



פינה דידקטית

תרגילי חיבור פלינדרומיים על לוח המאה

פרופ' איליה סיניצקי

מרצה בחינוך מתמטי,

האקדמית גורדון - המכללה האקדמית לחינוך,
שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

מרינה סיניצקי

מרצה לשילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה,
האקדמית גורדון - המכללה האקדמית לחינוך,
המכללה האקדמית עמק יזרעאל



תרגילי חיבור פלינדרומיים על לוח המאה

איליה סיניצקי ומרינה סיניצקי

צירוף של שתי מילים בשפה היוונית: palin ("שוב") ו-dromos ("כיוון"). דוגמאות מרתקות לפלינדרומים בשפה העברית, במתמטיקה ולקשר ביניהם, מוצגות במאמרו של גזית (2004).

במאמרו של יצחק וקורופטוב (2018) מוזכרים תרגילים של חיבור פלינדרומים, כמו למשל $46+53=35+64$. לא קשה להגדיר את התנאים להרכבת סכומים, הפרשים ומכפלות כדוגמת משוואה זו בדרך אלגברית (סיניצקי ואילני, 2014, עמ' 315-317). במאמר הנוכחי, הנושא מוצג כפעילות אשר מיועדת לתלמידים צעירים - פעילות לגילוי על לוח המספרים. **(המשפטים המודגשים במאמר הם הערות מתמטיות ודידקטיות המיועדות למורה.)**

הבניית סכומים פלינדרומיים על לוח המאה

בכיתות א' ו-ב' לוח המאה משמש כמודל דידיקטי מוביל להבניית תובנות באשר למבנה העשרוני של המספר, לערך שספרה מייצגת במקומות שונים שלה, בכתיבת המספר (לפי המבנה העשרוני) וכן הלאה. המשימות ה"משעשעות" שעניינן המספרים והתרגילים הפלינדרומיים אמורים לסייע בהבניית תובנות הלומדים בנושאים החשובים האלה.

רקע

בקריאת מספרים בשפה העברית, מקובל לציין תחילה את הערך הגדול ביותר במספר ולבסוף את הערך הקטן ביותר. כך למשל במספר 84, קוראים תחילה את העשרות ("שמונים") ואחר כך מוסיפים את היחידות הבודדות ("וארבע"). דרך קריאה זו אינה היחידה האפשרית ובשפות אחרות (כמו למשל בערבית), הקריאה היא "בכיוון ההפוך". מספרים פלינדרומים הם מספרים שקריאתם בכיוון ה"הפוך" מביאה לאותה התוצאה, כמו למשל המספר 1221 (בניגוד לקריאה "בכיוון ההפוך" של

"תנו לי את לוח המאה ולוח הכפל, ואדגים בהם את כל המתמטיקה של בית הספר היסודי." (ד"ר ג'וני אוברמן)

מבוא

מאמר קצר זה נכתב בעקבות [מאמר](#) שפורסם בכתב העת **מספר חזק 2000** (יצחק וקורופטוב, 2018). באותו המאמר הוצגו פעילויות מגוונות לתלמידי כיתה ד' ויישומן המעניין מאוד בכיתה. הנושא המרכזי שנדון באותו המאמר הוא מצבים פלינדרומיים בעולם המספרים. נושא זה, טענו ובצדק מחברי המאמר, מהווה אתגר לא רק עבור תלמידי כיתה ד' אלא אתגר בכלל. במאמר הוזכרה בעיה לא פתורה, שהיא דוגמה מצוינת ליופיו של עולם המספרים ומדגישה את העובדה שלעיתים בעיות שנראות פשוטות למדי, הן עמוקות וקשות עד כדי כך שאין להן פתרון במשך מאות שנים.

המאמר של עמיתינו הנ"ל הציב לנו אתגר דידיקטי: פיתוח "קדימה ואחורה" (מאפיין בולט של פלינדרומים) לאחד הרעיונות המוזכרים במאמר. במאמר הנוכחי מוצגים תרגילי חיבור פלינדרומיים המיועדים לתלמידי כיתות ב' ו-ג' ("אחורה"), ובמאמר המשך יוצגו פעולות חשבון במספרים פלינדרומיים אחרים המיועדות לתלמידי כיתות ה' ו-ו' ולמוריהם. באופן מפתיע למדי מתברר, שלוח המאה שמהווה כלי עזר דידיקטי מוכר כל כך למורים ולתלמידים, בנושאים רבים במתמטיקה - ערכו מוכח גם בתרגילי חיבור וחיסור פלינדרומיים. בהקשר ללוח המאה מוצגת במאמר זה גם פעילות בשילוב מחשב בסביבת EXCEL (פעילות זו אינה מצריכה בקיאות בתוכנת EXCEL).

