تلخيص مقالات حول موضوع إشارة "=" كمؤشر للمساواة الرياضية
وهو يشكل رابط أساسي بين الحساب والجبر

تحرير وتلخيص: براخا سجليس

مرّ أكثر من عشرين عامًا منذ أنْ فحصت فاردا فايس [4] في عدة مدارس في إسرائيل كيف يحل التلاميذ التمرين $5 + __ = 8 + 4$، ووجدت لدهشتها أن معظم طلاب المدارس الابتدائية الذين فحصتهم يكتبون العدد 12 أو 17 في الفراغ. يبدو أن جزءًا كبيرًا من الطلاب يعتبرون إشارة "=" كتعليمات لحساب وكتابة نتيجة هذه العملية الحسابية بعدها (تمامًا مثل إشارة "=" التي تعمل في الآلة الحاسبة). البحث الصغير الذي أجرته فاردا أُعِدّ لمقارنة الوضع في إسرائيل بنتائج بحث مماثل [6] أجري في الولايات المتحدة، والذي بيّن نتائج مماثلة تقريبًا.

منذ ذلك الحين، تطور الوعي لهذا الموضوع. أدرجت المناهج التعليمية في بلدان مختلفة إشارة "=" من الصفوف الابتدائية الدنيا، والقدرة على التعامل مع تمارين بسيطة من نوع معادلة بسيطة، مثل: $25 = __ + 3$, $68 = 4 - __$ [5], وفي الواقع الكتب التعليمية تناولت هذا الموضوع بتوسع.

مثال على هذه المحاولة تمّ عرضه في مقال هانا كالوجيني: قطار المساواة في الصف الثاني [7]. رغم كل هذا، وكما وَرَدَ في المقال [1] الذي نُشر هذا العام (2022)، لا يزال الكثير من الطلاب يخطئون. هذا صحيح ليس للصفوف الابتدائية الدنيا فقط، ولكن لطلاب الصف السادس أيضًا.

لماذا يحدث ذلك؟ ما الذي يجعل من الصعب على الطلاب أنْ يفهموا أنّ إشارة "=" تُشير إلى علاقة مساواة بين تعابير رياضية وليس فقط في التعليمات للحساب والحصول على نتيجة؟ لماذا يعتبر هذا الموضوع مهمًا، وكيف يرتبط بقدرة الطلاب في تعلُّم الجبر فيما بعد؟

من المقال [2]:

تمّ استعمال إشارة "=" لأول مرة في القرن السادس عشر، وأصبحت الإشارة معترف بها عالميًا للإشارة إلى المساواة الرياضية. يشرح المقال الجانب الرسمي للإشارة "=" ، كما يمكن قراءة ذلك ويكيبيديا العبرية أيضًا:

إشارة المساواة "=" هي إشارة مقبولة تُشير إلى علاقة المساواة. المساواة هي مصطلح يظهر في جميع مجالات الرياضيات من خلال الإشارة إلى الأشياء في كل مجال. هذه هي الطريقة التي يتمّ بها تحديد المساواة بين الأعداد، المجموعات، الدوال، الرسوم البيانية وما شابه. كل تعبير رياضي عن المساواة له طرفان: يمين ويسار.

المساواة هي علاقة تكافؤ، بمعنى أنها علاقة انعكاسية، متناظرة ومتعدية (ويكيبيديا، بالعبرية).

لذا، فإن جزءًا من المعرفة حول إشارة "=" هو الفهم أنه يمكن استخدامها في العمليات والتحولات الرياضية، وأنها في الواقع علاقة. هذا هو الفهم بأن الإشارة تدل على مساواة بين التعبيرين الموجودين في طرفيْ إشارة المساواة. يمكن تطبيق هذا الفهم المتطور للإشارة "=" بالفعل في المدارس الابتدائية والإعدادية.

هناك اتفاق عام بين العديد من الباحثين على أن فهم معنى إشارة "=" يساعد في تحسين القدرات الجبرية، بما في ذلك مهارات حل المعادلات بشكل خاص، والتفكير الجبري بشكل عام.

لسوء الحظ، تُشير عشرات الأبحاث إلى الصعوبات التي يواجهها طلاب المدارس الابتدائية والإعدادية في فهم هذا الأمر. غالبًا ما يفسر الطلاب الإشارة على أنها تشير إلى الحاجة لتنفيذ عملية حسابية والحصول على إجابة.

وبالمثل، يميل معظم الطلاب في المدارس الابتدائية في الولايات المتحدة (حيث تمّ هناك إجراء معظم البحث) إلى رؤية المعادلات التي لا تظهر بصيغة a + b = c (على سبيل المثال، 7 + 6 = 6 + 6 + 1) على أنها غير صحيحة أو غير منطقية.

يميل معلمو الرياضيات إلى الاعتقاد بأن مثل هذه الأخطاء تعود إلى الحقيقة أن الطلاب ينكشفون فقط إلى حل تمارين عادية بصيغة a + b = c، حيث تظهر العملية في البداية، وبعدها تظهر إشارة "="، وبعدها تتم كتابة النتيجة.

