סיכום מאמרים בנושא הסימן "=" כמציין שוויון מתמטי
וכמהווה קישור מהותי בין אריתמטיקה לאלגברה

ערכה וסיכמה: ברכה סגליס

חלפו יותר מעשרים שנה מאז שוורדה וייס [4] בדקה בכמה בתי ספר בישראל כיצד ילדים פותרים את התרגיל $4 + 8 = \_\_ + 5$. היא מצאה להפתעתה שמרבית תלמידי כיתות היסוד שבדקה רושמים במקום הריק את המספרים 12 או 17. נראה שחלק גדול מן התלמידים מתייחס לסימן ה"=" כהוראה לחשב ולרשום אחריו את תוצאת חישוב זה (כמו שסימן ה"=" פועל במחשבון). המחקר הקטן שוורדה ערכה נועד להשוות בין המצב בארץ לממצאי מחקר דומה [6] שנערך בארצות הברית והציג תוצאות כמעט זהות.

מאז התפתחה מודעות לנושא. תוכניות הלימודים במדינות שונות שילבו כבר מכיתות היסוד הנמוכות התייחסות לסימן ה"=", ויכולת להתמודד עם תרגילים מסוג משוואות פשוטות כמו $25 = \_\_ + 3$, $68 = 4 - \_\_$ [5], ואכן ספרי הלימוד עסקו בכך בהרחבה. דוגמה לניסיון כזה מוצג במאמר של חנה קלוז'ני: רכבת השוויונות בכיתה ב' [7]. למרות כל זאת, כנאמר במאמר [1] שיצא לאור השנה (2022), תלמידים רבים עדיין שוגים. הדבר נכון לא רק לכיתות היסוד הנמוכות, אלא גם לתלמידי כיתה ו'.

מדוע זה קורה? מה מקשה על תלמידים להבין שהסימן "=" מציין יחס שוויון בין ביטויים מתמטיים ולא רק בהוראה לחשב ולמצוא תוצאה? מדוע חשוב הנושא, ואיך הוא קשור ליכולת של התלמידים בהמשך לימודי האלגברה?

מתוך מאמר [2]:

סימן "=" הוצג לראשונה במאה ה־16 ונהיה סימן מוכר אוניברסלי לציון שוויון מתמטי. המאמר מסביר את ההיבט הפורמלי של סימן ה"=", כפי שניתן גם לקרוא בוויקיפדיה בעברית:

סימן השוויון "=" הוא סימן מקובל המציין את יחס השוויון. שוויון הוא מושג המופיע בכל תחומי המתמטיקה תוך התייחסות לעצמים שבכל תחום. כך מוגדר שוויון בין מספרים, קבוצות, פונקציות, גרפים וכדומה. בכל ביטוי מתמטי של שוויון ישנם שני אגפים: ימני ושמאלי.

שוויון הוא יחס שקילות, כלומר הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי (ויקיפדיה, עברית).

אם כך, חלק מהידע על אודות סימן ה"=" הוא ההבנה שניתן להשתמש בו בתהליכים וטרנספורמציות מתמטיים ושהוא בעצם יחס. זוהי ההבנה שהסימן מסמל זהות של הביטויים המוצגים משני צדדיו. ניתן ליישם הבנה מפותחת זו של סימן ה"=" כבר בבית הספר היסודי ובחטיבות ביניים.

ישנה הסכמה כללית בקרב חוקרים רבים שהבנת משמעותו של סימן ה"=" מסייעת ליכולת אלגברית טובה יותר, כולל כישורים בפתרון משוואות בפרט, וחשיבה אלגברית בכלל. למרבה הצער, עשרות מחקרים מצביעים על הקשיים של תלמידים בבתי הספר היסודיים ובחטיבות הביניים בהבנה זו. לעיתים קרובות תלמידים מפרשים את הסימן כמציין את הצורך לבצע פעולה ולקבל תשובה. באופן דומה מרבית התלמידים בבתי הספר היסודיים בארה"ב (שם נערכו מרבית המחקרים) נוטים לראות משוואות שאינן מופיעות בפורמט של $a + b = c$ (לדוגמה, $7 + 6 = 6 + 6 + 1$) כמשוואות שגויות או לא הגיוניות. אנשי חינוך מתמטי נוהגים לחשוב שטעויות כאלה נובעות מכך שהתלמידים נחשפים כמעט אך ורק לתרגילים סטנדרטיים בפורמט של $a + b = c$, שבהם בתחילה מופיעה פעולה, אחריה מופיע סימן "=" ואחריו רושמים את התוצאה.

