וזאת לפני שהמורה קורא ובדק את הפתרון.
- "דרך כתיבת פתרון" - תיאור דרך הכתיבה של הפתרון על ידי התלמידים (ראה חלוקה שנייה להלן).

### חלוקה ראשונה

בה רוכזו תיאורי המורים ל"מראה חיצוני" של פתרון תרגיל חשובי. בתיאורי המורים המתייחסים ל"מראה חיצוני" ניכרה חלוקה לחמש קבוצות. בחרנו לכנות אותן בשמות



### שימוש בקשתות: (ב) שימוש בקשתות בפתרון תרגיל

#### איור 1ב

התלמיד נעזר בקשתות כדי לחשב חלקים מהתרגיל וכל קשת מסמנת פתרון של חלק מסוים. ישנם תלמידים שנוסף לקשתות, משלבים חישובי עזר או הסברים מילוליים במהלך פתרונם.

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי:** "התלמיד מצויר קשתות מעל ומתחת לתרגיל המקורי, כנראה בגלל חוסר מקום"; "כל קשת "מכילה" בתוכה את חלק התרגיל שהתלמיד פתר או את פתרונו"; "התלמיד משלב חישובים בצד התרגיל"; "התלמיד שולט בחוקי סדר פעולות החשבון וניכר, כי הקשתות עזרו לו לפשט את תהליך הפתרון"; "קשה לעקוב אחר שלבי הפתרון עצמם"; "אם ישנה טעות, קשה לגלות היכן קרתה".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "ריבוי קשתות יכול להטעות וקשה למצוא היכן הטעות"; "התלמיד מסודר במחשבתו ומבין את חוקי סדר פעולות החשבון, אך אי אפשר לפשט כך ביטוי אלגברי".

#### איור 2ב

מתחילים מהסוגריים הפנימיים ביותר ופעולת החילוק קודמת לפעולת החיבור, לאחר שפתחתי את הסוגריים הפנימיות אני מבצעת את פעולת החילוק או הכפל (זה לא משנה מה קודם) ולבסוף אני עוברת לחיבור וחסור.

שבוצעה"; "קל לאתר טעויות"; "רואים את התפתחות דרך הפתרון".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "התלמיד יודע סדר פעולות חשבון אך קשה לעקוב אחר התרגיל"; "לא נראה כי התלמיד יודע מהם שלבים שקולים"; "קל למצוא טעויות אבל אי אפשר להמשיך עם ביטויים אלגבריים"; "שלבים רבים ואפשר בקלות לאבד קשר עם התרגיל".

#### איור 2א

שימוש שגוי בסימן "שווה" במעבר משלב לשלב. לפי זה, השקילות אינה נשמרת ולכן דרך הפתרון יכולה להיות שגויה.

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי:** "בדרך כתיבתו התלמיד כתב כמו שחשב"; "נראה, כי התלמיד יודע את חוקי סדר פעולות החשבון"; "כתיבתו מסודרת וברורה, ניתן לעקוב אחר שלבי הפתרון של התלמיד ובעת הצורך אף למצוא טעות בקלות יחסית"; "אין הבנה של שקילות ושוויון"; "קשה לעקוב אחר חישוב התרגיל".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "התלמיד לא שמר על שקילות בין כל שלב ושלב ( 6 = 30 = 60 = 20 = 14) בתהליך הפתרון ולמרות זאת קיבל את התוצאה הנכונה"; "צורת כתיבה לא נכונה"; "לא בטוח שהתלמיד יצליח בשיטה זו בתרגיל מסורבל יותר או עם שברים או כשיצטרך לפשט ביטוי אלגברי"; "לא מבין משמעות סימן שווה".



השווה?"; "פתרון נכון אך צורת הכתיבה אינה מסודרת ויכולה לגרום לטעויות בתרגילים מורכבים"; "שלבי התרגיל ברורים אך אי אפשר לכתוב כך בכתיב אלגברי"; "קשה לעקוב אחר מהלך התרגיל".

## איור ג

$$\begin{array}{l}
 23 - [14 - 3 \times (6 + 42 : 3) : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 3 \times 20 : 3 : 5] + 7 = 23 - [14 - 60 : 3 : 5] + 7 = 23 - [14 - 20 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 6] + 7 = 23 - 8 + 7 = 15 + 7 = 22
 \end{array}$$

דרך הפתרון כתובה כ"חוט ארוך".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי:** "התלמיד שולט בחוקי סדר פעולות החשבון"; "בכל שלב ברור איזו פעולה מבוצעת ונשמרת השקילות בין השלבים עד שלב לפני אחרון בו יש טעות חישובית, שבעטייה התשובה הסופית שגויה"; "הכתיבה ברורה ומסודרת ורואים את דרך הפתרון באופן ברור".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "שלבי פתרון רבים והפתרון ברור. התלמיד מבין מהו שוויון"; "הוא יודע את סדר פעולות החשבון וקל למצוא טעויות. בפישוט ביטויים, כתיבה שכזו תקשה על תלמידים".