בכל שפה כתובה קיים "הסכם קריאה" המגדיר את כיוון הקריאה. עם זאת, בכל שפה יש מילים או ביטויים שלמים שקריאתם "בכיוון ההפוך" משמרת את ערכם. את המילה פלינדרום (palindrome) "הכניס" במאה ה-17 לשפה האנגלית המשורר בן ג'ונסון, והיא מהווה



זהות), נגלה כי את תרגיל החיבור אפשר לקרוא בכיוון ההפוך ללא שינוי במשמעות התרגיל: $44+33=33+44$. רק סדר המחברים משתנה, ואילו ערך הסכום נשמר. אם גם הסכומים האלה הם מספרים דו-ספרתיים, אזי הם בעצמם מספרים פלינדרומים. לפיכך אפשר לרשום את השוויון הקודם באופן הבא: $44+33=77=33+44$. אם ערך הסכום של שני מספרים פלינדרומים, דו-ספרתיים נמצא במאה השנייה, אזי לא יתקבל סכום פלינדרומי לכל זוג של מחוברים פלינדרומים. כך למשל ללא ספק מתקיים השוויון $88+44=44+88$, אך את הסכום המתקבל (132) אי-אפשר לקרוא "בכיוון ההפוך" (כיוון שכל אחד מהמחברים מכיל כמות זהה של עשרות ושל יחידות בודדות, אזי הוא כפולה של 11. לפיכך גם סכומם מתחלק ב-11. המספר הפלינדרומי היחידי במאה השנייה אשר מתחלק ב-11 הוא 121. לפיכך בתרגילים $55+66$, $77+44$, $88+33$, $99+22$ גם ערך הסכום הוא פלינדרום).

מעניין לנסות להרכיב תרגילי חיבור פלינדרומיים שסכומם זהה, בלי "להתייחס" כלל לסכום זה. במילים אחרות, אנו מעוניינים בתרגילים אשר אפשר לקרוא אותם "בכיוון ההפוך" בלי שהתוצאה תשתנה. אם ערך הסכום אינו ידוע, אזי "לא חשוב לנו" אם ערך זה הוא מספר פלינדרומי (99) או לא (132).

הרכבת תרגילי חיבור פלינדרומיים ללא שינוי ספרות

נתחיל באחד הסכומים שכבר ידועים לנו, $22+66$ (סכום זה שווה ל- $66+22$, כמובן). עתה ננסה להרכיב סכום (תרגיל חיבור) אחר משני מספרים דו-ספרתיים הכוללים את הספרות הללו. האפשרות היחידה לעשות זאת היא באמצעות החלפת ספרות היחידות בין המחברים, כלומר להרכיב את הסכום $62+26$. באופן מפתיע גם הסכום הזה הוא פלינדרומי: קריאתו "בכיוון ההפוך" זהה לקריאתו ה"ישרה" ($26+62=62+26$).

נתמקד כעת במיקום המחברים בלוח המאה. המחברים של הסכום המקורי $22+66$, נמצאים על הקו הישר אשר מכיל מספרים בעלי שתי ספרות זהות. והיכן נמצאים המחברים של הסכום החדש? המחבר הראשון - 26,

מספר לא פלינדרומי דוגמת 421 - בקריאה זו מתקבל ערך אחר, 124).

