פעילות מטה-קוגניטיבית באחוזים

רונית בסן צינצינטוס, מלכה שפט - מכללת סמינר הקיבוצים

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) – מושגים מתקדמים בנושא האחוז.
רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות – תמורת האחוז, חישוב האחוז, חישוב הגודל היסודי, האחוז כמקרה פרטי של פרופורציה, אחוז כאופרטור, טבלאות התאמה, מספרים רציונאליים.
קישור לנושאים נוספים: שימוש במשתנים.
זמן משוער ללימוד הנושא: 4 ש"ל.
מטרות המפגשים: פעילות מטה-קוגניטיבית על מנת להעמיק את הידע הפדגוגי תוכני לו נדרש המורה המקצועי. העמקת הידע המתמטי באחוזים: מהו אחוז, מתי ניתן להחליף שבר באחוזים, היכרות עם בעיות אלמנטאריות באחוזים, היכרות עם תפיסות שגויות בפתרון בעיות אחוזים.
חומרי עזר: 5 דפי עבודה, 2 שקפים למורה, המחשות. (נמצאים בנספחים שבסוף היחידה).

מהלך הפעילות והסברים לפעילות

שלב א: זיהוי פתרונות נכונים ושגויים לבעיה נתונה

חלוקת **דף עבודה מס' 1** ובו הבעיה הבאה ו- 4 פתרונות.

הבעיה: סכום שני מספרים הוא 464. מספר אחד גדול ב- 32% מהשני. מצאו את המספרים.

פתרון א: $x+\frac{132}{100}x=464$ **פתרון ב:** $x+\frac{100}{132}x=464$

פתרון ג: $\frac{34}{100}x+\frac{66}{100}x=464$ **פתרון ד:** $x+\frac{68}{100}x=464$

המורים מתבקשים לזהות את הפתרונות הנכונים והשגויים (**מבלי לפתור**) ולהסביר מה הנחה את הפותר לפתרון. בשלב זה אין דיון בפתרונות אלא אוספים את תשובות המורים לגבי נכונות הפתרונות והסבר לכל פתרון.

פתרון א: $x+\frac{132}{100}x=464$

פתרון נכון. המשתנה x מייצג את המספר הקטן.

פתרון ב: $x+\frac{100}{132}x=464$

פתרון נכון. המשתנה x מייצג את המספר הגדול. לכן, המספר הקטן מהווה $\frac{100}{132}$ מתוך המספר הגדול.

פתרון ג: $\frac{34}{100}x+\frac{66}{100}x=464$

פתרון שגוי. במקרה זה הפותר התייחס לסכום שני המספרים 464 כאל הגודל היסודי והחליט שהוא ה- 100%. הוריד 32% ואת הנותר חילק לשני חלקים שווים. בכל חלק התקבלו 34%. לאחד החלקים הוא הוסיף את 32% וקיבל 66%. החלק הגדול מכיל 32% יותר מאשר החלק הקטן (32% של הסכום כולו).

מכאן, המספר הגדול הוא: $\frac{66}{100}\times 464=306.24$ והמספר הקטן הוא: $\frac{34}{100}\times 464=157.76$.

מתקבל שהמספר הגדול, גדול ב- 94.1% מהמספר הקטן – אין התאמה לנתוני הבעיה.

לשם פתרון הבעיה הפותר חישב ופתר במספרים ולא לקח בחשבון שמדובר באחוזים. הוא לא התייחס לאחוזים כאופרטור. הפתרון אינו פתרון אלגברי אך מכיוון שנדרש להציג משוואה הוא כתב את המשוואה הנ"ל והסביר: $\frac{34}{100}x$ זה המספר הקטן, $\frac{66}{100}x$ זה המספר הגדול, ביחד שווה 464.

פתרון ד: $x+\frac{68}{100}x=464$

פתרון שגוי. אין התאמה לנתוני הבעיה. במקרה זה הפותר מייצג במשתנה x את המספר הגדול ומחשב את המספר הקטן כ- 68% ממנו. כלומר: הפותר חושב כי אם המספר הגדול, גדול ב- 32% מהמספר הקטן, אז גם המספר הקטן, קטן ב- 32% מהמספר הגדול.

בשלב זה אין לדון עם המורים על נכונות הפתרונות אלא רק לאסוף את תשובות המורים לכל אחד מארבעת הפתרונות.