## (ד) כתיבה אנכית:

כל שלב בפתרון נכתב בשורה נפרדת

## איור ד

$$\begin{array}{l}
 23 - [14 - 3 \cdot (6 + 42 : 3) : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 3 \cdot (6 + 14) : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 3 \cdot 20 : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 60 : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 20 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 6] + 7 = \\
 23 - 8 + 7 = \\
 15 + 7 = \\
 22
 \end{array}$$

התלמיד פותר באופן מדורג, כך שהשלב הבא רשום מתחת לשלב הקודם לו, שבו כבר בוצעה פעולה מסוימת.

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי:** "הצליוח במקרה כי טען שכפל וחילוק - לא משנה ממה להתחיל"; "יודע על קדימות סוגריים"; "לא יודע לכתוב פתרון מסודר תוך שמירה על כללי השוויון (לכתוב תרגיל שקול)"; "השימוש בקשתות מתבצע עד לשלב בו, כנראה התרגיל מספיק קל לפתרון עבור התלמיד".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "ריבוי קשתות - יכול לטעות"; "בהסבר המילולי יש טעות"; "התלמיד חייב לרענן היטב סדר פעולות חשבון ולכתוב את הפתרון באופן ברור"; "התלמיד יתקשה מאוד באלגברה"; "הקשתות ופתרון מילולי לא מתאימים לכתיבה אלגברית".

## (ג) כתיבה אופקית:

כתיבה רציפה בשורה

התלמיד רושם את הפתרון באופן מדורג: בכל שלב מעתיק את התרגיל שבו בוצעה קודם פעולה מסוימת.

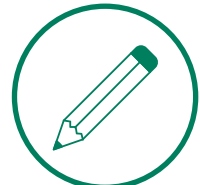
## איור ג

$$\begin{array}{l}
 23 - [14 - 3 \cdot (6 + 42 : 3) : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 3 \cdot (6 + 14) : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 3 \cdot 20 : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 60 : 2 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 20 : 5] + 7 = \\
 23 - [14 - 6] + 7 = \\
 23 - 8 + 7 = \\
 15 + 7 = \\
 22
 \end{array}$$

להפרדה בין שלבי הפתרון, משתמש התלמיד בסימן "שווה" או ב- "חץ כפול" (שמשמעותו: "מכאן נובע") או משלב בין שני הסימנים.

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי:** "ההבנה שלו לגבי תרגילים שקולים כבעלי אותה תוצאה לא לגמרי ברורה, לכן התלמיד משתמש בתרגיל בסימן החץ ובסימן השווה"; "שולט בסדר פעולות חשבון"; "עובד בצורה מאוד מסודרת".

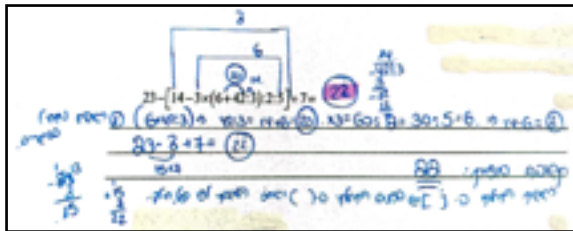
**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "למה החץ מחליף את סימן



עקב כך השורות מתקצרות.

ולבלבל; "כל שלב חייב להיות בשורה חדשה, למה צריך לנחש לפי התוצאה איזו פעולה חושבה?"; "ריבוי קשתות בעייתי במעבר לאלגברה".

### איור ה



ראשית נתחיל בסוגריים. תשובה סופית: 22  
כאשר התחלתי ב- [ ] ← בפנים התחלתי ב- ( ) ואח"כ המשכתי לפי כפל חילוק.

התלמיד משלב שימוש בקשתות עם כתיבה בחלקים והסברים מילוליים.

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי:** "התלמיד שולט בחוקי סדר פעולות החשבון ופתר נכון"; "התלמיד לא מבין את מושג השוויון והשקילות (14+6=42:3)"; "קשה לבדוק ולעקוב אחר סדר הפתרון"; "התלמיד מסביר מילולית את פעולותיו ומוסיף חישובים בצד התרגיל".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "קשה לזהות טעויות"; "אין סדר"; "לא מתאים לפישוט ביטויים לכתוב כך"; "סוג של "קיזור" שלבים"; "התלמיד לא שומר על שקילות"; "קשה לעקוב אחר הפתרון".