في المقال [2] يتمّ عرض المشكلة الموجودة في العديد من الأبحاث التي تمّ إجراؤها حتى الآن. استخدمت أبحاث مختلفة أنواعًا مختلفة من المعادلات لفحص الموضوع. النوع الأول هو معادلة، (مثلًا: 5 + _ = 4 + 8).

النوع الثاني من المعادلات التي تتناول مبنى المساواة (مثلًا: هل المساواة 3 + 5 = 5 + 3 صحيحة أم خاطئة؟).

النوع الثالث هو أسئلة حول تعريف إشارة "=" (مثلًا: اشرحوا ماذا تعني إشارة "="؟). في بعض الأحيان، ظهرت في الأبحاث إشارة "=" كعلاقة (مثلًا: بدون أن تجمعوا 54 + 37، حلوا المعادلة

(55 + _ = 54 + 37). حتى في الأبحاث التي فحصت عدة أنواع من الأسئلة، تم التطرق إلى كل نوع على حدة، وبشكل عام لم يتم إجراء أي محاولة للبحث عن تسلسل يشرح كيفية اكتساب المصطلح.

لتحقيق هذه الغاية، في البحث المعروض في المقال [2]، تمّ إنشاء أداة تقييم توحد جميع أنواع الأسئلة، وتعتمد على خريطة هيكلية لمستويات المعرفة حول الإشارة "=" كدلالة على المساواة الرياضية، كما هو موضح في مقال [3].

وفقًا لهذا النهج، هناك تسلسل لمستويات المعرفة حول معنى إشارة "=" كإشارة تُشير إلى المساواة الرياضية. يوضح الجدول 1 التسلسل بناءً على اتفاق عام بين الباحثين أنه في فهم الإشارة "=" يوجد تسلسل ينتقل من **الحساب** في أسفل السلم إلى **العلاقة** التي تقع في الجزء العلوي من السلم.

يوجد في هذا التسلسل أربعة مستويات تتميز بأنواع المحتوى التي يوجد فيها فهم لإشارة "=". تتطرق أداة التقييم التي تعتمد على هذا التسلسل إلى أنواع المحتوى (الأسئلة) التي ظهرت في الأبحاث المختلفة، ولا تمثّل بالضرورة كل المعرفة عن معنى إشارة "=".

كما أنه يقتصر على فهم إشارة "=" للمضامين الحسابية (على الرغم من وجود بعض العناصر في بداية الجبر مثل: استخدام الأحرف كمتغيرات).

يوجد أدناه تسلسل لمستويات المعرفة حول إشارة "=" كمؤشر إلى المساواة الرياضية.

جدول 1: تسلسل مستوى المعرفة حول إشارة "=" كمؤشر إلى المساواة الرياضية

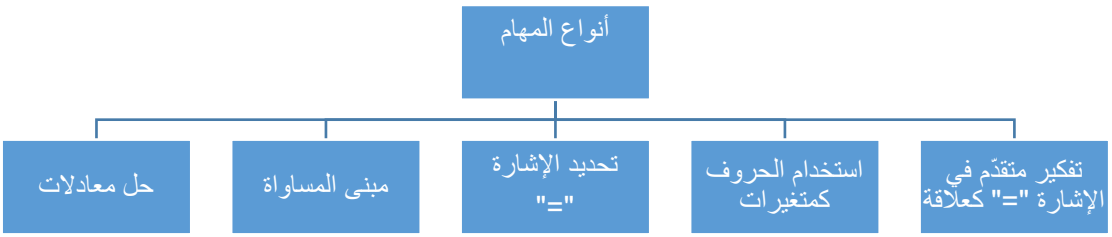
(وفقًا للمنهج البنيوي الموضح في المقال [3])

مستوى	وصف	قالب معادلة أساسية
مستوى 1: حساب صارم **Rigid Operational**	• ينجح الطالب فقط مع المعادلات التي لها مبنى كالتالي: عملية ← مساواة ← إجابة. • يفسر الطالب إشارة "=" كتعليمات لتنفيذ عملية.	العملية في الطرف الأيسر: $a + b = c$ (بما في ذلك عندما يكون هناك فراغ قبل إشارة "=" $4 + __ = 17$).
مستوى 2: حساب مرن **Flexible Operational**	• يحل الطالب بنجاح مبان غير عادية للمعادلات التي تتناسب مع الجانب الحسابي لإشارة "=".	عمليات في الطرف الأيمن من المساواة: $c = a + b$ أو بدون عملية : $a = a$
مستوى 3: المساواة كعلاقة **Basic Relational**	• ينجح الطالب في حل مبانٍ لمعادلات التي تحتوي على عمليات في طرفي إشارة "=". • يحدد الطالب بشكل صحيح تعريف الإشارة "=" كعلاقة.	عمليات في كِلا الطرفين: $a + b = c + d$ $a + b - c = d + e$
المستوى 4: المساواة كمبنى علاقة **Comparative Relational**	• يحل الطالب معادلات بنجاح من خلال مقارنة التعابير الموجودة في طرفي إشارة "=" ، بما في ذلك استخدام استراتيجيات التعويض وتحديد التحولات التي تحافظ على المساواة. • يُقدّم الطالب بانتظام تفسيرًا للإشارة "=" كعلاقة.	معادلات يمكن حلها بكفاءة عن طريق تطبيق تحويلات بسيطة. مثلًا: *هل يمكنك القول دون أن تجمع* $75 + 58$ ، *هل التعبير العددي* $58 + 75 = 57 + 76$ *صحيح ام غير صحيح؟*

السؤال الذي يطرح نفسه في الأبحاث: هل الفهم المسبق للإشارة "=" كعلاقة هي مفتاح النجاح في الجبر والرياضيات العليا؟ في البحث المعروض في المقال [2] تمت محاولة لفحص ذلك من خلال استخدام بعض عناصر بداية الجبر، مثل: استخدام الحروف كمتغيرات.