מניסיוננו, רוב המורים ישללו את נכונותו של פתרון ב וינמקו זאת "באחוזים המאה צריך להיות במכנה".

שלב ב:

למורים יינתן **דף עבודה מס' 2**.

הפתרון לבעיה הראשונה:

המספר הקטן - x, המספר הגדול - $x+\frac{1}{2}$ והמשוואה - $x+x+\frac{1}{2}=2$. המספרים הם: $\frac{3}{4}$ ו- $1\frac{1}{4}$. או ללא אלגברה, מורידים מהסכום 2 את $\frac{1}{2}$ ואת הנותר מחלקים לשני חלקים שווים. לאחד מהם מוסיפים את ה- $\frac{1}{2}$. מתקבלים המספרים שהוצגו קודם.

הפתרון לבעיה השנייה:

המספר הקטן - x, המספר הגדול - $x+\frac{1}{2}x$ והמשוואה - $x+x+\frac{1}{2}x=2$. המספרים הם: $\frac{4}{5}$ ו- $\frac{6}{5}$.

או ללא אלגברה: במספר הקטן יש 2 חלקים. במספר הגדול יש 3 חלקים. סה"כ בסכום 2 יש 5 חלקים.

לכן כל חלק יהיה $\frac{2}{5}$. במספר הקטן יש 2 חלקים לכן הוא יהיה $\frac{4}{5}$. המספר הגדול הוא 3 חלקים לכן יהיה $\frac{6}{5}$.

בדיון בין שתי הבעיות יש לעמוד על כך ששתי הבעיות דומות אך לכל אחת מהן פתרון שונה. זאת משום תפקידיו השונים של ה- $\frac{1}{2}$. בבעיה א ה- $\frac{1}{2}$ מייצג שם מספר. ואילו בבעיה ב ה- $\frac{1}{2}$ מייצג חלק של כמות - אופרטור.

כאשר נחליף בבעיות א ו- ב את ה- $\frac{1}{2}$ ב- 50%, יתקבלו בעיות ג ו- ד הבאות:

בעיה ג: סכום שני מספרים הוא 2. מספר אחד **גדול מ**המספר השני **ב-** 50%. מהם המספרים?

בעיה ד: סכום שני מספרים הוא 2. מספר אחד **גדול ב-** 50% **מ**המספר השני. מהם המספרים?

הפעם אין לשתי הבעיות משמעויות שונות. לשתי הבעיות פתרון אחד $\frac{4}{5}$ ו- $\frac{6}{5}$. ברגע שהחלפנו בבעיה הראשונה את המספר $\frac{1}{2}$ ב- 50% הבעיה השתנתה.

הדיון בשתי הבעיות ג ו- ד צריך לעמוד על כך ש**אחוזים** מתארים תמיד **חלק של** כמות נתונה.

המסקנה מהפעילות של שלב ב היא שאחוזים אינם שם אחר לשבר.

שלב ג: מתי אפשר להחליף שבר באחוזים ולהיפך?

דף עבודה מס' 3 סעיפים א ב ג מתרגלים נושא זה.

הערה למורי המורים: ניתן להוסיף כאן דפי תרגול נוספים מתוך ספרי לימוד שונים.

שלב ד: סוגי בעיות אלמנטריות באחוזים

מבקשים מהמורים לבצע חלק ד ב**דף עבודה מס' 3**. הדיון בשונה בין הבעיות ייעשה בעזרת תיאור שלושת הסוגים של הבעיות האלמנטריות באחוזים.

הבעיות האלמנטריות הקשורות לאחוזים מתחלקות לשלושה סוגים עיקריים.

א. חישוב תמורת האחוז: לתחום זה שייכות הבעיות בהן נדרש לחשב את הכמות a שהיא p% מתוך הכמות b. לדוגמה: לגיל יש בקופה 250 ₪. הוא רכש ספר. מה מחיר הספר אם ידוע שגיל הוציא 20% מכספו? התרגיל המתאים יהיה: $a = \frac{p}{100} \times b$ או $a = \frac{20}{100} \times 250$.

ב. **חישוב האחוז**: לתחום זה שייכות הבעיות בהן נדרש לחשב את האחוז p שמהווה הכמות a מתוך הכמות b. לדוגמה: לגיל יש בקופה 250 ₪. הוא הוציא 50 ₪ לקניית ספר. איזה % מהווה מחיר הספר מכספו של גיל? התרגיל המתאים יהיה: $p = \frac{a}{b} \times 100$ או $p = \frac{50}{250} \times 100$.