במאמר [2] מוצגת הבעייתיות שיש במחקרים הרבים שנעשו עד כה. מחקרים שונים השתמשו בסוגים שונים של פריטים לבדיקת הנושא. סוג אחד הוא *משוואה*, (כמו $8 + 4 = \_ + 5$). הסוג השני הוא פריטים העוסקים *במבנה של השוויון* (כמו: האם השוויון $3 + 5 = 5 + 3$ נכון או לא נכון?). הסוג השלישי הוא שאלות על אודות *ההגדרה של הסימן "="* (כמו: הסבירו מה אומר הסימן "="?). לעיתים שכיחות הופיעו במחקרים פריטים שיש בהם *הבנה של הסימן "=" כיחס* (כמו: בלי לחבר $37 + 54$, פתרו את המשוואה $37 + 54 = \_ + 55$). גם במחקרים שבדקו כמה סוגים של פריטים הייתה התייחסות לכל סוג בנפרד, ובסך הכול לא נעשה ניסיון לחפש רצף שמסביר את אופן רכישת המושג.

לשם כך, במחקר המוצג במאמר [2] נבנה כלי הערכה שמאחד את כל סוגי הפריטים ומסתמך על מפה מבנית של רמות הידע על אודות הסימן "=" כמציין שוויון מתמטי, כפי שמתואר במאמר [3]. על פי גישה זו, יש רצף לרמות הידע על אודות המשמעות של הסימן "=" כמציין שוויון מתמטי. בטבלה 1 מוצגת המפה המבנית המתבססת על הסכמה כללית בקרב חוקרים שבהבנת הסימן "=" יש רצף שנע מ־***חישובי*** בתחתית הסולם ל־***יחסי*** שנמצא בראש הסולם. במפה המבנית יש ארבע רמות המובחנות בסוגי התוכן שבהם יש הבנה של הסימן "=". כלי ההערכה המבוסס על מפה זו מתייחס לסוגי התוכן (שאלות) שהופיעו במחקרים השונים, ולא בהכרח מייצג את כל הידע של המשמעות של הסימן "=". כמו כן, הוא מוגבל להבנת הסימן "=" לתכנים אריתמטיים (אם כי יש כמה פריטים של ראשית האלגברה כמו: שימוש באותיות כמשתנים).

להלן מפה מבנית של רמות ידע על הסימן "=" כמציין שוויון מתמטי.

טבלה 1: מפה מבנית של רמת הידע על הסימן "=" כמציין שוויון מתמטי

(עפ"י הגישה המבנית שמתוארת במאמר [3])

רמה	תיאור	תבנית משוואה בסיסית
רמה 1: חישוב נוקשה Rigid Operational	• התלמיד מצליח רק עם משוואות בעלות מבנה של: פעולה ← שווה ← תשובה. • התלמיד מפרש את הסימן "=" כהוראה לבצע פעולה.	הפעולה מצד שמאל: $a+b=c$ (כולל כאשר לפני הסימן "=" יש מקום ריק $4+\_\_=17$).
רמה 2: חישוב גמיש Flexible Operational	• התלמיד פותר בהצלחה מבנים יוצאי דופן של משוואות שהולמים את ההיבט החישובי של הסימן "=".	פעולות בצד הימני של השוויון: $c=a+b$ **או** ללא פעולה: $a=a$
רמה 3: שוויון כיחס Basic Relational	• התלמיד פותר בהצלחה מבנים של משוואות המכילים פעולות משני צידי הסימן "=". • התלמיד מזהה נכונה הגדרה של הסימן "=" כיחס.	פעולות משני הצדדים: $a+b=c+d$ $a+b-c=d+e$
רמה 4: שוויון כמבנה של יחס Comparative Relational	• התלמיד פותר בהצלחה משוואות על ידי השוואת הביטויים משני צידי הסימן "=", כולל שימוש באסטרטגיות פיצוי וזיהוי של טרנספורמציות משמרות שוויון. • התלמיד מספק באופן קבוע פירוש של הסימן "=" כיחס.	משוואות שניתן לפתור באופן יעיל על ידי יישום טרנספורמציות פשוטות. כמו: *האם תוכל להגיד בלי לחבר את* $58+75$ *, האם הביטוי המספרי* $58+75=57+76$ *נכון או לא נכון?*

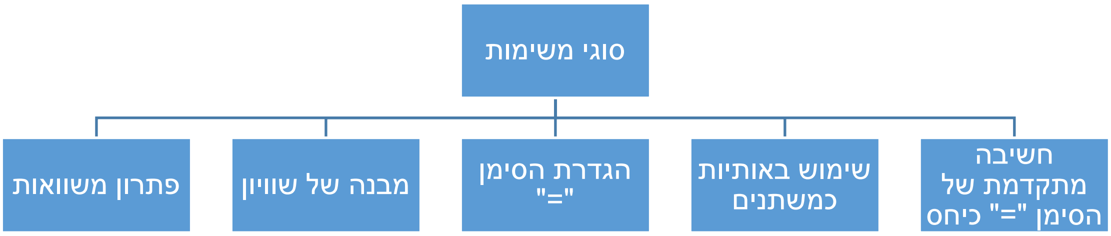
שאלה שעולה במחקרים: האם הבנה מוקדמת של הסימן "=" כיחס היא המפתח להצלחה באלגברה ובמתמטיקה גבוהה? במחקר המוצג במאמר [2] נעשה ניסיון לבדוק זאת באמצעות כמה פריטים של ראשית האלגברה כמו: שימוש באותיות כמשתנים.