في نموذج الأسئلة الذي تمّ عرضه أمام الطلاب، تم تقديم أسئلة التقييم المختلفة بطريقة مختلطة. أتاح التحليل اللاحق للنتائج تنبؤ احتمال النجاح في كل سؤال في كل فئة عمرية. تمّ تنفيذ نموذج الأسئلة في الصفوف الثانية حتى السادسة في 13 صفًا في إطار من درس مدته 45 دقيقة. في الصف الثاني، تمت قراءة الأسئلة بصوت عالٍ. كانت هناك نسختان من نموذج الأسئلة في كل صف.

تمّ فحص الأسئلة بشكل شخصي من قبل الباحثين، واهتموا بالشروح والتعليلات بالإضافة إلى صحة الإجابات (لم يتمّ حساب أخطاء حسابية بسيطة). تمّ تقييم الأداء أيضًا باستخدام نموذج تقييم مقبول. أُعيد البحث في مدرسة أخرى وحصلوا على نفس النتائج. شمل نموذج الأسئلة مهام من خمسة أنواع. في الشكل التالي، نعرض جميع أنواع المهام، وفيما بعد في الجداول يمكن إيجاد أمثلة للمهام وفقًا لكل مستوى من المستويات.



فيما يلي أمثلة لأنواع المهام (انظروا الجداول 2-6) ، التي ظهرت في الأبحاث المعروضة في المقالات [1] وَ [2]، وهي مقسمة وفقًا لمستويات معرفة الطلاب (تمّ تغيير الأعداد في الأمثلة أعلاه عن الأعداد التي تظهر في الأبحاث المعروضة في المقالات حفاظاً على أسئلة البحث من أجل إعادة استعمال مثل هذه الأبحاث في المستقبل).

جدول 2: نوع المهمة - حل معادلات

مستوى	أمثلة	ملاحظات
مستوى 1: **حساب صارم**	أكملوا العدد الناقص: $7 + 2 = __$ $_ + 4 = 9$ $3 + _ = 8$ $4 + __ + 3 = 10$	الفرق بين المستوى 1 والمستوى 2 في موقع العملية. عندما تكون العملية على الطرف الأيمن من إشارة "="، يزداد مستوى صعوبة السؤال بغض النظر عن عدد المضافات في الطرف الأيسر.
مستوى 2: **حساب مرن**	أكملوا العدد الناقص: $7 = 5 + _$ $8 = _ + 6$ $15 = 9 + 2 + _$	الفرق بين المستوى 2 والمستوى 3 في عدد العمليات في المعادلة. إذا كانت هناك عمليات في طرفي المعادلة، يزداد مستوى صعوبة السؤال.
مستوى 3: **المساواة كعلاقة**	أكملوا العدد الناقص: $_ + 3 = 5 + 2$ $6 + _ = 6 + 2 + 8$ $7 + 5 + 3 = 7 + _$ $9 - 3 + 2 = _ + 2$	
مستوى 4: **المساواة كمبنى** **علاقة**	أكملوا العدد الناقص ((يمكن البحث عن طريقة مختصرة دون الحساب حتى النهاية). بينوا كيف قمتم بحلها. $397 + 15 = 395 + _$ $68 + _ = 63 + 49$	للتأكد من أن الطالب يعمل في المستوى 4، يجب الحصول على معلومات منه حول طريقة حله.

الجدول 3: نوع المهمة: مبنى المساواة

مستوى	أمثلة	ملاحظات
مستوى 1: حساب صارم	أحيطوا الإمكانية المناسبة لكل تمرين: صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $4 + 4 = 8$ صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $8 + 7 = 16$	في المستوى 1، يُقرر الطالب بناءً على تنفيذ عملية حسابية.
مستوى 2: حساب مرن	أحيطوا الإمكانية المناسبة لكل تمرين: صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $5 = 5 + 0$ صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $12 = 14 - 2$ صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $9 = 8 + 2$ صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $6 = 6$	في المستوى 2 أيضًا، يُقرر الطالب بناءً على عملية حسابية، لكن لديه مرونة أكثر في قبول معادلات غير قياسية مثل: $6 = 6$
مستوى 3: المساواة كعلاقة	أحيطوا الإمكانية المناسبة لكل تمرين: صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $12 + 2 = 7 + 7$ صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $5 + 4 = 4 + 2 + 3$ صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $7 + 6 = 8 + 6$ صحيح / غير صحيح / لا أعرف: $42 + 13 = 13 + 42$	في المستويين 2 وَ 3، نطلب من الطالب أحيانًا أن يشرح اختياره.
مستوى 4: المساواة كمبنى علاقة	دون أن تحسبوا التمرين $57 + 49$، حددوا ما إذا كانت المساواة $58 + 48 = 57 + 49$ صحيحة أم صحيحة، وعللوا إجاباتكم. جدوا أعدادًا يمكن كتابتها في الأماكن الفارغة: $__ + 13 + 3 + _ = 16 + __$ هل يمكن كتابة عدد آخر في الأماكن الفارغة؟ اشرحوا لماذا نعم أو لماذا لا.	في المستوى 4، نطلب من الطالب دائمًا أن يشرح طريقة الحل للتأكد من أن إجابته تستند إلى معنى علامة "=" كعلاقة.