ג. **חישוב הגודל היסודי**: לתחום זה שייכות הבעיות בהן נדרש לחשב את הכמות b אם נתון ש- p אחוזים ממנה זו הכמות a. לדוגמה: גיל הוציא על קניית ספר 50 ₪. כמה כסף היה לגיל בקופה לפני הקנייה אם ידוע שמחיר הספר מהווה 20% מהכסף שהיה לגיל בקופה (לפני הקנייה)?

התרגיל המתאים יהיה: $b = \frac{a \times 100}{p}$ או $b = \frac{50 \times 100}{20}$.

מממצאי מחקרים עולה כי הבעיות בהן נדרש חישוב הגודל היסודי קשות יותר לתלמידים ואחוזי ההצלחה בהן נמוכים. לעומתם, בעיות של חישובי תמורת האחוז הן הקלות ביותר (Hershkowits & Halevi, 1988 שמואלי, 1993).

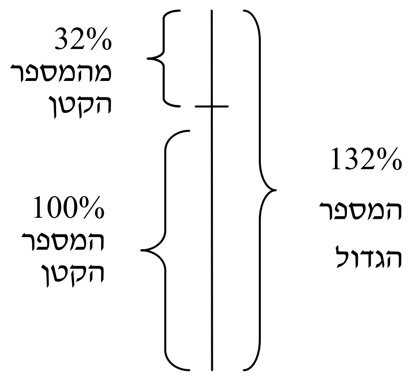
שלב ה: פתרון בעיה באחוזים בשתי דרכים שונות

מבקשים מהמורים לפתור את **דף עבודה מס' 4**. יש לתת למורים לעבוד בדף זה מבלי לערוך דיון על נכונות התשובות (דף עבודה מס' 3). המורים מתבקשים לפתור את הבעיה בדרך אלגברית כאשר פעם המשתנה x מייצג את המספר הקטן ופעם את המספר הגדול.

כאשר x מייצג את המספר הקטן הפתרון הנכון הוא: $x + \frac{132}{100}x = 464$ (פתרון א מ**דף עבודה מס' 1**).

כאשר x מייצג את המספר הגדול הפתרון הנכון הוא: $x + \frac{100}{132}x = 464$ (פתרון ב מ**דף עבודה מס' 1**).

היחסים בין המספר הקטן והמספר הגדול מוצגים בתרשים הבא:



העבודה בדף מעוררת קשיים בעיקר בחלקה השני, בה נדרש שהמשתנה ייצג את המספר הגדול. זו התנסות ברמת לומד מבוגר בקשיים של מציאת הגודל היסודי בבעיות אחוזים. בדומה לתלמיד שיתקשה בבעיות אלה.

כדאי לקשר את שני הפתרונות של בעיית המספרים לסוגים שונים של בעיות אלמנטאריות באחוזים. כאשר מבקשים לפתור את הבעיה בה המשתנה מייצג את המספר הקטן, זו בעיה של תמורת האחוז, וכאשר x מייצג את המספר הגדול, זו בעיה של חישוב הגודל היסודי.

עכשיו יש לחזור לנתונים שנאספו בפתיחת היחידה ולראות מה אמרו המורים לגבי פתרון א ופתרון ב ולדון בנכונות שני פתרונות אלה.