מספרים פלינדרומים על לוח המאה

מובן כי כל מספר חד-ספרתי הוא פלינדרומי, שכן ספרה יחידה קובעת את "שמו". קיימים גם מספרים פלינדרומים דו-ספרתיים ובאלה שתי הספרות זהות. מבט בלוח המאה מגלה כי כל המספרים האלה ממוקמים על קו ישר אחד - האלכסון הראשי של הלוח (ראו איור 1). **הערה: מדובר על לוח מאה אשר כולל את המספרים 0 עד 99. אם לוח המאה הנבחר כולל את המספרים 1 עד 100, אזי הקו הישר שצוין לעיל מקביל לאלכסון הראשי (בלוח זה נמצאים על האלכסון הראשי המספרים 1, 12, 23 ... 100).**

איור 1:

מספרים פלינדרומיים דו-ספרתיים על לוח המאה

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

סכומים ותרגילי חיבור פלינדרומיים פשוטים

אם ננסה למצוא את הסכום של שני מספרים כנ"ל (מספרים פלינדרומיים דו-ספרתיים ששתי הספרות בהם



"נזוד" רק שלושה צעדים ימינה מ-22 ושלושה צעדים שמאלה מ-66 (ראו איור 3). המספרים המתקבלים הם 25 ו-63, והתרגיל המתקבל $25+63$ הוא תרגיל חיבור פלינדרומי: $25+63=36+52$. אם נתבונן בערך של הסכום המתקבל, לא נתקשה להבין את הסיבה לקבלת ערך זה. הערך של הסכום נשמר וזהה לערך הסכום $22+66$. כמות היחידות שהמחובר הראשון גדל בה (תזוזה ימינה בשורה בלוח המאה), זהה לכמות היחידות שהמחובר השני קטן בה (תזוזה שמאלה בשורה בלוח המאה). אותו הערך - 88 במקרה הנוכחי, יישמר גם אם נערוך שינוי באמצעות "תזוזות" של המספר לא בשורות, אלא בעמודות: את המחובר 22 נגדיל ב-30, ובהתאם לכך נקטין ב-30 את המחובר 66.

איור 3:

מהסכום $22+66$

לסכום $25+63$ (תזוזות בחיצים בתוך השורות)

ולסכום $52+36$ (תזוזות בחיצים בתוך העמודות)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

ברור כי ישנן אפשרויות רבות ל"תזוזות" משמרות כאלו. כך לדוגמה אפשר לא רק להגדיל את המספר 22, אלא גם להקטין אותו - אם נישאר באותה השורה בלוח המאה. (כמו כן חשוב שספרת היחידות לא תשתנה

מתקבל באמצעות תזוזה של המספר 22 ארבעה צעדים ימינה בשורת הלוח. המחובר השני - 62, הוא תוצאת התזוזה של המספר 66 ארבעה צעדים בכיוון ההפוך - שמאלה (ראו איור 2)! מובן שבשינוי זה גם הסכום עצמו (תוצאת התרגיל) נשמר, כי הגדלת מחובר אחד ב-4 מלווה בהקטנת המחובר האחר ב-4. יתרה מזאת, את המעבר מהסכום $22+66$ לסכום $62+26$ אפשר לפרש כ"תזוזה" בעמודות: המספר 62 מתקבל באמצעות תזוזה של המספר 22 ארבע שורות (או צעדים) "למטה" באותה העמודה בלוח המאה, והמספר 26 מתקבל באמצעות תזוזה של המספר 66 ארבע שורות (או צעדים) "למעלה" באותה העמודה בלוח המאה (כל שינוי כזה מבטא הוספה או הפחתה של 40 עבור המחובר המתאים).

איור 2:

מהסכום $22+66$

לסכום $26+62$ (תזוזות בחיצים בתוך השורות)

ולסכום $62+26$ (תזוזות בחיצים בתוך העמודות)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

הרכבת תרגילי חיבור פלינדרומיים נוספים על לוח המאה

עתה ננסה לבצע שינוי אחר במחברים הנתונים, 22 ו-66:



מה נגלה אם נתבונן במיקום ההדדי בלוח המאה של המחברים בתרגילים שהתקבלו, $(85+36)$ ו- $(63+58)$ (ראו איור 5)? המיקום של 58 ביחס לאלכסון הראשי הוא "תמונת ראי" של מיקום 85 ביחס אליו! והמיקום של 63 הוא "תמונת ראי" של מיקום 36 ביחס לאותו האלכסון! במילים אחרות, המחובר הראשון - 85 בתרגיל החיבור הפלינדרומי, נמצא בשורה התשיעית ובעמודה השישית של לוח המאה שלנו, והמחובר השני בתרגיל התואם - 58, נמצא בשורה השישית ובעמודה התשיעית של לוח המאה. זיקה דומה מתקיימת גם במחברים האחרים.