جدول 4: نوع المهمة - تعريف الإشارة "="

مستوى	أمثلة	ملاحظات
مستوى 1: حساب صارم	أحيطوا بدائرة زوج الأعداد الذي يساوي $3 + 5$ أ. $4 + 4$ ب. $7 + 3$ ج. $3 + 6$ د. لا أحد منها	في هذا المستوى، يجد الطلاب صعوبة كبيرة في الإجابة على سؤال يتناول تعريف إشارة "=".
مستوى 2: حساب مرن	ما الذي يجب كتابته في الفراغ للتعبير عن أنّ نِصف الشاقل يساوي 50 أغورة؟ إختاروا من بين الإمكانيات التالية واملؤوا الفراغ: نصف شاقل ___ 50 أغورة أ. شاقل ب. = ج. + د. لا أعرف	في المستوى 2، يستطيع الطلاب أن يختاروا تعريفًا واحدًا من بين عدة تعريفات. اختار قسمًا منهم عدة إمكانيات في نفس الوقت. إنّ اختيار تعريف النسبي (مكافئ لـ - ...) لا يشير بالضرورة إلى أنهم تخلوا عن الجانب الحسابي للإشارة "=" (النتيجة).
	أحيطوا التعبير المناسبة لوصف معنى إشارة "=": أ. الإشارة "=" معناها: مكافئ لـ ... مناسب / غير مناسب ب. الإشارة "=" معناها: نجمع ... مناسب / غير مناسب ج. الإشارة "=" معناها: نتيجة التمرين ... مناسب / غير مناسب	
مستوى 3: المساواة كعلاقة	أحيطوا التعبير المناسبة لوصف معنى إشارة "=": أ. الإشارة "=" معناها: مكافئ لـ ... مناسب / غير مناسب ب. الإشارة "=" معناها: نجمع ... مناسب / غير مناسب ج. الإشارة "=" معناها: نتيجة التمرين ... مناسب / غير مناسب أي وصف من بين هذه الأوصاف هو الوصف الأنسب لإشارة "="؟ أحيطوا الحرف المناسب: أ / ب / ج	في المستوى 3، يزداد الاحتمال أن يختار الطلاب التعريف النسبي (مكافئ لـ ...)، لكن لا يزال الكثير منهم يختار كِلا الإمكانيتين. يمكنهم أيضًا تحديد أولويات اختيارهم، واختيار أفضل تعريف للإشارة "=".

مستوى	أمثلة	ملاحظات
مستوى 4: المساواة كمبنى علاقة	هل الجملة الآتية صحيحة أم غير صحيحة؟ 100 سم = 1 متر ماذا تعني إشارة "=" في هذه الجملة؟	السؤال الثاني، الذي نطلب فيه تعريف إشارة "="، صعب جدًّا على طلاب المستويات 1-3. أظهر الطلاب الأكثر نجاحًا قدرة عالية على التفكير أيضًا في الأسئلة الصعبة الأخرى.
	ماذا تعني الإشارة "="؟ هل يمكن أن يكون للإشارة معنى آخر أيضًا؟	

الجدول 5: نوع المهمة - استخدام الحروف كمتغيرات

مستوى	أمثلة1	ملاحظات
مستوى 4: المساواة كمبنى علاقة	أي قيمة لـ a تجعل التعبير التالي صحيحًا: $12 = a + 7$	في المستوى 2، واجه الطلاب صعوبة كبيرة في حل هذا السؤال، في المستوى 3، تراوح احتمال نجاح الطلاب بين 45% إلى 70%. في المستوى 4، تراوح احتمال نجاح الطلاب بين 24% 80% إلى 99%.
	أي قيمة لـ b تجعل التعبير التالي صحيحًا: $b + b + b + 3 = 15$	في المستوى 4 فقط، تراوح احتمال نجاح الطلاب للإجابة على هذا السؤال بشكل صحيح بين 24% إلى 88%.
	أي قيمة لـ c يجب تعويضها في المعادلة للحصول على قضية صدق؟ $c + c + c = c + 10$	في المستوى 4 فقط، تراوح احتمال نجاح الطلاب للإجابة على هذا السؤال بشكل صحيح بين 11% إلى 75%.