### עיבוד וארגון הממצאים

**(i) אחוזי הפתרונות המתאימים לכל אחת מחמש הקבוצות על פי "מראה חיצוני" של פתרון התרגיל מוצגים בטבלה 1.**

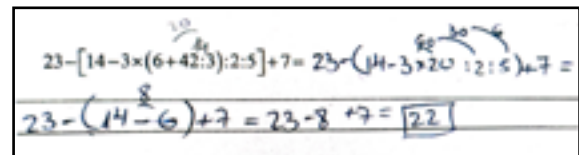
האחוזים חושבו מתוך 316 פתרונות שתיארו 35 מורים בחינוך היסודי ומורים בחינוך העל-יסודי.

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי:** "התלמיד שולט בחוקי סדר פעולות החשבון בשלבים ברורים הנכתבים בשורות נפרדות, כך יש אפשרות לעקוב אחר תהליך הפתרון"; "השקילות במעבר משלב לשלב נשמרת ואם יש טעות, ניתן לזהותה באופן מהיר וקל יחסית"; "הכתיבה מאוד מסודרת"; "דרך מועדפת עלי. כך אני מלמדת וכך אני חושבת שנון שיפתרו".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "כתיבה ברורה, שלבי פתרון רבים, רואים ברור איזו פעולה בוצעה בכל שלב"; "התלמיד יודע חוקי סדר פעולות חשבון, מבין מהו שוויון ומהי שקילות ומוכן למעבר לכתיבה אלגברית"; "התלמיד כותב מסודר".

### (ה) כתיבה משולבת: שילוב בין סוגי "מראות חיצוניים" שונים

### איור ה



התלמיד משלב כתיבה אופקית עם שימוש בקשתות.

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך היסודי:** "שולט בחוקים של סדר פעולות חשבון"; "מקצר את הפתרון בעזרת קשתות ולא כותב כל פעם תרגיל שקול"; "התלמיד פתר את התרגיל נכון, אבל אם היה טועה, קשה לזהות את מקום הטעות"; "הכתיבה לא מסודרת".

**ציטוטים המתארים את "דרך כתיבת פתרון" על פי מורי החינוך העל-יסודי:** "קשת על גבי קשת - יכול להטעות



טעויות. שמירה על סדר פעולות חשוב.

- **קטגוריה ב:** כתיבה "דרכי כתיבת הפתרון" הן: קיום מספר שלבי פתרון, התפתחות מובנית של שלבי פתרון וכתיבה מסודרת.
- **קטגוריה ג:** שוויון ושקילות והכנה לקראת כתיבה אלגברית "דרכי כתיבת הפתרון" הן: שימוש בשוויון ושקילות והכנה לקראת כתיבה אלגברית.

הערכים שבטבלאות 2 ו- 3 מציגים את האחוזים של תיאורי המורים ל"דרך כתיבת פתרון" מתוך כלל הפתרונות שאותם הם תיארו עבור "מראה חיצוני". בחינוך היסודי מתוך 180 פתרונות (טבלה 2) ובחינוך העל-יסודי מתוך 136 פתרונות (טבלה 3).

## טבלה 1

אחוז הפתרונות המתאימים לכל אחת מחמש הקבוצות של "מראה חיצוני" של פתרון התרגיל לפי תיאורי המורים

אחוז הפתרונות	"מראה חיצוני" של פתרון
17.4	(א) כתיבה בחלקים
26.3	(ב) שימוש בקשתות
25.0	(ג) כתיבה אופקית
17.4	(ד) כתיבה אנכית
13.9	(ה) כתיבה משולבת
100.0	סה"כ באחוזים

ממצאי טבלה 1, ניתן לראות כי בתיאור של פתרון התרגיל על פי "מראה חיצוני" שתואר על ידי המורים, אחוז הפתרונות, לפי שימוש בקשתות ולפי כתיבה אופקית, מהווים כל אחד כרבע מכלל הפתרונות והם גבוהים באופן משמעותי משאר הקבוצות. אחוז הפתרונות לפי כתיבה בחלקים וכתיבה אנכית, זהים זה לזה והם נמוכים ב- 8% משימוש בקשתות וכתיבה אופקית. בכתיבה משולבת, אחוז הפתרונות הוא הנמוך מבין כל שאר הקבוצות ומהווה כ- 14% מכלל הפתרונות.