איור 5:

דוגמה לרכיבי תרגיל חיבור פלינדרומי
על לוח המאה $(85+36=63+58)$

קריאה "ישרה" (מספרים המסומנים בירוק)

וקריאה "הפוכה" (מספרים במשבצות המסומנות בירוק)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

סיכום ושאלות להמשך הדרך

לאחר הגילויים היפים הגיע הזמן ליהנות מהמחשה של כל התוצאות. בחרו ביישומון (קובץ אקסל) שבקישור זה את המספר הדו-ספרתי אשר ברצונכם להרכיב אותו תרגיל חיבור פלינדרומי. מצאו אותו על לוח המאה ובדקו

ל-0. במקרה הנדון נקבל תרגיל פלינדרומי דוגמת $20+68=86+02$, ומוכן שצורת כתיבה כזו של מחובר חד-ספרתי [2] היא בעייתית).

מגוון תרגילי חיבור פלינדרומיים על לוח המאה

בלוח המאה, רשומים אפוא הרבה מאוד תרגילי חיבור שאפשר לקרוא אותם בשני הכיוונים, ללא שינוי ערך הסכום שלהם ויש לנו דרך לגלות אותם. נבחר לדוגמה את המספר 85 ונדגים: בשורתו בלוח המאה הוא מרוחק שלושה צעדים (שמאלה) מהמספר 88 ששתי ספרותיו זהות. "בני זוג" אפשריים של 85 לתרגיל חיבור פלינדרומי הם אפוא מספרים דו-ספרתיים המרוחקים בשורתם בלוח המאה שלושה צעדים (ימינה) מהמספרים באלכסון הראשי של הלוח (ראו איור 4).

איור 4:

מחברים אפשריים להבניית תרגיל חיבור פלינדרומי עם המחובר 85

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

אחרי בחירת המחובר הנוסף מתקבל תרגיל חיבור פלינדרומי, כמו למשל $85+36$. ב"קריאה הפוכה" של תרגיל זה מתקבל התרגיל $63+58$, וראו זה פלא: $85+36=63+58$. אולם הנס של לוח המאה אינו נגמר ונשאלת השאלה:



את האפשרויות לבחירת המחובר הנוסף. לאחר שתבחרו את המחובר השני, יסומן על הלוח גם זוג המחוברים האחר בתרגיל הפלינדרומי המורכב. כדאי לנסות לשחק ולגלות דברים שדילגנו עליהם. הנה שאלות לדוגמה: האם בתרגיל חיבור פלינדרומי ייתכנו שני מחוברים מאותה השורה בלוח המאה? אולי יש ביישומון מקרים, שזוג המחוברים השני לא מסומן בהם - האם זו טעות?

במאמר זה הוצגה פעילות על לוח המאה שהתמקדה בהבניית סכומים פלינדרומיים, כלומר תרגילי חיבור המאפשרים את קריאתם גם "בכיוון ההפוך". אנו מציעים כמה כיווני המשך לפעילות זו:

- הבניית תרגילי חיבור פלינדרומיים הכוללים מספרים תלת-ספרתיים או רב-ספרתיים (מתברר כי במספרים תלת-ספרתיים הדבר פשוט באופן מפתיע);
- הבניית תרגילי חיבור פלינדרומיים של מספרים דו-ספרתיים (גם כאן ללוח המאה יש תפקיד מרכזי);
- הבניית תרגילי כפל פלינדרומיים ובדיקת השאלה האם הדבר אפשרי בכלל? (כן, הדבר אפשרי. כלי עזר לפתרון תרגילים כאלה מוזכר במוטו של המאמר ותיאורו יפורט במאמר המשך).

מקורות

- גזית, א' (2004). הוראת מתמטיקה, עניין ויופי - הילכו יחדיו, ואולי לא נועדו? בתוך ש' גורי-רוזנבלית (עורכת), מורים בעולם של שינוי: מגמות ואתגרים (עמ' 356-389). תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.
- יצחק, מ' וקורופטוב, א' (2018). [פלינדרומים: אתגר לתלמידי כיתה ד', וגם לפרופסורים במתמטיקה](#). מספר חזק 2000, 29, 48-55.
- סיניצקי, א' ואילני, ב' (2014). שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות. תל-אביב: מכון מופ"ת.

