



על π , על יחס, ועל ייצוג שברים במערכת צירים

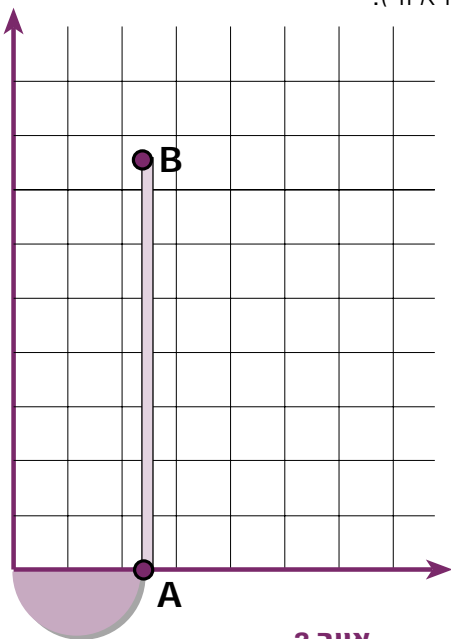
אילנה ארנון, המרכז לטכנולוגיה חינוכית, מט"ח
מלכה מאונטוויטן, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, משרד החינוך, התרבות והספורט

היקף העיגול וקוטרו, תיאור במערכת צירים

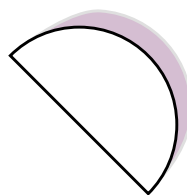
- לצורך הפעילות הזו הכינו:
 - אוסף של כלים שהבסיסים שלהם עגולים (לפחות 5-6 כלים שונים, כמו כוסות, קופסאות, בקבוקים ועוד).
 - נייר דבק, מספריים ודף שקוף.
 - מערכת צירים משובצת גדולה, שבה כל ריבוע הוא סמ"ר, כמו זו המצוירת כאן בהקטנה (איור 1).

מהלך הפעילות

- א. הניחו את אחד הכלים על דף שקוף ושרטטו את הבסיס שלו. גזרו את העיגול.
- ב. מצאו את קוטר העיגול על-ידי קיפול (איור 2).
- ג. סמנו את קוטר העיגול על הציר האופקי במערכת הצירים. (כמו באיור 3).
- הדביקו את העיגול המקופל על הציר האופקי מראשית הצירים. (כמו באיור 3).
- סמנו נקודה שחורה על הציר בקצה הימני של הקוטר (נקודה A באותו איור).