בשאלון שהוצג לתלמידים ניתנו פריטי ההערכה השונים באופן מעורבב. ניתוח התוצאות שנעשה לאחר מכן אִפשר לנבא את סיכויי ההצלחה של כל פריט בכל כיתת גיל.

השאלון הועבר לתלמידים בכיתות ב' עד ו' ב־13 כיתות במסגרת שיעור של 45 דקות. בכיתה ב' השאלות הוקראו בקול. היו שתי גרסאות של השאלון שניתנו בכל כיתה.

בדיקת השאלונים נעשתה באופן אישי על ידי החוקרים והם הקדישו תשומת לב להסברים והנמקות בנוסף לנכונות התשובות (שגיאות חישוב מזעריות לא נחשבו). כמו כן נעשתה

הערכה של הביצועים באמצעות מודל הערכה מקובל. המחקר שוחזר בבית ספר נוסף והציג אותן תוצאות. השאלון כלל משימות מחמישה סוגים. באיור הבא מוצגים כל סוגי המשימות ובהמשך בטבלאות ניתן למצוא דוגמאות למשימות בהתאם לכל אחת מהרמות.



להלן דוגמאות לסוגי המשימות (ראו טבלאות 2-6), שהופיעו במחקרים המוצגים במאמרים [1] ו־[2] בחלוקה לפי רמות הידע של התלמידים *(המספרים בדוגמאות שלעיל שונו מהמספרים שמופיעים במחקר שהוצג במאמרים כדי לשמר את שאלות המחקר למטרות שחזור מחקרים כאלה בעתיד).*

טבלה 2: סוג המשימה – פתרון משוואות

רמה	דוגמאות	הערות
רמה 1: **חישוב נוקשה**	השלימו את המספר החסר: $7 + 2 = \_\_$ $\_ + 4 = 9$ $3 + \_ = 8$ $4 + \_\_ + 3 = 10$	ההבדל בין רמה 1 לרמה 2 הוא במיקום הפעולה. כאשר הפעולה בצד ימין של הסימן "=", רמת הקושי של השאלה עולה ללא קשר למספר המחוברים בצד שמאל.
רמה 2: **חישוב גמיש**	השלימו את המספר החסר: $7 = 5 + \_$ $8 = \_ + 6$ $15 = 9 + 2 + \_$	ההבדל בין רמה 2 לרמה 3 הוא במספר הפעולות שיש במשוואה. אם יש פעולות משני צידי המשוואה רמת הקושי של השאלה עולה.
רמה 3: **שוויון כיחס**	השלימו את המספר החסר: $\_ + 3 = 5 + 2$ $6 + \_ = 6 + 2 + 8$ $7 + 5 + 3 = 7 + \_$ $9 - 3 + 2 = \_ + 2$	
רמה 4: **שוויון כמבנה של יחס**	השלימו את המספר החסר (ניתן לחפש קיצור דרך בלי לחשב עד הסוף). הראו כיצד פתרתם. $397 + 15 = 395 + \_$ $68 + \_ = 63 + 49$	כדי לוודא שהתלמיד מתפקד ברמה 4 יש לקבל ממנו מידע על דרך הפתרון שלו.

טבלה 3: סוג המשימה: מבנה של שוויון

<table dir="rtl">
<tr><th>רמה</th><th>דוגמאות</th><th>הערות</th></tr>
<tr><td>רמה 1:
חישוב נוקשה</td><td>הקיפו את האפשרות המתאימה לכל תרגיל:
<table>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$4+4=8$</td></tr>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$8+7=16$</td></tr>
</table></td><td>ברמה 1 התלמיד מקבל החלטה על סמך ביצוע החישוב.</td></tr>
<tr><td>רמה 2:
חישוב גמיש</td><td>הקיפו את האפשרות המתאימה לכל תרגיל:
<table>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$5=5+0$</td></tr>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$12=14-2$</td></tr>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$9=8+2$</td></tr>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$6=6$</td></tr>
</table></td><td>גם ברמה 2 התלמיד מקבל החלטה על סמך ביצוע החישוב, אבל הוא גמיש יותר בקבלת משוואות לא סטנדרטיות כמו
$6=6$</td></tr>
<tr><td>רמה 3:
שוויון כיחס</td><td>הקיפו את האפשרות המתאימה לכל תרגיל:
<table>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$12+2=7+7$</td></tr>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$5+4=4+2+3$</td></tr>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$7+6=8+6$</td></tr>
<tr><td>נכון</td><td>לא נכון</td><td>לא ידוע</td><td>$42+13=13+42$</td></tr>
</table></td><td>ברמות 2 ו־3 מבקשים לפעמים מהתלמיד הסבר על הבחירה שלו.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">רמה 4:
שוויון כמבנה של יחס</td><td>מבלי לחשב את התרגיל $49+57$, קבעו אם פסוק המספר הבא $49+57=48+58$ נכון או לא נכון, ונמקו את תשובותיכם.</td><td rowspan="2">ברמה 4 התלמיד תמיד נדרש להסביר את דרך הפתרון שלו כדי לוודא שתשובתו התבססה על פירוש הסימן "=" כיחס.</td></tr>
<tr><td>מצאו מספרים שניתן לרשום במקומות החסרים:
$13+3+\_\_=16+\_\_\_$
האם ניתן לרשום במקומות החסרים מספר אחר? הסבירו מדוע כן או מדוע לא.</td></tr>
</table>