[1]**ملاحظة**: بالإضافة إلى الأمثلة الواردة في تلخيص هذا المقال، يمكنكم إضافة أسئلة من هذا النوع:

(1) لأي قيمة a التعبير $a = 2 + 3$ هو تعبير صحيح؟

(2) هل يوجد اختلاف في الإجابة إذا كان الحرف a على يمين أو يسار إشارة "="؟

الجدول 6: نوع المهمة - التفكير المتقدم حول الإشارة "=" كعلاقة

مستوى	أمثلة	ملاحظات
مستوى 4: المساواة كمبنى علاقة	إذا كان معلومًا أن التمرين $28 = 13 + 15$ صحيحًا. هل التمرين $15 + 13 + 7 = 28 + 7$ صحيح؟ كيف عرفتم ذلك؟	فقط الطلاب الجيدون في المستوى 4 كان لديهم احتمال نجاح أعلى من 50% للإجابة على هذه الأسئلة بشكل كامل.
	إذا كان معلومًا أن التمرين $8 \times 2 = 16$ صحيحًا. هل التمرين $8 \times 2 \times 3 = 16 \times 3$ صحيح؟ كيف عرفتم ذلك؟	
	إذا كان معلومًا أن التمرين $126 = 69 + 57$ صحيحًا، حددوا دون أن تحسبوا ما إذا كان التمرين $57 + 69 - 8 = 126 - 8$ صحيحًا؟ كيف عرفتم ذلك؟	
	هل العدد الذي يجب اكماله في التمرين $3 \times __ = 69$ هو نفس العدد الذي يجب إكماله في التمرين $7 \times 3 \times __ = 7 \times 69$ كيف عرفتم ذلك؟	

<u>فيما يلي عدة أفكار من نتائج واستنتاجات البحث المعروض في المقال [2]:</u>

- ارتبطت مستويات قدرة الطلاب ارتباطًا وثيقًا بعمرهم (الصف).
- تعلم الطالب متواصل إلى جانب تقسيمه إلى مستويات. هذا يعني أن للطلاب من جميع الأعمار يمكنهم الإجابة بشكل صحيح على الأسئلة في المستويات المختلفة، لكن احتمال نجاحهم يكون مختلف (انظروا إلى الجداول السابقة في عمود الملاحظات).

الطلاب الذين تكون نتائجهم في الامتحان في مكان معين في السلم المحدد، يجيبون وفقًا لذلك على أسئلة إضافية من نفس النوع. وهذا يُتيح تنبؤ أنواع الصعوبات التي قد يواجهها الطلاب عند حل مثل هذه الأسئلة، كما يُتيح تنبؤ درجة نجاحهم.

- كان مكان العملية الحسابية نسبة للإشارة "=" (إلى اليمين أو إلى اليسار) عنصرًا مهيمنًا فيما يتعلق بدرجة الصعوبة، وكانت هذه الصعوبة أكثر من عدد المضافات، أو ما إذا كان العدد المجهول في الطرف الأيمن أو الأيسر من المعادلة. كانت المعادلات التي ظهرت فيها جميع العمليات في الطرف الأيمن أكثر صعوبة من المعادلات التي ظهرت فيها جميع العمليات في الطرف الأيسر، وهذا هو الفرق بين المستوى 1 والمستوى 2. كانت المعادلات التي ظهرت فيها عمليات في طرفَيْ إشارة "=" أكثر صعوبة من المعادلات التي ظهرت فيها العمليات فقط في طرف واحد من إشارة "=" ، وهذا هو الفرق بين المستوى 2 والمستوى 3.
- واجه الطلاب صعوبة أكبر عندما طُلب منهم صياغة وصف من عندهم للإشارة "=". كان من الأسهل عليهم اختيار وصف من عدّة خيارات. تتطلب القدرة على صياغة قواعد أو أوصاف أوّلًا القدرة على قدرة التنفيذ في المستويات 3 وَ/ أو 4.
- القدرة على وصف إشارة "=" بناءً على مفهوم العلاقة لا تُشير بالضرورة إلى أن هؤلاء الطلاب تخلوا عن الجانب الحسابي للإشارة "=". يمكن أن تكون وجهة النظر التي تُشير إلى التصور أن إشارة "=" كعلاقة مع وجهات نظر أقل تطورًا.
- التمارين التي تضمنت الحروف كمتغيرات كانت مناسبة أيضًا لنموذج التسلسل البنيوي، لكن كان تنفيذها أكثر صعوبة من التمارين المماثلة التي لم تتضمن الحروف كمتغيرات. الطلاب الذين يفهمون معنى إشارة "=" يحلون التمارين بشكل أفضل.
- التمارين التي احتاجت إلى اتخاذ قرار بناءً على استراتيجيات "التعويض" (تكبير وتصغير مكونات العملية) بدون حسابات تُشير إلى التفكير الذي يعتمد على مفهوم العلاقة. بمعنى، إدراك أن الإشارة "=" تمثل علاقة بين الأعداد التي تظهر في طرفيْ الإشارة، وبالتالي لا نحتاج إلى إجراء عمليات حسابية.
- الأسئلة التي تحتاج إلى شرح حول التحولات التي تحافظ على المساواة، والتي لم يتم فحصها في الأبحاث السابقة مناسبة أيضًا للنموذج، وهي موجودة توجد في المستوى 4.
- في هذه الأسئلة وفي الأسئلة الجبرية البسيطة التي تتضمن استخدام الأحرف كمتغيرات، الطلاب الذين أظهروا فهمًا للإشارة "=" نجحوا بشكل أفضل، على الرغم من أنهم لم يتلقوا تدريبًا سابقًا حول هذا الموضوع. هذا اثبات تجريبي لادعاء العديد من الباحثين بأن معرفة الأطفال الصغار بالإشارة "=" تدعم التفكير الجبري.
- تستند نتائج هذا البحث إلى مجموعات من طلاب المدارس الابتدائية في الولايات المتحدة الذين انكشفوا بشكل أساسي للتدريس المحافظ فيما يتعلق بإشارة "="، ومن الممكن أن يتمّ الحصول على نتائج مختلفة في مجموعات سكانية أخرى من بلدان أخرى.