אינטואיציה שגויה: באחוזים המאה תמיד במכנה

מה מונע לזהות שפתרון ב $x+\frac{100}{132}x=464$ הוא נכון? מתוך ההנמקות ניתן לראות כי כל אלו שטעו, מצפים בפתרונות של בעיות אחוזים לראות את ה- 100 במכנה. "...כדי לכתוב אחוז בשבר עליו **לחלקו ב-100**". או "**...הדרך בה כתב את האחוזים שגויה. התלמיד לא הבין כי השלם מיוצג על-ידי 100 במכנה.**" או "**התלמיד התבלבל בין מונה למכנה**". על אף שרק בבעיות של חישובי תמורת האחוז, נמצא ה- 100 במכנה ובבעיות של חישובי האחוז ושל חישובי הגודל היסודי ה- 100 נמצא במונה, מצפים למצוא את ה-100 במכנה. ציפייה זו משקפת אינטואיציה לגבי בעיות אחוזים. פישביין (Fischbein, 1987) טען כי: "על-סמך התנסויותיו, הפרט יוצר מערכת ציפיות יציבה בקשר למאורעות דומים לאלה שכבר התנסה בהם. מערכת הציפיות היא הבסיס לצמיחת האינטואיציות כמסגרת מלאה ושלמה של תיאוריה. משום כך לפעמים האינטואיציות מכילות המחשות מוטעות או שגויות" (שם, עמ' 89-88). על-פי פישביין, האינטואיציה מאופיינת ב"מובן מאליו, שיכנוע פנימי, יציבות, כפייתיות, הכללה, יכולת חיוץ ויש לה מכניזם סמוי". על סמך האינטואיציה מתפתחת האמונה השגויה: **בבעיות אחוזים ה- 100 תמיד במכנה**. כאשר פוגש הלומד פתרון לבעיית אחוזים המתאים לאינטואיציה שלו, ה- 100 במכנה, האינטואיציה "כופה" עליו לקבל אותו כנכון. הוא מאשר מיידית את הפתרון ובטוח בנכונותו. אבל כאשר הפתרון אינו מתאים לאינטואיציה שלו, ה- 100 במונה, האינטואיציה "כופה" עליו לפסול את הפתרון.
פישביין טען שהאינטואיציה מתגבשת על סמך התנסויותיו של הלומד. ייתכן ומשום שמרבית הבעיות שפותרים הן בעיות העוסקות בחישובי תמורת האחוז (בהן ה- 100 אכן במכנה) התגבשה האינטואיציה כך, וייתכן גם כי זוהי הסיבה שההצלחה בהן רבה יותר. ואולי הסיבה לכך היא שבראשית לימוד נושא האחוזים מודגש האחוז כ- $\frac{1}{100}$.
מכל מקום, אינטואיציה זו פסלה מיידית את האפשרות שפתרון ב יהיה נכון.

שלב ו: העברת יתר של טכניקות פתרון בעיות במספרים

לענות על **דף עבודה מס' 5**.

הפתרון לשאלה הראשונה:

כאשר מספר אחד גדול מהשני ב- 32 וסכומם 464 הפתרון יהיה:

מחסרים 32 מ- 464 ומתקבל 432. כלומר, מחסרים את הכמות שיש למספר אחד יותר מלשני. לכן הנותר מתחלק שווה בין שניהם 232 = 464:2.

מכאן: המספר הקטן יהיה 232 והמספר הגדול יהיה 264 = 232+32.

ניתן לפתור גם בעזרת משתנה.

המספר הקטן: x

המספר הגדול: $x + 32$

המשוואה תהא: $x + x + 32 = 464$.

הפתרון של הבעיה השנייה:

הפתרון זהה לפתרון סעיף א של **דף עבודה מס' 1**.

הבעיות דומות: הטקסט המתאר את המצב בבעיה מאוד דומה. שתיהן בעיות השוואה, בשתי הבעיות אותם המספרים.

הבעיות שונות: התיאור של קבוצת ההפרש (ההבדל בין שני המספרים) שונה. פעם הקבוצה מתוארת כמספר ופעם כאחוזים - חלק של המספר הקטן. לכן נדרשות פעולות שונות לפתרון כל בעיה.

בעקבות העבודה והדיון ב**דף עבודה מס' 5** יש לחזור ולדון בפתרונות ג ו- ד של **דף עבודה מס' 1**.

פתרון סעיף ג משקף את התפיסה המוטעית: אם חלק אחד הוא 34% מהכמות והחלק השני הוא 66% מהכמות, אז החלק הגדול, גדול ב- 32% מהחלק הקטן.

ייתכן ותפיסה מוטעית זו נובעת מהעברת יתר מבעיות במספרים.

כאשר מחפשים שני מספרים האחד גדול ב- 32 מהשני, התלמיד יבטא את המספר הקטן כ- x ואת המספר הגדול כ- $x + 32$. אימוץ טכניקה זו לבעיות אחוזים תביא לכך שהמספר הגדול הוא 66% מהסכום כולו, המספר הקטן הוא 34% מהסכום כולו. לכן, המספר הגדול, גדול ב- 32% מ- 34%. ההתייחסות לאחוזים היא כאל מספרים לכל דבר וככאלה ניתן לחבר ולחסר אותם. פתרון כזה מעיד שהפותר אינו מבחין בין שתי הבעיות שהופיעו ב**דף עבודה מס' 5**. הפותר משתמש בטכניקה של פתרון הבעיה הראשונה לשם פתרון הבעיה השנייה. פתרון כזה מציג אי-הבנה של מושג האחוזים.