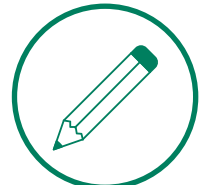
**(ו) ממצאים הקשורים ב"דרך כתיבת פתרון" מוצגים בטבלה 2 עבור מורים בחינוך היסודי ובטבלה 3 עבור מורים בחינוך העל-יסודי, בהתאם לכל אחת מחמש הקבוצות על פי "מראה חיצוני".**

חלק מהתיאורים היו משותפים למורי החינוך היסודי ומורי העל-יסודי וחלקם - לא. הממצאים חולקו לשלוש קטגוריות כשכל אחת מהן עוסקת ברעיון מאגד:

- **קטגוריה א:** סדר פעולות חשובן ושלבי הפתרון "דרכי כתיבת הפתרון" הן: הפעולה שחושבה בכל שלב נכתבה בצורה ברורה. קיימת אפשרות לאתר







## טבלה 2

תיאורי המורים בחינוך היסודי באחוזים, ל"דרך כתיבת פתרון" התרגיל עבור "מראה חיצוני"

משובלת	כתיבה אנכית	כתיבה אופקית	שימוש בקשתות	כתיבה בחלקים	"מראה חיצוני"	
					קטגוריות	"דרך כתיבת פתרון"
					קטגוריה א - סדר פעולות החשבון ושלבי הפתרון	
27.8	87.8	84.4	44.4	63.3	הפעולה שחושבה בכל שלב ונכתבה בצורה ברורה	
17.8	91.7	78.9	26.1	85.0	קיימת אפשרות לאתר טעויות	
82.8	96.1	88.9	82.2	83.3	שמירה על סדר פעולות חשבון	
					קטגוריה ב - כתיבה	
39.4	94.4	72.2	28.3	69.4	קיום מספר שלבי פתרון	
38.9	94.4	86.1	66.7	50.0	התפתחות מובנית של שלבי הפתרון	
66.7	95.6	39.4	44.4	78.3	כתיבה מסודרת	
					קטגוריה ג - שוויון ושקילות והכנה לקראת כתיבה אלגברית	
58.9	75.0	69.4	39.4	36.1	שימוש בשוויון ושקילות	
0.0	34.4	1.7	0.0	0.0	הכנה לקראת כתיבה אלגברית	

בהתפתחות מובנית של שלבי הפתרון (קטגוריה ב), בשמירה על סדר פעולות חשבון ובפעולה שחושבה בכל שלב ונכתבה בצורה ברורה (קטגוריה א) גבוהים מ- 84%.

4. ב"כתיבה אנכית", נמצא הבדל משמעותי בין אחוז תיאורי המורים בהכנה לקראת כתיבה אלגברית (34.4%, קטגוריה ג) לבין שאר "דרכי כתיבת פתרון" מכל הקטגוריות (75.0%-96.1%).

5. ב"כתיבה משולבת", נמצא הבדל מובהק בין אחוז תיאורי המורים בהכנה לקראת כתיבה אלגברית (0.0%, קטגוריה ג) לבין אחוז תיאורי המורים בשמירה על סדר פעולות חשבון (82.8%, קטגוריה א). אחוז תיאורי המורים בקטגוריה א המתאר שמירה על סדר פעולות חשבון, גבוה משמעותית משאר "דרכי כתיבת פתרון" באותה הקטגוריה.

בכל חמש הקבוצות לפי "מראה חיצוני", ניתן לראות כי אחוז תיאורי המורים בהכנה לקראת כתיבה אלגברית (0.0% - 34.4%, קטגוריה ג) נמוך משמעותית מאחוז תיאורי המורים בשימוש בשוויון ושקילות (36.1% - 75.0%, קטגוריה ג).

ממצאי טבלה 2 ניתן לראות כי:

1. ב"כתיבה בחלקים", נמצא הבדל משמעותי בין אחוז תיאורי המורים בשוויון ושקילות (קטגוריה ג) לעומת שאר "דרכי כתיבת פתרון" בקטגוריות האחרות. כמו כן, אף אחד מהמורים (0.0%) לא הזכיר בתיאורו את ההכנה לקראת כתיבה אלגברית. כ- 80% מתיאורי המורים היו בקיום אפשרות לאתר טעויות, בשמירה על סדר פעולות חשבון (קטגוריה א) ובכתיבה מסודרת (קטגוריה ב).
2. ב"שימוש בקשתות", נמצא הבדל מובהק של 82.2% בין אחוז תיאורי המורים בשמירה על סדר פעולות חשבון (קטגוריה א) לעומת הכנה לקראת כתיבה אלגברית (קטגוריה ג). בנוסף לכך, אף אחד מהמורים (0.0%) לא הזכיר בתיאורו הכנה לקראת כתיבה אלגברית.
3. ב"כתיבה אופקית", נמצא הבדל משמעותי בין אחוז תיאורי המורים בין הכנה לקראת כתיבה אלגברית (1.7%, קטגוריה ג) לבין אחוז תיאורי המורים בכתיבה מסודרת (39.4%, קטגוריה ב). אחוז התיאורים בשאר "דרכי כתיבת פתרון" גבוה מ- 69%. אחוז התיאורים