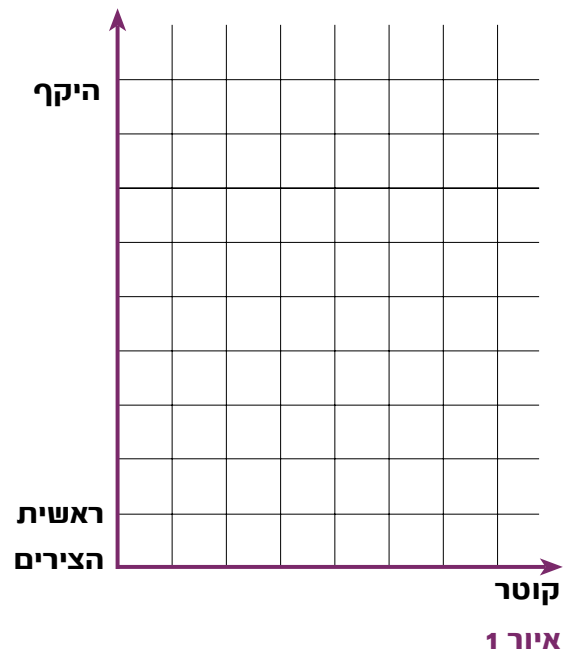
איור 3



איור 2

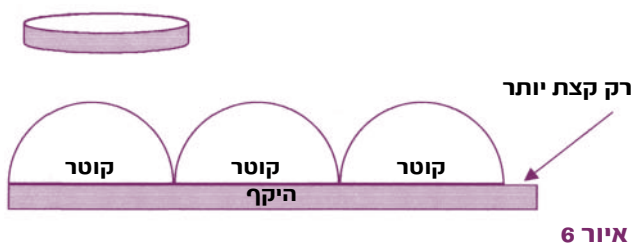
- בגיליון מס' 5 של מספר חזק ("מספר חזק 2000", 5) קראנו שני מאמרים שלכאורה אינם נפגשים בתוכם:
 - המאמר של ג'רי רוזן "טיול מתמטי בעכו" העוסק בחישובים הקשורים לעיגולים ומעגלים.
 - המאמר של ארנון, נשר ונירנבורג, "מה אפשר ללמוד על שברים רק עם מחשבים" העוסק בייצוג של שברים על-ידי ישרים במערכת צירים.
- לכאורה שני המאמרים עוסקים בתחומים מתמטיים שונים זה מזה. למעשה, יש קשר ביניהם.

- במאמר זה ננסה לקשרם. השדכן יהיה לא אחר מאשר ידידנו משכבר הימים π , ומקום הפגישה - מערכת צירים. במאמר "טיול מתמטי בעכו" מציע לנו ג'רי רוזן המחשה ליחס בין קוטר העיגול והיקפו (ראו שם בעמ' 15, איור 4). הנה הצעה לפעילות נוספת, בנושא קרוב לנושא של הפעילות הנ"ל.



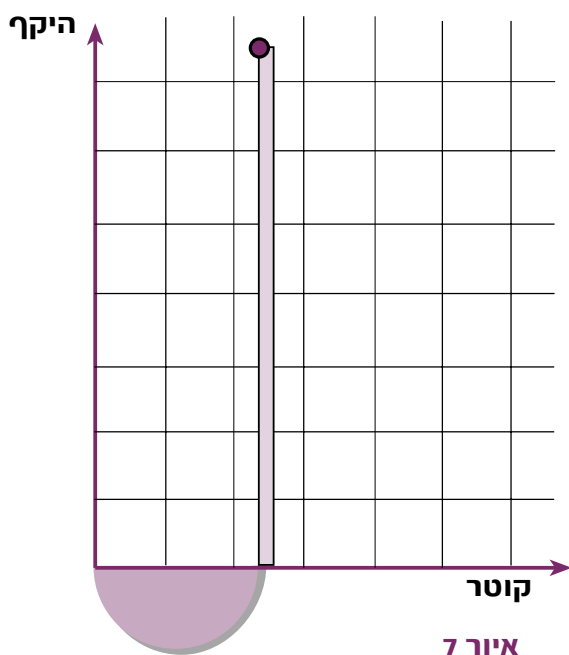
איור 1

בהן יחס קבוע בין שיעור ה- y לשיעור ה- x , מסתדרות תמיד על קו ישר העובר דרך הראשית. במאמר של ג'רי רוזן ראינו את האיור הזה, המתאר את הקשר בין היקף המעגל לקוטרו:

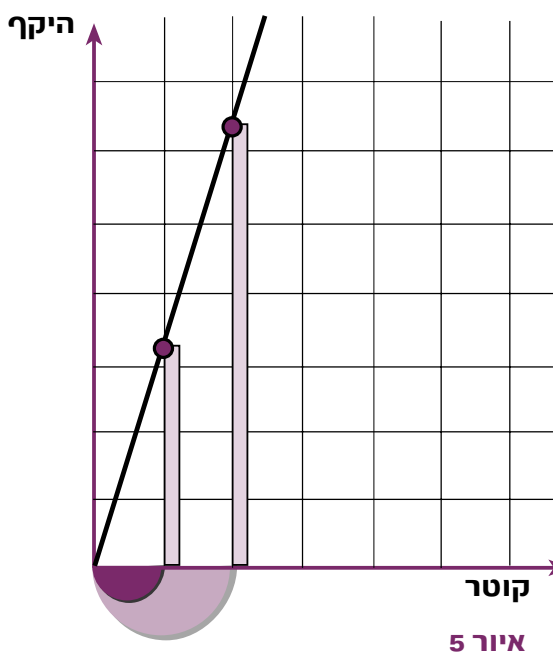


הוסיפו לאיור 7 שלמטה חצאי עיגולים כדי שנראה בו את מה שראינו באיור שהבאנו מן המאמר של ג'רי רוזן.