טבלה 4: סוג המשימה - הגדרה של הסימן "="

רמה	דוגמאות	הערות
רמה 1: **חישוב נוקשה**	הקיפו בעיגול את זוג המספרים השווה ל־$5+3$ א. $4+4$ ב. $3+7$ ג. $6+3$ ד. אף אחד מהם	ברמה זו תלמידים מתקשים מאוד להשיב על שאלה שעוסקת בהגדרה של הסימן "=".
רמה 2: **חישוב גמיש**	מה צריך להיות כתוב במקום הריק כדי לבטא שחצי שקל הוא אותו דבר כמו 50 אגורות? בחרו מבין האפשרויות הבאות והשלימו במקום הריק: חצי שקל ___ 50 אגורות א. ₪ ב. = ג. + ד. לא יודע	ברמה 2 תלמידים מצליחים לבחור מבין מספר הגדרות. חלקם בחרו מספר אפשרויות בו זמנית. בחירה בהגדרה יחסית (זהה ל־...) לא בהכרח העידה שהם נטשו את ההיבט החישובי של הסימן "=" (התוצאה).
	הקיפו ביטוי המתאים לתיאור משמעותו של הסימן "=": א. הסימן "=" פירושו: זהה ל... מתאים / לא מתאים ב. הסימן "=" פירושו: לחבר... מתאים / לא מתאים ג. הסימן "=" פירושו: התוצאה... מתאים / לא מתאים	
רמה 3: **שוויון כיחס**	הקיפו ביטוי המתאים לתיאור משמעותו של הסימן "=": א. הסימן "=" פירושו: זהה ל... מתאים / לא מתאים ב. הסימן "=" פירושו: לחבר... מתאים / לא מתאים ג. הסימן "=" פירושו: תוצאה של תרגיל מתאים / לא מתאים איזה מבין התיאורים הללו הוא התיאור *המתאים ביותר* עבור הסימן "="? הקיפו את האות המתאימה: א / ב / ג	ברמה 3 סיכויי התלמידים לבחור את ההגדרה היחסית (זהה ל־...) גדלים, אבל עדיין רבים מהם בוחרים בשתי האפשרויות. הם יכולים גם לתעדף את הבחירה שלהם ולבחור את ההגדרה הטובה ביותר עבור הסימן "=".

הערות	דוגמאות	רמה
השאלה השנייה, המבקשת הגדרה לסימן "=", קשה מאוד לתלמידי רמות 1-3. המצליחים ביותר הראו יכולת גבוהה של הנמקה גם בפריטים קשים אחרים.	האם המשפט הבא הוא אמת או שקר? 100 סנטימטר = 1 מטר מה פירוש הסימן "=" במשפט זה?	**רמה 4: שוויון כמבנה של יחס**
	מה הפירוש של הסימן "=" ? האם יכול להיות לסימן גם פירוש אחר?	

טבלה 5: סוג המשימה - שימוש באותיות כמשתנים

הערות	**דוגמאות**[1]	**רמה**
ברמה 2 התלמידים התקשו מאוד בשאלה כזאת, ברמה 3 סיכויי ההצלחה נעו בין 45% ל־70%. ברמה 4 סיכויי ההצלחה נעו בין 80% ל־99%.	איזה ערך של a יהפוך את הביטוי הבא לנכון: $12 = a + 7$	**רמה 4: שוויון כמבנה של יחס**
רק ברמה 4 היו סיכויי הצלחה שנעו בין 24% ל־88% להשיב נכון לשאלה כזאת.	איזה ערך של b יהפוך את הביטוי הבא לנכון: $b + b + b + 3 = 15$	
רק ברמה 4 היו סיכויי הצלחה שנעו בין 11% ל־75% להשיב נכון לשאלה כזאת.	איזה ערך של c יש להציב במשוואה כדי לקבל פסוק אמת? $c + c + c = c + 10$	