### טבלה 3

תיאורי המורים בחינוך העל-יסודי באחוזים, ל"דרך כתיבת פתרון" התרגיל עבור כל "מראה חיצוני"

קטגוריות "דרך כתיבת פתרון"					"מראה חיצוני"				
משולבת	כתיבה	אנכית	כתיבה	כתיבה	בחלקים	שימוש בקשתות	אופקית	כתיבה	משולבת
קטגוריה א - סדר פעולות החשבון ושלבי הפתרון									
8.8	91.9	77.2	43.4	47.8	הפעולה שחושבה בכל שלב נכתבה בצורה ברורה				
8.8	90.4	73.5	18.4	72.1	קיימת אפשרות לאתר טעויות				
72.1	94.1	89.7	75.0	72.1	שמירה על סדר פעולות חשבון				
קטגוריה ב - כתיבה									
50.0	80.8	77.2	16.2	76.5	קיום מספר שלבי פתרון				
44.1	97.1	78.7	42.6	52.2	התפתחות מובנית של שלבי הפתרון				
41.9	98.5	47.8	14.7	70.6	כתיבה מסודרת				
קטגוריה ג - שוויון ושקילות והכנה לקראת כתיבה אלגברית									
70.6	99.3	88.2	6.6	7.4	שימוש בשוויון ושקילות				
40.4	98.5	70.6	37.5	36.8	הכנה לקראת כתיבה אלגברית				

תיאורי המורים בפעולה שחושבה בכל שלב ונכתבה בצורה ברורה (8.8%, קטגוריה א) וקיימת אפשרות לאתר טעויות (8.8%, קטגוריה א) לבין שאר "דרכי כתיבת פתרון" (40.4%-72.1%).

#### (iii) טבלת "כלי החלטה"

טבלה 4 משלבת את הערכים מטבלאות 2 ו-3 לטבלת "כלי החלטה", המשמשת כלי עזר למורים שעל פיו יוכלו לכוון ולמקד את תלמידיהם בבחירת "דרך לכתיבת פתרון". עבור כל "דרך כתיבת פתרון" ועבור כל "מראה חיצוני" חושב ממוצע בין אחוז תיאורי המורים בחינוך היסודי (טבלה 2) ובין אחוז תיאורי המורים בחינוך העל-יסודי (טבלה 3).

חישוב הממוצעים הראה חלוקה ברורה לשלושה טווחים: 0% - 40% (כרבע מהערכים), 40% - 70% (כרבע מהערכים), 70% - 100% (כמחצית מהערכים). הטווחים סומנו על ידי: א, ב, ג, ד, ה, ו, ז, ח, ט, י, יא, יב, יג, יד, טו, יז, יח, יט, כ.

ממצאי טבלה 3 ניתן לראות כי:

1. ב"כתיבה בחלקים", נמצא אחוז נמוך של תיאורי המורים (7.4%) בשימוש בשוויון ושקילות (קטגוריה ג). אחוז תיאורי המורים בהכנה לקראת כתיבה אלגברית (קטגוריה ג) נמוך לעומת שאר "דרכי כתיבת פתרון" שבקטגוריות א ו-ב.
2. ב"שימוש בקשתות", אחוז תיאורי המורים בשמירה על סדר פעולות חשבון הוא הגבוה ביותר (75.0%, קטגוריה א) משאר תיאורי המורים ב"דרכי כתיבת פתרון" בכל הקטגוריות.
3. ב"כתיבה אופקית", אחוז תיאורי המורים בכתיבה מסודרת (47.8%, קטגוריה ב) נמוך מאחוז תיאורי המורים בכל שאר "דרכי כתיבת פתרון" (70.6%-89.7% בכל הקטגוריות).
4. ב"כתיבה אנכית", אחוז תיאורי המורים בכל "דרכי כתיבת פתרון" ובכל הקטגוריות גבוה מ-80%.
5. ב"כתיבה משולבת", נמצא הבדל משמעותי בין אחוז



## טבלה 4

טבלת "כלי החלטה"

משובת כתיבה	כתיבה אנכית	כתיבה אופקית	שימוש בקשתות	כתיבה בחלקים	"מראה חיצוני"	קטגוריות
					"דרך כתיבת פתרון"	
						קטגוריה א - אריתמטיקה וסדר פעולות החשבון
x	v	v	ן	ן		הפעולה שחושבה בכל שלב נכתבה בצורה ברורה
x	v	v	x	v		קיימת אפשרות לאתר טעויות
v	v	v	v	v		שמירה על סדר פעולות חשבון
						קטגוריה ב - כתיבה
ן	v	v	x	v		קיום מספר שלבי פתרון
ן	v	v	ן	ן		התפתחות מובנית של שלבי הפתרון
ן	v	ן	x	v		כתיבה מסודרת
						קטגוריה ג - שוויון ושקילות והכנה לקראת כתיבה אלגברית
ן	v	v	x	x		שימוש בשוויון ושקילות
x	*v	**ן	x	x		הכנה לקראת כתיבה אלגברית