פתרון ד מ**דף עבודה מס' 1** משקף את התפיסה המוטעית: אם המספר הגדול, גדול ב- 32% מהמספר הקטן, אז המספר הקטן, קטן ב- 32% מהמספר הגדול.

גם תפיסה מוטעית זו ניתן להסביר כהעברת יתר מבעיות במספרים.

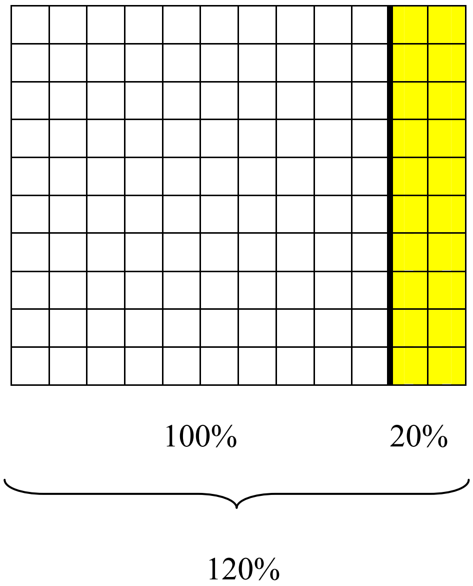
אלה שפתרו מתוך הבנה (שגויה) כי אם המספר הגדול, גדול מהמספר הקטן ב- 32%, אז המספר הקטן, קטן ב- 32% מהמספר הגדול, פעלו על פי ניסיונם בבעיות דומות במספרים.

אם $y = x + 32$ אז $x = y - 32$.

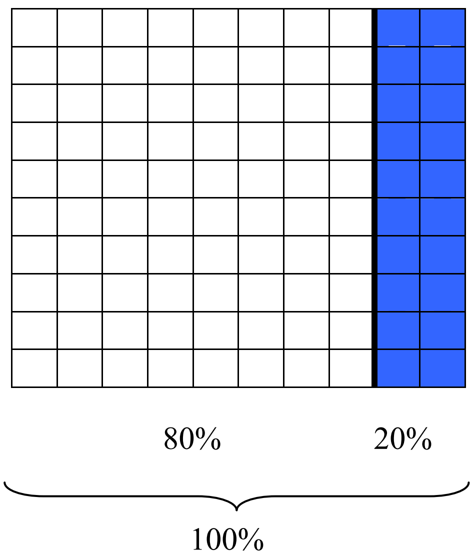
שוב, אימוץ גישה זו לבעיות אחוזים מעיד כי לא התגבשה ההבנה כי אחוזים תמיד מתארים חלק של כמות. ייתכן כי הפותר יודע שאחוזים מתארים חלק של כמות, אך אינו נותן את הדעת לגודל היסודי ממנו יחושבו האחוזים.

כמו במקרה של מוצר שהתייקר ב- 20% ולאחר מכן הוזל ב- 20%. יש פותרים המצפים שהמחיר לאחר ההוזלה יחזור להיות המחיר שלפני ההתייקרות. כך גם במקרה זה. הפותר חושב ש- 32% מהמספר הקטן זהה ל- 32% מהמספר הגדול. אבל, תמורת 32% מגודל יסודי אחד אינה שקולה לתמורת 32% מגודל יסודי אחר. חשוב בבעיות אחוזים לברר מתוך איזה שלם מחשבים את האחוז.

במקרה של הוספת 20%, הגודל היסודי הוא הריבוע הלבן, ונוסף החלק הצהוב.



במקרה של הורדת 20% אחרי שנוספו 20%, הגודל היסודי הוא עתה הריבוע הגדול. אם נוריד ממנו 20% (החלק הכחול) מורידים חלק אחר גדול יותר מהחלק שנוסף קודם לכן.