حسب المقال الذي يصف البحث الذي أجري في السويد، مقال [1]

المعرفة المتعمقة بالجبر ضرورية لتعلُّم الرياضيات العليا، لذلك من المهم إجراء أبحاث حول تعليم الجبر وتعلمه. يؤكد العديد من الباحثين على أهمية معرفة إشارة "=" من أجل تعلُّم الجبر.

وقد ثبت أيضًا أن هذه المعرفة عامل مهم في تنبؤ قدرات ومهارات التفكير الجبري. معنى إشارة "=" موجود في حلّ كلّ معادلة، أو استخدام صيغة جبرية أو العمل على تعبير جبري.

بيّنت الأبحاث أنه يمكن تدريس الجبر في الصفوف الدنيا باستخدام، على سبيل المثال، العلاقات والأنماط الرياضية من أجل تطوير التفكير الجبري. في الاختبارات الدولية ، مثلًا: TIMSS، كانت معرفة الجبر لدى الطلاب من السويد أقل من المعدل لمدة عقود من الزمن، وما زالت مستمرة حتى اليوم. وهذا على الرغم من المحاولات التي بُذلت في السويد لتحسين المعرفة الجبرية لدى الطلاب. تمّ تغيير المنهج ليشمل مجال الجبر من الصف الأول، ويتم التركيز على تعلُّم أهمية إشارة "=".

من الأبحاث التي أُجريت في السويد، اتضح أنّ الكتب المدرسية للصفوف الأولى – الثالثة غنية بمهام لحل معادلات (مثل ، 3 + 5 = __ + 2) وفي الصفوف الرابعة - السادسة 4-6 غنية بمهام بناء مساواة (مثلًا: هل التعبير 5 + 4 = 4 + 2 + 3 صحيح أم غير صحيح؟). في الكتب المدرسية السويدية للصفوف الأولى – الثالثة، من المقبول تعريف الإشارة "=" على أنها إشارة تدل على كمية متساوية.

من المهم أن نذكر أنه على عكس طريقة التعلُّم في الصفوف العليا، فإنّ تعلُّم الجبر في الصفوف الدنيا يتمّ بطريقة مناسبة لإدخال التفكير الجبري في سن مبكرة. وهذا يشمل تعليم "الأفكار الكبيرة" (Big Ideas) للتفكير الجبري التي يمكن تطويرها في سن مبكرة وتشمل هذه الأفكار:

EEEI – equivalence, expressions, equations, and inequalities	التكافؤ، التعابير، المساواة وعدم المساواة
GA – generalized arithmetic	الحساب العام
FT – functional thinking	تفكير وظيفي
VAR – variables	متغيرات
PR – proportional reasoning	التفكير النسبي

البحث الذي تمّ إجراؤه في السويد في المقال [1]، والذي يركّز على كيفية وصف الطلاب للإشارة "=" واستخدامهم لها، يرتبط باثنين من هذه الأفكار الكبيرة: التكافؤ، التعابير، المساواة وعدم المساواة (**EEEI**) والحساب العام (**GA**).

المناهج والكتب التعليمية في السويد تتناول بشكل أساسي مهام من نوع **EEEI**. إذا تمّ عرض سؤال من النوع 4 + __ = 5 + 8، فمن الممكن الوصول إلى إجابة صحيحة عن طريق إجراء عمليات حسابية.

لكن يمكن الإجابة عليه إذا طرحنا 1 من 5 وأضفناه إلى 8 للحصول على 4 + __ = 4 + 9، ويمكن أيضًا أن نعمم ونقول إننا طبقنا قانون التجميع هنا. في هذه الحالة تطرقنا إلى الفكرة الكبرى للحساب العام - **GA**.

يتطرق المنهج الدراسي في السويد بوضوح إلى أهمية فهم إشارة "=".

تناول البحث المعروض في المقال [1] ثلاثة مواضيع:

1. كيف يصف الطلاب في السويد الإشارة "=" وكيف يستخدمونها؟ (ذَكَر مؤلفو المقال [2] أن النتائج التي حصلوا عليها مناسبة للطلاب في الولايات المتحدة، ومن الأفضل أن يفحصوا أدوات التقييم الخاصة بهم في بلدان أخرى ومقارنة النتائج).
2. هل توجد فروق في مستوى معرفة الطلاب بين مدارس في مستويات اجتماعية واقتصادية مختلفة؟
3. ما هو التشابه وما هو الاختلاف بين نتائج الطلاب في السويد والطلاب في كوريا الجنوبية الذين تمّ اختبارهم باستخدام نفس أداة التقييم، والذين تُعتبر نتائجهم في امتحان TIMSS جيدة بشكل خاص؟

فحص البحث طلاب الصفين الثالث والسادس من ثلاث مدارس مختلفة، واستخدم أداة التقييم التي تمّ تطويرها وتقديمها في المقال [2]. طُلب من الطلاب ملء النموذج الذي حصلوا عليه في إطار درس في الصف، لكن لم يُطلب منهم تقديم الحل (هذا يحيد الشعور بالامتحان الموجود عادةً في هذه المواقف، والذي يدفع الطلاب لفحص أنفسهم عن طريق إجراء عمليات حسابية).
يعتمد تحليل النتائج على التسلسل البنيوي لمستويات المعرفة حول إشارة "=" المعروضة في المقال [3] وعلى التحليل الذي تم تنفيذه في المقال [2].