עד כאן הפעילות, המנוסחת כאן בקיצור. פעילות זו נוסחה בהצלחה עם תלמידים מכיתה ו'. אפשר למצוא אותה עם הוראות מדויקות בלשון התלמיד, ומערכת צירים גדולה מוכנה, בחוברת "אחת, שתיים ו...שלוש" מספר 17, בפרק "המעגל והעיגול" (עמ' 43-44) וגם בחוברת "המעגל והעיגול" מהסדרה "ועוד אחת" (עמ' 7-8).



איור 7



איור 5



איור 4

ד. הקיפו את בסיס הכלי בנייר דבק (איור 4). גזרו את נייר הדבק בדיוק לפי האורך של **היקף הבסיס**. ה. הורידו את נייר הדבק מהכלי והדביקו אותו על מערכת הצירים, מימין לנקודה A שסימנתם בסעיף ג' (כמו באיור 3).

ו. סמנו בצבע נקודה בפינה השמאלית העליונה של נייר הדבק, כמו נקודה B באיור 3.

ז. **באותה מערכת צירים** חזרו על הפעילות עם כלים נוספים, לפחות עוד כלי אחד.

הדביקו עיגול מקופל קטן מעל עיגול מקופל גדול (כמו באיור 5).

ח. חברו בקו ישר את הנקודות הצבעוניות שסימנתם והמשיכו את הקו לשני הצדדים.

האם השרטוט שקיבלתם דומה לאיור 5?

שאלה

מדוע מסתדרות כל הנקודות על קו ישר אחד, שצובר דרך הראשית?

תשובה

הנקודות מסתדרות על אותו הקו מכיוון שבכל נקודה שסימנו, שיעור ה- y הוא היקף של עיגול, ואילו שיעור ה- x הוא הקוטר של אותו עיגול. קיים יחס קבוע בין היקף העיגול לבין קוטרו. אותו יחס קיים בכל העיגולים, גדולים וקטנים. היחס הזה הוא π . במערכת צירים, נקודות שקיים

מכיוון ש- π שווה בערך ל-3.14, הישר של π נמצא בין הישר של 3 לבין הישר של 4, קרוב יותר לישר של 3. בתוכנה "שמש" עצמה אי-אפשר לקבל את הישר של π , אלא רק בצירי נייר ועיפרון, וזאת מפני שבתוכנה זו אפשר לצייר רק ישרים המייצגים מספרים רציונליים.

- ולמי שירצה להעמיק עוד בנושא, הנה עוד כמה שאלות:
- איפה בדיוק נמצא הישר של π ביחס לישרים של 3 ושל $3\frac{1}{2}$?
 - איפה הוא נמצא ביחס לישרים של $\frac{31}{10}$ ושל $\frac{32}{10}$?
 - איפה נמצא הישר של π ביחס לישר של $\frac{22}{7}$?