למורי המורים: אם שמים שקף על שקף רואים שהכחול גדול מהצהוב. (ראה **שקף מס' 1א ו- 1ב**)

שלב ז: תרגול בפתרון בעיות אחוזים שונות מספרי לימוד

נספחים

דף עבודה מס׳ 1

מספרים ואחוזים

ניתנה הבעיה הבאה:

סכום שני מספרים 464. **מספר אחד גדול ב- 32% מהשני.** **מצא את המספרים.**

לפניכם ארבעה פתרונות שונים לבעיה. חוו דעתכם על כל פתרון והסבירו:

- האם הפתרון נכון או שגוי.
- על מה הסתמך הפותר כאשר פתר בדרך זו.

פתרון א:

$$x + \frac{132}{100}x = 464$$

פתרון ב:

$$x + \frac{100}{132}x = 464$$

פתרון ג:

$$\frac{34}{100}x + \frac{66}{100}x = 464$$

פתרון ד:

$$x + \frac{68}{100}x = 464$$

דף עבודה מס' 2

פתרו את שתי הבעיות הבאות

בעיה א: סכום שני מספרים הוא 2. מספר אחד **גדול מ**המספר השני **ב-** $\frac{1}{2}$**.** מהם המספרים?

בעיה ב: סכום שני מספרים הוא 2. מספר אחד **גדול ב-** $\frac{1}{2}$ **מ**המספר השני. מהם המספרים?

דיון: הדומה והשונה בשתי הבעיות א ו- ב.

החליפו את ה- $\frac{1}{2}$ **בכל אחת מהבעיות ב- 50% ופתרו את הבעיות החדשות (ג ו- ד)**

בעיה ג: סכום שני מספרים הוא 2. מספר אחד **גדול מ**המספר השני **ב-** $\boxed{}$ **.** מהם המספרים?

בעיה ד: סכום שני מספרים הוא 2. מספר אחד **גדול ב-** $\boxed{}$ **מ**המספר השני. מהם המספרים?

דיון: הדומה והשונה בשתי הבעיות ג ו- ד.

דף עבודה מס' 3

א. פתרו את הבעיות הבאות.

1. לדן בקופה 25 ₪. הוא קנה ב- $\frac{1}{5}$ מכספו ספר. כמה עלה הספר?
2. הלכתי ביום ראשון $3\frac{3}{4}$ ק"מ וביום שני $2\frac{1}{5}$ ק"מ. כמה הלכתי בשני הימים?
3. ביום א הלכתי $\frac{1}{4}$ ק"מ. ביום ב הלכתי $\frac{14}{50}$ ק"מ. מתי הלכתי יותר?
4. $\frac{1}{8}$ מכספי תרמתי לקרן קיימת לישראל. לארץ ישראל היפה תרמתי ב- $\frac{1}{8}$ יותר.
   א. איזה חלק תרמתי לארץ ישראל היפה?
   ב. איזה חלק מכספי תרמתי בסך הכל?
5. מלכה תרמה $\frac{1}{8}$ ממשכורתה ורונית תרמה $\frac{1}{8}$ ממשכורתה. איזה חלק ממשכורותיהן הן תרמו ביחד?

ב. החליפו, אם אפשר, את השברים באחוזים. הסבירו.

ג. פתרו את השאלות כאשר מופיעים בהן האחוזים.

ד. לפניכם 3 בעיות שונות באחוזים. פתרו וציינו מה ההבדל ביניהן.

1. לגיל יש בקופה 250 ₪. הוא רכש ספר. מה מחיר הספר אם ידוע שגיל הוציא 20% מכספו?

2. לגיל יש בקופה 250 ₪. הוא הוציא 50 ₪ לקניית ספר. איזה % מהווה מחיר הספר מכספו של גיל?

3. גיל הוציא על קניית ספר 50 ₪. כמה כסף היה לגיל בקופה לפני הקנייה אם ידוע שמחיר הספר מהווה 20% מהכסף שהיה לגיל בקופה (לפני הקנייה)?

דף עבודה מס' 4

לפניכם הבעיה הבאה:

סכום שני מספרים 464 .
מספר אחד גדול ב- 32% מהשני.
מצא את המספרים.

א. כיצד תסבירו לתלמידים לפתור את הבעיה כאשר x מייצג את המספר הקטן?

ב. כיצד תסבירו לתלמידים לפתור את הבעיה כאשר x מייצג את המספר הגדול?