טבלה 6: סוג המשימה - חשיבה מתקדמת של הסימן "=" כיחס

הערות	**דוגמאות**	**רמה**
רק לתלמידים הטובים ברמה 4 היו סיכויי הצלחה מעל 50% להשיב תשובה מלאה על שאלות כאלה.	אם ידוע שהתרגיל $28 = 15 + 13$ נכון. האם התרגיל $15 + 13 + 7 = 28 + 7$ נכון? איך ידעתם?	**רמה 4: שוויון כמבנה של יחס**

[1] **הערה:** נוסף לדוגמאות המובאות במאמר המסוכם כאן, אפשר להוסיף שאלות מן הסוג:
(1) עבור איזה ערך של a הביטוי $a = 2 + 3$ הוא נכון?
(2) האם יש הבדל בתשובה אם האות a נמצאת מימין או משמאל של סימן ה"="?

רמה	דוגמאות	הערות
	אם ידוע שהתרגיל $8 \times 2 = 16$ נכון, האם התרגיל $8 \times 2 \times 3 = 16 \times 3$ נכון? איך ידעתם?	
	אם ידוע שהתרגיל $57 + 69 = 126$ נכון, קבעו בלי לחשב האם התרגיל $57 + 69 - 8 = 126 - 8$ נכון? איך ידעתם?	
	האם המספר שצריך להשלים בתרגיל הזה, $3 \times \_ = 69$ הוא אותו המספר שצריך להשלים בתרגיל הזה? $7 \times 3 \times \_ = 7 \times 69$ איך ידעתם?	

<u>להלן מספר רעיונות מתוך תוצאות ומסקנות המחקר המוצג במאמר [2]:</u>

- רמות היכולת של התלמידים היו במתאם גבוה עם הגיל (כיתה) שלהם.
- למידת התלמידים היא רציפה לצד חלוקתה לרמות. כלומר, בכל הגילים תלמידים יכולים להשיב נכון על פריטים ברמות השונות, אולם סיכויי ההצלחה שלהם יהיו שונים (ראה בטבלאות הקודמות בעמודת ההערות).
- תלמידים שתוצאותיהם במבחן הם במקום מסוים בסולם שנקבע, יגיבו בהתאם גם לשאלות נוספות מאותו הסוג. זה מאפשר לנבא באילו סוגי קשיים הם עלולים להיתקל בבואם לפתור שאלות כאלה ואת מידת הצלחתם.
- מיקום הפעולה ביחס לסימן "=" (מימינו או משמאלו) היה מרכיב דומיננטי לגבי מידת הקושי יותר ממספר המחוברים, או אם הנעלם הוא בצד ימין או בצד שמאל של המשוואה. משוואות שבהן כל הפעולות הופיעו בצד ימין, היו קשות יותר ממשוואות שבהן כל הפעולות הופיעו בצד שמאל, וזה ההבדל בין רמה 1 לרמה 2. משוואות עם פעולות משני הצדדים של הסימן "=" היו קשות יותר ממשוואות שבהן הפעולות הופיעו רק מצד אחד של הסימן "=", וזה ההבדל בין רמה 2 לרמה 3.

- התלמידים התקשו יותר כשהתבקשו לנסח תיאור משלהם לסימן "=". היה להם קל יותר לבחור תיאור מתוך מספר אפשרויות. היכולת לנסח כללים או תיאורים דורשת קודם יכולת ביצוע ברמות 3 ו/או 4.
- יכולת תיאור לסימן "=" המתבססת על יחס לא בהכרח העידה שאותם תלמידים נטשו את ההיבט החישובי של הסימן "=". השקפה המעידה על תפיסת הסימן "=" כיחס יכולה להיות ביחד עם השקפות מפותחות פחות.
- גם התרגילים שכללו אותיות כמשתנים התאימו למודל של המפה המבנית, אך היו קשים יותר לביצוע מתרגילים דומים שלא כללו אותיות כמשתנים. תלמידים עם הבנת המשמעות של הסימן "=" נטו לבצע את התרגילים טוב יותר.
- פריטים שדרשו קבלת החלטות על סמך אסטרטגיות של "פיצוי" (הגדלה והקטנה של מרכיבי הפעולה) ללא חישובים, מעידים על חשיבה המבוססת על יחס. כלומר, הכרה בכך שהסימן "=" מייצג יחס בין המספרים שמופיעים משני צידי הסימן, וכך נמנע הצורך לבצע חישובים.
- פריטים שדורשים מתן הסברים על אודות טרנספורמציות משמרות שוויון, שלא נבדקו כמעט במחקרים קודמים, מתאימים גם הם למודל ומצויים ברמה 4.
- בפריטים כאלה ובפריטים אלגבריים פשוטים שכללו שימוש באותיות כמשתנים, תלמידים שהראו הבנה של הסימן "=" נטו להצליח יותר, למרות שלא קיבלו הכשרה קודמת בנושא. זוהי עדות אמפירית לטענה של חוקרים שונים שידע מפותח של ילדים צעירים על אודות הסימן "=" תומך בחשיבה אלגברית.
- תוצאות מחקר זה מבוססות על אוכלוסיות של תלמידי בתי ספר יסודיים בארה"ב שבעיקר נחשפו להוראה שמרנית בעניין הסימן "=". ייתכן שבאוכלוסיות אחרות, ממדינות אחרות, יתקבלו תוצאות אחרות.