שאלה לסיכום

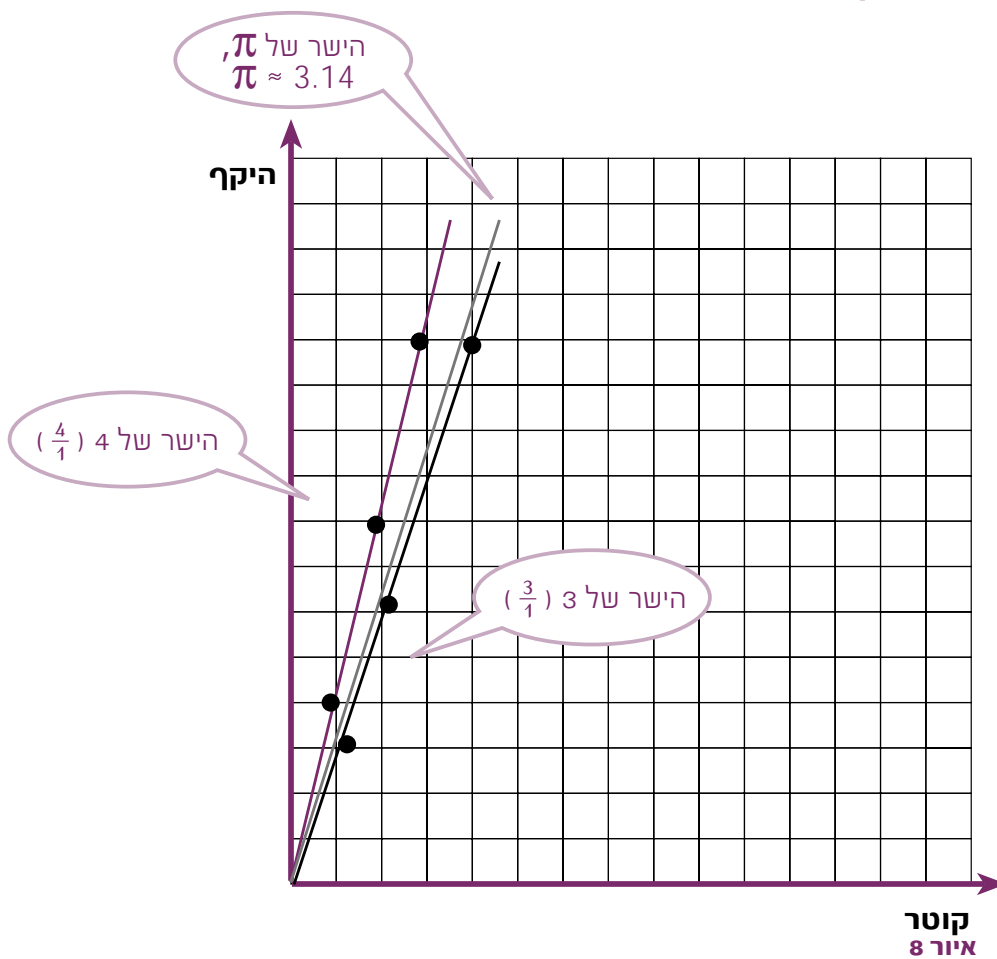
באיור 8 נראה שהישר של π , נוגע לעיתים באחת מהנקודות של הרשת. האם זה ייתכן? זכרו שלכל הנקודות ברשת הזו יש שיעורים (קואורדינטות) שלמים!

שתי החוברות מיועדות לכיתה ו', אבל הפעילות מתאימה מאוד גם לתלמידים בחטיבות הביניים, במיוחד לכאלה שלמדו או לומדים על הפונקציה הקווית ותכונותיה.

והנה הקשר ללימוד שברים בעזרת הלומדה "שמש" (שברים כמחלקות שקילות, מט"ח). בעזרת התוכנה "שמש" לומדים שכל שבר פשוט (מספר רציונלי), דהיינו, כל מספר הניתן לביטוי כ- $\frac{a}{b}$, כאשר a, b מספרים שלמים, $b \neq 0$, מיוצג על-ידי ישר יחיד במערכת צירים, ביחד עם כל השברים השווים לו. π איננו שבר פשוט, שהרי הוא שבר עשרוני אינסופי בלתי מחזורי. הוא מתקבל כמנת ההיקף בקוטר של כל עיגול ועיגול. וראה זה פלא - מן הפעילות שהצענו למעלה נובע שגם ל- π מתאים ישר כזה, למרות שהוא איננו מספר רציונלי! תלמידים שלמדו שברים בעזרת התוכנה "שמש" יוכלו להמשיך עוד את הפעילות שלמעלה. לתלמידים אלו כדאי להפנות את השאלה הבאה:

איפה במערכת הצירים מקומו של הישר של π ?

הנה התשובה:



{ מקורות }

Klein, A.S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (4), 443-464.