דף עבודה מס׳ 5

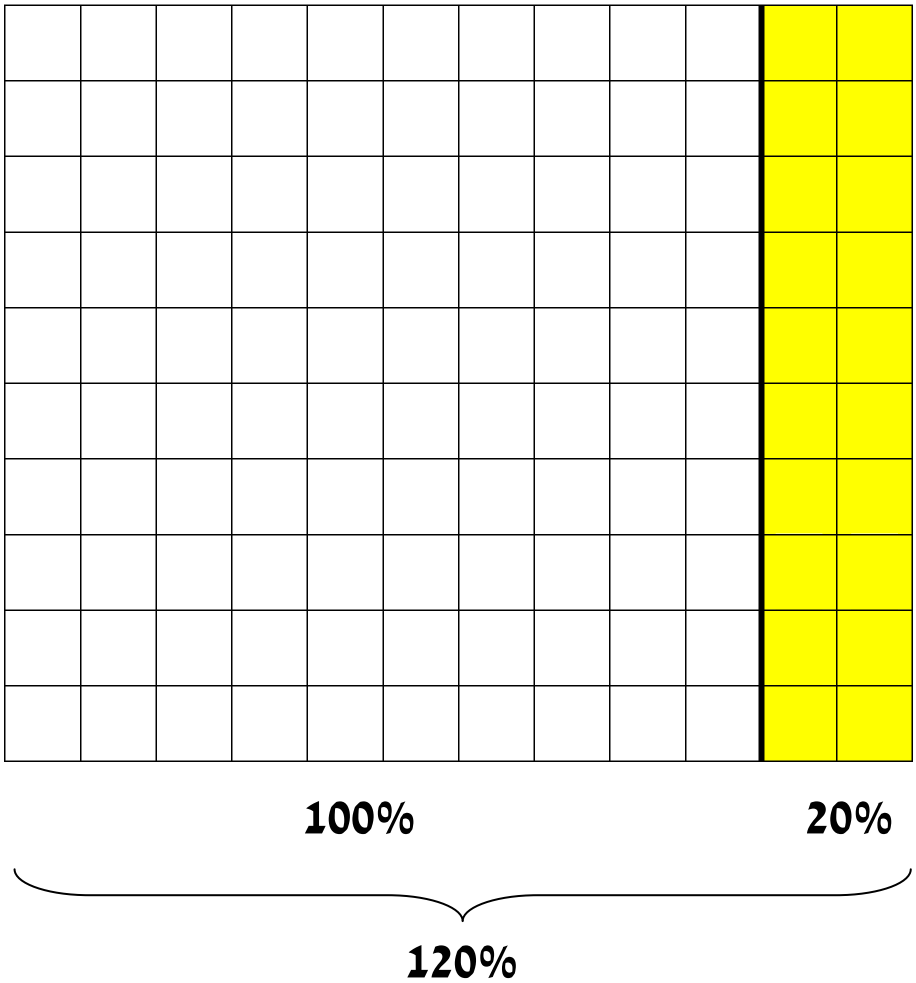
פתרו את שתי הבעיות הבאות.

א. סכום שני מספרים הוא 464. מספר אחד גדול **ב- 32** מהמספר השני. מהם המספרים?