<u>על פי המאמר המתאר את המחקר שנערך בשוודיה, מאמר [1]</u>

ידע מעמיק באלגברה נחוץ ללימודי מתמטיקה גבוהים, לכן חשוב לערוך מחקרים על אודות הוראה ולמידה של אלגברה. חוקרים רבים מדגישים את החשיבות של ידע על אודות הסימן "=" לצורך לימודי האלגברה. ידע זה גם הוכח כגורם חשוב לניבוי כישורי חשיבה אלגברית. משמעות הסימן "=" נוכחת בכל פעם שנדרשים לפתור משוואה, להשתמש בנוסחה, או לפעול על ביטוי אלגברי.

מחקרים מראים שניתן ללמד אלגברה כבר בכיתות הלימוד הנמוכות על ידי שימוש, למשל, ביחסים ודפוסים מתמטיים לצורך פיתוח חשיבה אלגברית. במבדקים בין־לאומיים, כמו ה־TIMSS, הידע באלגברה של תלמידים משוודיה היה נמוך מהממוצע במשך עשרות שנים ונמשך גם כיום. זאת למרות הניסיונות שנעשו בשוודיה לשפר את הידע האלגברי של

התלמידים. תוכנית הלימודים שונתה כך שתכלול את תחום האלגברה החל בכיתה א', והדגש מושם על לימוד החשיבות של הסימן "=".

מן המחקרים שנערכו בשוודיה עולה, שספרי הלימוד שם עשירים במשימות לכיתות א'-ג' מסוג פתרון משוואות (כמו, $3 + 5 = \_ + 2$) ובכיתות ד'-ו' במשימות מסוג מבנה של שוויון (כמו, האם הביטוי $5 + 4 = 4 + 2 + 3$ נכון או לא נכון?). בספרי הלימוד בשוודיה לכיתות א'-ג' מקובל להגדיר את הסימן "=" כמציין כמות שווה.

חשוב לציין שבניגוד לאופן הלימוד בכיתות הגבוהות, לימוד אלגברה בכיתות הנמוכות נעשה בדרך המתאימה להציג חשיבה אלגברית בגיל מוקדם יותר. זה כולל את ה"רעיונות הגדולים" (Big Ideas) של חשיבה אלגברית שאותם ניתן לפתח בגיל מוקדם. רעיונות אלה כוללים:

שקילות, ביטויים, שוויונים ואי־שוויונים	**EEEI** – equivalence, expressions, equations, and inequalities
אריתמטיקה מוכללת	**GA** – generalized arithmetic
חשיבה פונקציונלית	**FT** – functional thinking
משתנים	**VAR** – variables
חשיבה פרופורציונלית	**PR** – proportional reasoning

המחקר שנערך בשוודיה המוצג במאמר [1], המתמקד על האופן שבו תלמידים מתארים את הסימן "=" ומשתמשים בו, קשור לשניים מרעיונות גדולים אלה: *שקילות, ביטויים, שוויונים ואי-שוויונים* (**EEEI**) *ואריתמטיקה מוכללת* (**GA**).

תוכנית הלימודים וספרי הלימוד בשוודיה עוסקים בעיקר במשימות מסוג **EEEI**. אם מציגים שאלה מסוג $4 + \_ = 5 + 8$, הרי שניתן להגיע לתשובה נכונה באמצעות ביצוע חישובים. אבל ניתן להשיב עליה אם מפחיתים 1 מ־5 ומוסיפים אל ה־8 כדי לקבל $4 + \_ = 4 + 9$, ואפילו לעשות הכללה ולהגיד שהפעלנו פה את חוק הקיבוץ. במקרה כזה התייחסנו לרעיון הגדול של אריתמטיקה מוכללת – **GA**. בתוכנית הלימודים בשוודיה מתייחסים באופן מפורש לחשיבות של הבנת הסימן "=".

המחקר שמוצג במאמר [1] בדק שלושה נושאים:

1. כיצד תלמידים בשוודיה מתארים את הסימן ומשתמשים ב"="? (כפי שכותבי מאמר [2] ציינו, התוצאות שהם קיבלו מתאימות לתלמידים בארה"ב, והיה כדאי לבדוק את כלי ההערכה שלהם במדינות אחרות ולהשוות את התוצאות).
2. האם ישנם הבדלים ברמת הידע של תלמידים בין בתי ספר ברמות סוציואקונומיות שונות?