<u>فيما يلي العديد من الأفكار التي تعتمد على نتائج واستنتاجات البحث الذي تمّ عرضه في المقال [1]:</u>

- توجه النتائج التي تمّ الحصول عليها في البحث في السويد يشبه توجه النتائج التي تمّ الحصول عليها في الأبحاث في الولايات المتحدة وكوريا الجنوبية.
- كانت النتائج في الصفوف الثالثة أقل من نتائج الصفوف السادسة، حيث كان هناك نجاح أكبر في الإجابة على الأسئلة في المستويات العليا، مما يُشير إلى فهم الإشارة "=" كعلاقة.
- كان هناك تفاوت بين المدارس حسب مستواها الاجتماعي والاقتصادي. بما أن الفروق بين المدارس كانت في مستوى تعليم الوالدين ومستوى إعداد المعلمين، فقد يكون هناك تأثير لمستوى إعداد المعلمين.
- كان أداء الطلاب الكوريين الجنوبيين أقل من أداء الطلاب السويديين الذين يتعلمون في مدارس ذات مستوى اجتماعي واقتصادي عالي، ولكنه كان أعلى من أداء الطلاب في المدارس السويدية الأخرى. وقد برز هذا بشكل خاص فيما يتعلق بفهم تعريف الإشارة "=" في الصف السادس.
- القدرة على وصف تعريف إشارة "=" لا تُشير بالضرورة إلى القدرة على التطرق إلى صفة العلاقة (النسبة) للإشارة "=" والعكس صحيح. بشكل عام، لدى العديد من الطلاب فهم غامض للإشارة "=".
- في كل من البحث السويدي والبحث في كوريا الجنوبية، برزت صعوبة لدى الطلاب في شرح طريقة حلهم، ونتيجة لذلك كانت النتائج أقل دقة.
- يبدو أن معظم الطلاب يطورون فهمًا لمعنى الإشارة "=" كعلاقة، عند صعودهم إلى الصفوف العليا، على الرغم من أن الموضوع في السويد لا يتمّ تدريسه بشكل واضح في هذه الصفوف. ربما يشير هذا إلى عنصر تنموي في القدرة على التقدم إلى فهم أكثر تطورًا لعلامة "=" ، ويفسره الباحثون من خلال حقيقة أنهم يمارسون في هذه الفئات حل المعادلات من أنواع مختلفة بشكل أكبر.

ربما يُشير هذا الأمر إلى تطوير القدرة على التقدُّم إلى فهم أكثر تطورًا لإشارة "="، ويفسره الباحثون من خلال الحقيقة أن الطلاب يمارسون، في هذه الصفوف، حل معادلات من أنواع مختلفة بشكل أكثر.

- تتناول الكتب التعليمية في السويد بشكل أساسي المهام المرتبطة بالمكافئة، التعابير، المساواة وعدم المساواة **(EEEI)**، وتتناول أقل المهام المرتبطة بالحساب العام **(GA)**، وهذا قد يضر بتنمية المعرفة الجبرية لدى الطلاب. يجب التركيز على ذلك أيضًا.

<u>تلخيص:</u>

تناول المقالان الموصوفان هنا بالتفصيل البحث حول مستوى معرفة الطلاب بإشارة "=" كدلالة على المساواة الرياضية. لا توجد فيهما توصيات حول كيفية تحسين معرفة الطلاب.

في المقال [6] هناك اقتراح لمنهج تعليمي مفصل تمت تجربته في الصفوف الأولى - الثالثة من أجل تعزيز فهم المصطلح. من ناحية أخرى، بما أنه حتى يومنا هذا، وبَعد مرور أكثر من عشرين عامًا على نشر المقال [6]، لا يزال هناك دليل بحثي على صعوبات الطلاب، لذا يجب الافتراض أن مرحلة نمو وتطور الطلاب المرتبطة أيضًا بعمر الطلاب لها تأثير كبير. وهذا التأثير لا يمكن تجاهله.

هذا يعني أنه حتى إذا كشفنا الطلاب إلى أنواع مختلفة من الأسئلة في المستويات العليا من المعرفة، فسيظلون في المرحلة الأولى يُشيرون إلى إشارة "=" في مفهومها الحسابي، وبعد ذلك فقط ينتقلون إلى إدراك مفهوم العلاقة النسبية والمقارنة، حيث يحدث ذلك عندما لا يكون الانتقال ثنائي التفرع ولكنه يحدث بتسلسل.