\* על סמך טבלאות 2 ו-3: הפער בין אחוז תיאור מורי החינוך העל-יסודי (98.5%) לבין אחוז תיאור מורי החינוך היסודי (34.4%) גדול משמעותית. אומנם הממוצע בתחום הסימן  $\cup$ , אולם בחרנו  $v$ , כי אחוז מורי החינוך העל-יסודי שואף ל-100% וכשליש ממורי החינוך היסודי תיארו את "דרך כתיבת פתרון" זו לעומת חוסר התייחסות מוחלט שלהם אליה, בשאר ה"מראות החיצוניים".

\*\* על סמך טבלאות 2 ו-3: הפער בין אחוז תיאור מורי החינוך העל-יסודי (70.6%) לבין אחוז תיאור מורי החינוך היסודי (1.7%) גדול משמעותית. הממוצע (36.2%) בתחום הסימן  $x$ . בחרנו לסמן אותו בסימן  $\cup$ , כי אחוז ניכר ממורי החינוך העל-יסודי התייחס ל"דרך כתיבת פתרון" זו והממוצע קרוב מאוד ל-40%.

- מסודרת והכנה לקראת כתיבה אלגברית בהן אחוז התיאורים נמוך מ-70% וגבוה מ-40% ( $\cup$ ).
4. ב"כתיבה משולבת", אחוז התיאורים של כל "דרכי כתיבת פתרון" בקטגוריה ב נמוך מ-70% וגבוה מ-40% ( $\cup$ ).
5. ב"כתיבה בחלקים" ו"שימוש בקשתות", אחוז התיאורים של כל "דרכי כתיבת פתרון" בקטגוריה ג נמוך מ-40% ( $x$ ).

ממצאי טבלה 4 ניתן לראות כי:

1. ממוצע אחוז התיאורים ל"דרך כתיבת פתרון" של שמירה על סדר פעולות החשבון גבוה מ-70% ( $v$ ) בכל אחד ואחד מ"מראה חיצוני".
2. ב"כתיבה אנכית", אחוז התיאורים לכל "דרכי כתיבת פתרון" גבוה מ-70% ( $v$ ).
3. ב"כתיבה אופקית", אחוז התיאורים של רוב "דרכי כתיבת פתרון" גבוה מ-70% ( $v$ ), מלבד כתיבה



## דין ומסקנות

מחקר זה שופך אור על תיאורי מורים למתמטיקה בחינוך היסודי והעל-יסודי ל"מראה חיצוני" ול"דרך כתיבת פתרון" של תרגיל חשבוני, המשלב שני סוגי סוגריים וארבע פעולות חשבון. תיאורים אלו באים לידי ביטוי בטבלת "כלי החלטה" (טבלה 4) המשלבת עבור כל אחד מ"מראה חיצוני" של פתרון תרגיל, את התייחסויות המורים ל"דרך כתיבת פתרון" בכל אחת משלוש הקטגוריות הנזכרות במאמר. הטבלה מאפשרת למורה לבחור "מראה חיצוני" תוך התמקדות ב"דרך כתיבת פתרון". נוסף לכך, היא מסייעת לבחור "מראה חיצוני", אשר עשוי לתרום למעבר 'חלק' יותר מלימודי החשבון (הארייתמטיקה) ללימודי האלגברה. מהתוצאות בטבלת "כלי החלטה" ניתן לראות, כי יש מקום לשלב ולתת משקל לשימוש ב"כתיבה אנכית", אשר סימונו מרבי (v) עבור כל אחת מהקטגוריות. ב"מראה חיצוני" זה, פתרון התרגיל פרוש לעיני התלמיד ומורהו בכל אחד משלבי ועוזר גם במציאת טעויות בקלות יחסית. יחד עם זאת לפי טבלה 1, ניתן לראות שפחות מ-20% מהפתרונות של התלמידים היו לפי "כתיבה אנכית", כך גם לגבי פתרונות לפי "כתיבה בחלקים". נראה כי יש העדפה לכתיבה לפי "מראה חיצוני": "שימוש בקשתות" ו"כתיבה אופקית". נראה שה"שימוש בקשתות" קצר ונוח לכתיבת פתרון תרגיל וממקד את התלמידים בזמן ההסבר בכיתה. במאמרם דוגמאות לפתרון תרגילים חשבוניים ב"כתיבה אנכית". הם מציינים שהשימוש בחוקי סדר פעולות החשבון נכון יותר בצורת כתיבה זו, כי הכתיבה ברורה ומובנית וניתן בעזרתה להבין מהם החוקים בהם נעזרו בשלבי החישוב. לתלמיד המשתמש ב"כתיבה אופקית", "מראה חיצוני" זה יכול להיות נוח בזמן כתיבת הפתרון למרות שלעיתים קשה לזהות היכן נגמר שלב אחד בפתרון ומתחיל השלב הבא אחריו.