3. מה דומה ומה שונה בין התוצאות של תלמידים בשוודיה לתלמידים בדרום קוריאה שנבדקו באותו כלי הערכה, ושהתוצאות שלהם במבחן ה־TIMSS נחשבות לטובות במיוחד? (בניגוד, כאמור, לתוצאת של תלמידים משוודיה במבחן זה).

המחקר בדק תלמידים בכיתות ג' ו־ו' משלושה בתי ספר שונים, ונעשה בו שימוש בכלי ההערכה שפותח ומוצג במאמר [2]. התלמידים התבקשו למלא את השאלון שקיבלו במסגרת שיעור בכיתה, אך לא חייבו אותם להגיש את פתרונו (זה מנטרל את תחושת המבחן שיש בדרך כלל במצבים כאלה, ואשר גורם לתלמידים לבדוק את עצמם על ידי ביצוע חישובים). הניתוח של התוצאות מתבסס על המפה המבנית של רמות הידע על אודות הסימן "=" שהוצגה במאמר [3] ועל הניתוח שנעשה במאמר [2].

<u>להלן מספר רעיונות מתוך תוצאות ומסקנות המחקר המוצג במאמר [1]:</u>

- מגמת התוצאות שהתקבלו במחקר בשוודיה דומה למגמת התוצאות שהתקבלו במחקרים בארה"ב ובדרום קוריאה.
- התוצאות בכיתות ג' היו נמוכות יותר מהתוצאות בכיתות ו', שם הייתה הצלחה רבה יותר להשיב נכון על שאלות ברמות הגבוהות, המעידות על הבנת הסימן "=" כיחס.
- הייתה שונות בין בתי הספר בהתאמה לרמה הסוציואקונומית שלהם. מכיוון שההבדלים בין בתי הספר היו גם ברמת ההשכלה של ההורים וגם ברמת ההכשרה של המורים, ייתכן שיש השפעה לרמת ההכשרה של המורים.
- ביצועי התלמידים מדרום קוריאה היו נמוכים יותר מביצועי התלמידים בשוודיה בבית הספר של התלמידים ברמה הסוציואקונומית הגבוהה, אך גבוהים יותר מביצועי התלמידים בבתי הספר האחרים בשוודיה. הדבר בלט במיוחד ביחס להבנת ההגדרה של הסימן "=" בכיתות ו'.
- היכולת לתאר את ההגדרה של הסימן "=" לא בהכרח מעידה על יכולת להתייחס לתכונת היחס של הסימן "=" ולהפך. באופן כללי, לתלמידים רבים יש הבנה דו־משמעית של הסימן "=".
- גם במחקר השוודי וגם במחקר בדרום קוריאה בלט הקושי של התלמידים להסביר את דרך העבודה שלהם, ועקב כך בדיקת התוצאות הייתה פחות מדויקת.
- נראה שמרבית התלמידים מפתחים הבנה על משמעות הסימן "=" כיחס, כאשר הם עולים לכיתות הגבוהות, למרות שבשוודיה הנושא לא נלמד במפורש בכיתות אלה. דבר זה מצביע כנראה על מרכיב התפתחותי ביכולת להתקדם להבנה מפותחת יותר של הסימן "=", ומוסבר על יד החוקרים בכך שבכיתות אלה מתרגלים יותר פתרון משוואות מסוגים שונים.

- ספרי הלימוד בשוודיה עוסקים בעיקר במשימות שעוסקות בשקילות, ביטויים, שוויונים ואי-שוויונים **(EEEI)**, ופחות במשימות שעוסקות באריתמטיקה מוכללת **(GA)** וזה עלול לפגוע בפיתוח הידע האלגברי של התלמידים. יש להתמקד גם בזה.

<u>סיכום:</u>

שני המאמרים שתוארו כאן בהרחבה עסקו במחקר על אודות רמת הידע של תלמידים על הסימן "=" כמציין שוויון מתמטי. אין בהם המלצות כיצד לשפר את הידע של התלמידים. במאמר [6] ישנה הצעה לתוכנית לימודים מפורטת שנוסתה בכיתות א'-ג' במטרה לקדם את הבנת המושג. לעומת זאת, מכיוון שגם כיום, למעלה מעשרים שנה אחרי פרסום מאמר [6] יש עדיין עדויות מחקריות לקשיים של התלמידים, יש להניח שלמרכיב ההתפתחותי הקשור גם בגיל התלמידים ישנה השפעה רבה שלא ניתן להתעלם ממנה. כלומר, גם אם נחשוף את התלמידים לשאלות מסוגים שונים ברמות הידע הגבוהות יותר, עדיין בשלב הראשון הם יתייחסו לסימן "=" בתפיסה החישובית שלו, ורק בהמשך יעברו לתפיסה יחסית השוואתית, כאשר המעבר אינו דיכוטומי אלא קורה ברצף. בכל מקרה, המאמרים טוענים שיש צורך להגיע לרמה היחסית השוואתית כדי לבסס את החשיבה האלגברית, ולהתמודד עם האלגברה הנדרשת בהמשך לימודי המתמטיקה.