على أي حال، تدعي المقالات أنه من الضروري الوصول إلى مستوى العلاقة النسبية والمقارنة من أجل تأسيس التفكير الجبري، واكساب القدرة على التعامل مع الجبر المطلوب لاحقًا في تعلُّم الرياضيات.

مصادر

1. Madej L. (2022). Primary School Students' Knowledge of the Equal Sign – the Swedish Case. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 321-343.
2. Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 316–350.
3. Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*, 85–104.
4. וייס, ו' (2001). בעקבות המאמר: "הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה". *מספר חזק 2000, 1*, 29-33. נמצא כאן.
5. משרד החינוך – האגף לתוכניות לימודים (2006). *תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א'-ו' בכל המגזרים*. כיתה ב', משוואות פשוטות, עמ' 38.
6. פולקנר, פ"ק, לוי ל', קרפנטר ת"פ (1999). הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה. מאמר מתורגם מתוך: Teaching Children Mathematics. נמצא כאן.
7. קלוז'ני, ח' (2012). *"רכבת השוויונות" בכיתה ב'. מספר חזק 2000, 22*, 17-22. נמצא כאן.

نشاط في أعقاب التلخيص لاستكمال المعلمين

1. **تحليل أخطاء شائعة متعلقة بإشارة "=":**

يوجد مع سميرة 4 تفاحات وَ 3 برتقالات.

أكلت تفاحة واحدة وأعطت والدتها برتقالتين.

كم حبة فاكهة بقي مع سميرة؟

حل سامي السؤال كالتالي: $4 = 2 - 6 = 1 - 7 = 3 + 4$

(1) اختاروا الإجابة الصحيحة وعللوا:

أ. حل سامي هو حل صحيح.

ب. حل سامي هو حل غير صحيح.

ج. إجابة سامي صحيحة، لكن التمرين الذي كتبه غير صحيح.

(2) ما رأيكم في عملية حل سؤال سامي؟

ملاحظة: نوصي بأن نشرح للطلاب أنه عند حل تمرين يتضمن عدة عمليات، يجب أن نتقدم من عملية إلى عملية وفقًا لترتيبها المقبول، ونسجل النتيجة المرحلية لحساب العملية فوق قوس نكتبه فوق إشارة العملية الحسابية.

بعد مناقشة المهمة الأولى، من الأفضل أن نطلب من المعلمين أن يقرؤون الصفحات 1-4 من التلخيص (حتى أنواع الأسئلة) ومناقشة الأفكار الرئيسية التي تظهر من النص.

2. في الخطوة التالية، يمكن تقديم أنواع المهام للطلاب وتحليلها جنبًا إلى جنب مع مبناها الرياضي.

في نهاية النقاش، من الأفضل أن نطلب من المعلمين أن يقرؤون سير الدرس المعروض في مقال "قطار المساواة للصف الثاني" الموجود هنا (يجب قراءة سير الدرس فقط، الصفحات 19-21). انتبهوا إلى أن التطبيق في المقال لا يعمل، لذا يمكن تقديم التطبيق الموجود هنا.

3. هل يتوافق النشاط المعروض في المقال مع وجهة النظر البنيوية للإشارة "=" كعلاقة مقارنة أم يتوافق مع وجهة نظر حسابية للإشارة "=" كعلاقة أساسية؟ عللوا.

الإجابة: هذا متعلق بنوع التمارين الموجودة في طرفَيْ إشارة "=".

$$100 : 4 - 10 = 19 - 4 = 13 + 2 = 9 + 6 = 8 + 7 = 10 + 5 = 14\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 800 - 785 = 5 \times 3$$

4. أعطوا أمثلة من مقال "قطار المساواة للصف الثاني" بحيث تكون مناسبة لتصور علاقات المقارنة وعللوا.

إجابة:

(أ) $6 + 9 = 7 + 8$ لأنه يمكن استعمال استراتيجية التعويض، حيث ننقل 1 من 7 إلى 8 ونحصل على 6+9.

(ب) $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 10 + 5$ لأنه يمكن استعمال التحول من $5 + 5 + 5$ إلى 5×3.

5. أعطوا أمثلة من مقال "قطار المساواة للصف الثاني" بحيث تكون مناسبة لتصور علاقات المقارنة وعللوا.

إجابة: $785 - 800 = 5 + 10$ لأنه لا توجد علاقة واضحة بين التمرينين، وكل واحد منهما بحد ذاته تمرين مختلف، فقط مجموعهما متساوٍ. $2 + 13 = 4 - 19$ لأنه لا توجد علاقة واضحة بين التمرينين، وكل واحد منهما بحد ذاته تمرين مختلف، فقط مجموعهما متساوٍ.

6. أُكتبوا أمثلة لأسئلة بحيث تكون مناسبة للمستوى 4 وحول المعرفة عن إشارة "=". حددوا نوع السؤال لكل مثال.

7. أُدخلوا إلى هذا النشاط وأجيبوا عن السؤال: أي مستوى من المعرفة يتناول هذا النشاط وفقًا لتسلسل مستوى المعرفة الذي يظهر في صفحة 3، وما هو نوع السؤال؟

الإجابة: مستوى المعرفة هو "المساواة كعلاقة" ونوع المهمة هو مبنى المساواة.