טוב וחשוב שההתייחסויות לדרכי כתיבת פתרון תרגיל של מורים למתמטיקה המלמדים בכיתות ו', במיוחד לקראת סיום בית הספר היסודי, תהיינה דומות להתייחסויות המורים למתמטיקה המלמדים בכיתות ז', כי הם מקבלים את אותם התלמידים בתחילת חטיבת הביניים ולפי תכנית הלימודים

קיימים רצף לימודי והמשכיות בלמידה. ואכן, מהמחקר עולה כי אחוז ההתייחסויות לדרכי כתיבת פתרון תרגיל הקשורות לקטגוריות הראשונה והשנייה, קרוב אצל מורים בחינוך היסודי ומורים בחינוך העל-יסודי, דבר המצביע על שימור הרצף הלימודי. יחד עם זאת, המורים המלמדים בבית הספר העל-יסודי מתחילים ללמד את יסודות האלגברה, עם כניסת התלמידים לכיתה ז' אשר בה יש משקל חשוב ומשמעותי לקטגוריה השלישית העוסקת בשימוש בשוויון ושקילות והכנה לקראת כתיבה אלגברית. לכן, במחקר השתתפו מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות ו' בבית הספר היסודי ובכיתות ז' בבית הספר העל-יסודי וכן גם רוכזות התוצאות המתייחסות לשתי קבוצות המורים בטבלאות נפרדות (טבלה 2, טבלה 3). ממצאי המחקר בקטגוריה זו מעידים על כך שעבור שימוש במושגים "שוויון ושקילות" מורי היסודי מייחסים חשיבות רבה יותר מחבריהם המורים בבית הספר העל-יסודי, למראות החיצוניים - "כתיבה בחלקים" ו"שימוש בקשתות". לעומתם, מורי העל-יסודי, מייחסים חשיבות רבה מאוד למראות החיצוניים - "כתיבה אופקית" ו"כתיבה אנכית", למרות שגם מורי היסודי מייחסים למראות חיצוניים אלו חשיבות, אבל פחותה יותר. באופן בולט ניתן לראות מהממצאים, שעבור הכנה לקראת כתיבה אלגברית, קיימת התייחסות מעטה עד אפסית אצל המורים בבית הספר היסודי לעומת חבריהם בבית הספר העל-יסודי, אשר התייחסו לדרך כתיבת פתרון זו בכל אחד מהמראות החיצוניים. ההתייחסות למראה החיצוני - "כתיבה אנכית", בלטה מאוד אצל מורי העל-יסודי (כ-100%) לעומת מורי היסודי, כ-35% בלבד. ממצאים אלו מעידים על שוני במידת החשיבות של שתי דרכי כתיבת פתרון תרגיל אלה (בקטגוריה שלישית), בעיני המורים המלמדים בבית הספר היסודי לעומת מורי העל-יסודי. בעתיד, מעניין יהיה לערוך מחקר המשך לבדיקת הקשר בין המראה החיצוני של פתרון תרגיל ודרך כתיבת פתרון והאלגברה. שהרי, בהוראת המתמטיקה יש לשים דגש על מיומנויות חישוב, תוך כדי פיתוח למידה והבנה אצל תלמידים ולא רק התבססות על חוקי סדר פעולות חשבון (Zylberberg, Kamienkowski, Farall & Sigman, 2012).



Falkner, K. P., Levi, L & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4):232-236. תורגם לעברית ע"י ברכה סגליס: [הבנה של ילדים את מושג השוויון בכסיס לאלגברה](#).

Gunnarsson, R., Sonnerhed, W. W & Hernell, B. (2016). Does it help to use mathematically superfluous brackets when teaching the rules for the order of operations?. *Educational Studies in Mathematics*, 92: 91-105.

Isaacs, A. C & Carroll, W. M. (1999). Strategies for Basic-Facts Instruction. *Teaching Children Mathematics*, 5(9): 508-515. תורגם לעברית ע"י ברכה סגליס: [אסטרטגיות להוראת עובדות יסוד](#).