ביבליוגרפיה:

1. Madej L. (2022). Primary School Students' Knowledge of the Equal Sign – the Swedish Case. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 321-343.
2. Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 316–350.
3. Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*, 85–104.
4. וייס, ו' (2001). בעקבות המאמר: "הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה". *מספר חזק 2000*, *1*, 29-33. נמצא כאן.
5. משרד החינוך – האגף לתוכניות לימודים (2006). *תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א'-ו' בכל המגזרים*. כיתה ב', משוואות פשוטות, עמ' 38.
6. פולקנר, פ"ק, לוי ל", קרפנטר ת"פ (1999). הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה. מאמר מתורגם מתוך: Teaching Children Mathematics. נמצא כאן.
7. קלוז'ני, ח' (2012). *"רכבת השוויונות" בכיתה ב'. מספר חזק 2000, 22*, 17-22. נמצא כאן.

פעילות בעקבות הסיכום להשתלמות מורים

1. ניתוח שגיאות אופייניות הקשורות בסימן "=":

לתמי יש 4 תפוחים ו־3 תפוזים.

היא אכלה תפוח אחד ונתנה לאימה 2 תפוזים.

כמה פירות נשארו לתמי?

יובל פתר את השאלה כך: $4+3=7-1=6-2=4$

(1) בחרו את התשובה הנכונה ונמקו:

א. הפתרון של יובל הוא פתרון נכון.

ב. הפתרון של יובל הוא פתרון לא נכון.

ג. התשובה של יובל היא נכונה, אך התרגיל שהוא רשם לא נכון.

(2) מה אתם חושבים על תהליך פתרון השאלה על ידי יובל?

הערה: מומלץ להסביר לתלמיד שבפתרון תרגיל הכולל מספר פעולות, מתקדמים מפעולה לפעולה לפי הסדר המקובל שלהן, ורושמים את תוצאת הביניים של חישוב הפעולה מעל קשת שאותה מסמנים מעל סימן הפעולה.

לאחר דיון במשימה ראשונה כדאי לתת למורים.ות לקרוא את העמודים 1-4 מתוך הסיכום (עד סוגי השאלות) ולדון ברעיונות מרכזיים העולים מהטקסט.

2. בשלב הבא אפשר להציג למשתלמים.ות את סוגי המשימות ולנתחם יחד עם המבנה המתמטי שלהן. בתום דיון כדאי לתת למורים.ות לקרוא את מהלך השיעור המוצג במאמר "רכבת השוויונות לכיתה ב'" הנמצא כאן (יש לקרוא רק את מהלך השיעור, עמודים 19-21). שימו לב, היישומון המוצג במאמר לא פועל יותר, לכן אפשר להציג יישומון הנמצא כאן.

3. האם הפעילות המוצגת במאמר מתאימה לתפיסה המבנית של הסימן "=" כיחסי השוואתי או לתפיסה חישובית של הסימן "=" כיחסי בסיסי? נמקו.

תשובה: תלוי בסוג התרגילים שמשני צידי הסימן "=".

$$100:4-10=19-4=13+2=9+6=8+7=10+5=14\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$=800-785=5\times 3$$

4. הביאו דוגמאות מתוך המאמר "רכבת השוויונות לכיתה ב'" המתאימות לתפיסה של יחסי השוואתי ונמקו.

תשובה:

(א) $6 + 9 = 7 + 8$ כי ניתן להפעיל אסטרטגיית פיצוי מעבירים 1 מה-7 אל ה-8 ומקבלים 9+6.

(ב) $3 \times 5 = 5 + 10$ כי ניתן להפעיל טרנספורמציה מ-$5 + 5 + 5$ ל-5×3.

5. הביאו דוגמאות מתוך המאמר "רכבת השוויונות לכיתה ב'" המתאימות לתפיסה של יחסי בסיסי ונמקו.

תשובה: $785 - 800 = 5 + 10$ כי אין קשר ברור בין שני התרגילים, כל אחד עומד בפני עצמו רק התוצאה שלהם שווה. $2 + 13 = 4 - 19$ כי אין קשר ברור בין שני התרגילים, כל אחד עומד בפני עצמו רק התוצאה שלהם שווה.

6. רשמו דוגמאות לשאלות המתאימות לרמה 4 של הידע על אודות הסימן "=". ציינו לגבי כל דוגמה מהו סוג השאלה.

7. היכנסו לפעילות זו והשיבו: באיזו רמת ידע לפי המפה המבנית המופיעה בעמוד 3 עוסקת הפעילות ומה סוג השאלה?

תשובה: רמת הידע היא " שוויון כיחס" וסוג המשימה הוא מבנה של שוויון.