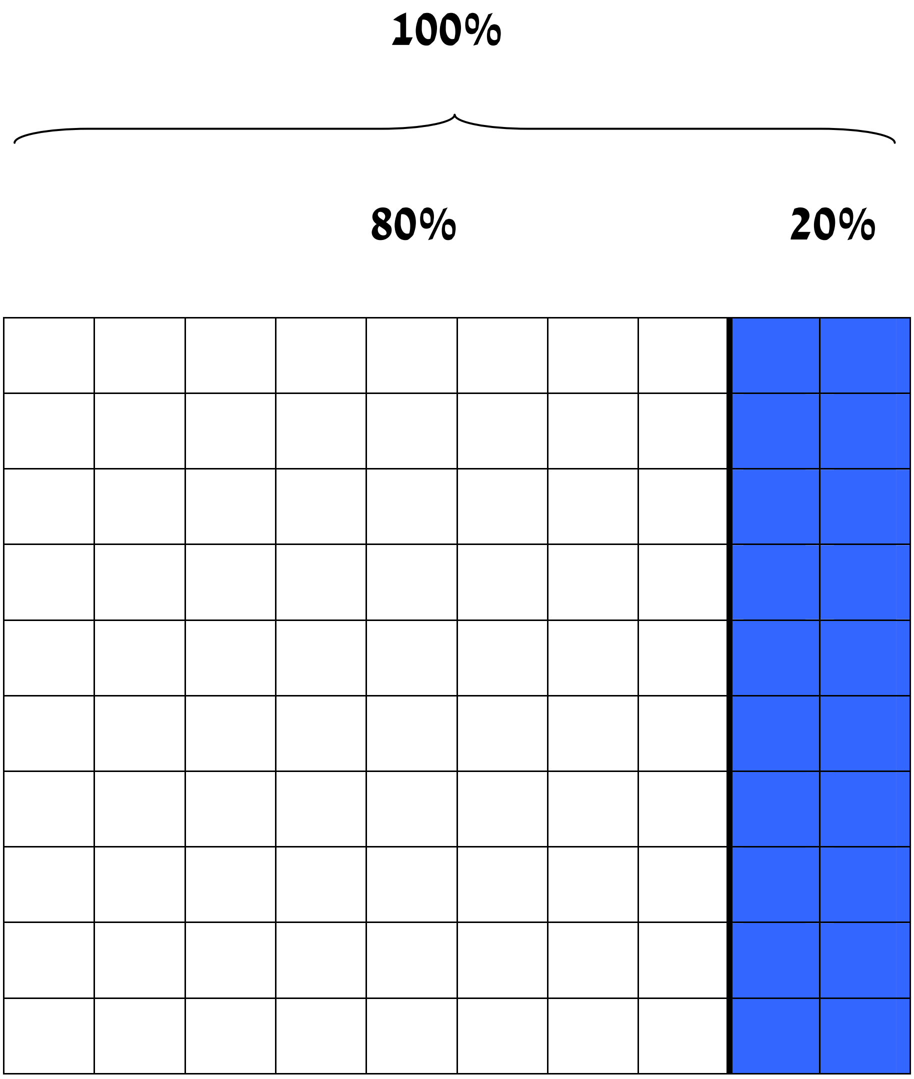
ב. סכום שני מספרים הוא 464. מספר אחד גדול **ב- 32%** מהמספר השני. מהם המספרים?

דיון: במה דומות ובמה שונות הבעיות.

שקף מספר 1א



שקף מספר 1ב



מקורות

אחת שתיים ו...שלוש. חלק 18. (1998). הוצאת המרכז לטכנולוגיה חינוכית, תל-אביב.

בסן-ציצינטוס, ר' ושפט, מ' (2004). התלמיד התבלבל, באחוזים ה- 100 במכנה: מהשדה אל פרחי הוראה. **החינוך וסביבו, שנתון מכללת סמינר הקיבוצים תשס"ד**, 251-266.

משלר, מ' (1974). **אלגברה לשנת הלימודים השביעית**. הוצאת עם עובד: תל-אביב. (הוצאה מקורית בשנת 1969).

קרמרסקי, ב', ליברמן, א', מרום, אילה', דרוקר, א' שיאון, נ' (תשס"ג). פרק א': יחס ופרופורציה. בתוך: **פיתוח חשיבה כמותית**. ע. רימון (עורך). המרכז להוראת המדעים, אגף התכנון, המזכירות הפדגוגית האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים משרד החינוך, עמ' 5-48. (קישור לפרק)

פרל, ח', שגב, ס', שמעוני, ג', אופיר, י', עינב, ח' ושמעוני, נ' (תשס"ג). פרק ד': שברים עשרוניים. בתוך: **פיתוח חשיבה כמותית**. ע. רימון (עורך). המרכז להוראת המדעים, אגף התכנון, המזכירות הפדגוגית האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים משרד החינוך, עמ' 123-174. (קישור לפרק)

רובינזון, נ', תעיזי, נ', ענבר, י' וקורן, מ' (2000). **לומדים מתמטיקה, על המספרים + מדריך למורה**. המחלקה להוראת המדעים מכון ויצמן: רחובות.

שמואלי, נ' (1993). **תפיסת מושג האחוז**. עבודת גמר לקראת התואר מוסמך למדעי הרוח, אוניברסיטת תל-אביב.

תירוש, ד' (1996). **מתמטיקה מחקר והוראה**. הוצאת מכון מופ"ת: תל-אביב.

Hershkowits, R., & Halevi, T. (1988). Initial research into the understanding of percentages. *Proceeding of the 12th annual conference of the international group for the psychology of mathematics education.* Veszprem, Hungary.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dortrecht, Holland: Reidel.