Kamii, C., Dominick, A. (1998). The Harmful Effects of Algorithms in Grades 1-4. In: *The Teaching and Learning of algorithms in School Mathematics*, Morrow, L.J. (Ed.), pp. 130-140. Reston, VA: NCTM. תורגם לעברית ע"י ברכה סגליס: [ההשפעות המזיקות של אלגוריתמים בכיתות א'-ד'](#).

Ki Lee, J., Licwinko, S & Taylor-Buckner, N. (2013). Exploring Mathematical Reasoning of the Order of Operations: Rearranging the Procedural Component PEMDAS. *Journal of Mathematics Educational Teachers College*, 4: 73-78.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in mathematics*, 12: 317-326.

Kyungsoon, J. (2012). Reflecting on PEMDAS. *Teaching Children Mathematics*, 18(6): pp. 370-377.

Leavy, A., Hourigan, M & McMahon, A. (2013). Early Understanding of Equality. *Teaching Children Mathematics*, 20(4): 246-252.

## מקורות:

זסלבסקי, א' (2003). [החילוק הארוך כמשל](#). מספר חזק 2000, 6, 38-43.

יבשובה, א' (1988-1990). [שגיאות הקשורות בסדר פעולות חשבון בפתירת תרגילים ודרכים למנוע אותן](#). תרגום (מרוסית): אנטולי קורופטוב ודורית כהן. נצ'לנייה שקולה. מו"ל: פרוסבש'ניה, מוסקבה.

ליפוביצקי, א' (2007). [מבנים שחוזרים על עצמם](#). מספר חזק 2000, 13, 28-30.

משרד החינוך, התרבות והספורט, (2006). [תכנית הלימודים במתמטיקה לבתי הספר היסודיים](#). ירושלים: המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים. אוחד בתאריך 16.12.2017.

פישביין, א' (1995). [מודלים סמויים וחישיבה מתמטית](#). תרגום: דורית כהן. מהמקור: Tacit Models and Mathematical Reasoning, For the Learning of Mathematics, 9(2), 1989, pp. 9-14.

צמיר, פ' וקורן, מ' (2004). [קורותיו של תרגיל](#). מספר חזק 2000, 7, 39-43.

קופרמן, ר' (2015). מתמטיקה של בית ספר יסודי - חלק ב, ירושלים: מאגנס.

Ameis, J. A. (2011). The Truth about PEDMAS. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 16(7): 414-420.

Bay-Williams, J. M & Martinie, S. L. (2015). Order of Operations: The Myth and the Math. *Teaching Children Mathematics*, 22(1): 20-27.

Burns, M. (2007). Nine Ways to Catch Kids Up. *Educational Leadership*, 65(3): 16-21. תורגם לעברית ע"י ברכה סגליס: [תשע דרכים לקדם תלמידים המתקשים במושגי יסוד במתמטיקה](#).

Carey, A. C. (1992). Students' Use of Symbols. *Arithmetic Teacher*, 40(2): 184-186. תורגם לעברית ע"י ברכה סגליס: [שימוש של תלמידים בסמלים מתמטיים](#).

Dr. Math. (Math Forum), (2000). *History of the Order of Operations*. אוחד בתאריך 19.12.2017.



- MacGregor, M & Stacey, K. (1999). A flying start to Algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(2): 78-85  
ברכה סגליס: [להמריא אל האלגברה מההתחלה](#).
- Oksuz, C. (1998). Children's Understanding of Equality and Equal Symbol. *Educational Studies in mathematics*, 35(2): 153-187.
- Powell, S. R., Kearns, D. M & Driver, M. K. (2016). Exploring the Connection between Arithmetic and Prealgebraic Reasoning at First and Second Grade. *Journal of Educational Psychology*, 108(7): 943-959.
- Rambhia, S. (2002). A new approach to an old order. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(4): 193-195.
- Schifter, D., Russell, S. J & Bastable, V. (2009). Early Algebra to reach the range of Learners. *Teaching Children Mathematics*, 16(4): 230-237  
שימוש באלגברה מוקדמת ככלי לקידום תלמידים בעלי יכולות שונות.
- Soares, J., Blanton, M. L., Kaput, J. J. (2005-2006). Thinking Algebraically. *Teaching Children Mathematics*, 12(5): 228-235  
לעברית ע"י ברכה סגליס: [לחשוב באופן אלגברי](#).
- Wiebe, J.H. (1989). Teaching Mathematics with Technology: Order of Operations. *The Arithmetic Teacher*, 37(3): 36-38.
- Zylberberg, A., Kamienkowski, J. E., Farall, A. R. & Sigman, M. (2012). When order matters: Last-come first- served effect in sequential arithmetics operations. *Journal of Integrative Neuroscience*, 11(4): 1-15.