סיכום מאמרים בנושא: מספרים טבעיים ושברים על ישר המספרים חלק א'

ערכה וסיכמה: ברכה סגליס

סיכום המאמרים "מספרים טבעיים ושברים על ישר המספרים" יוצג בשני חלקים. חלק א' מוקדש להתפתחות המושג ישר המספרים ומציג את תרומתו, חלק ב' מוקדש לקשיים ולתפיסות המוטעות של תלמידים בייצוג המספרים על ישר המספרים.

מבוא לשני החלקים

נושא "ישר המספרים" נלמד בבית הספר היסודי בכל הכיתות בהתאם להתקדמות הידע של התלמידים בעולם המספרים. בעקבות ההתנסות של התלמידים בכיתות הנמוכות ישר המספרים מתפתח כמודל מנטלי לייצוג המספרים הטבעיים במשמעות של סדר ושל גודל. כך, כאשר מגיעים ללמוד את נושא "השברים", ישר המספרים משמש הן כמודל להמחשת מושג השבר והן למשמעות השבר כנקודה על ישר המספרים.

תוכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי מטעם משרד החינוך [6] מציגה את הנדרש להורות בכיתה ד' בנושא השבר הפשוט. שתי המשמעויות הנלמדות בשנה זו הן: השבר כחלק מהשלם והשבר כחלק מכמות. התוכנית מציינת כי "יש לכלול בלימוד בניית המחשה של השברים על ידי התלמידים בכמה מהמודלים: עיגולים, מלבנים, קבוצות, ישר המספרים וכולי" (עמ' 76). משמעות השבר כנקודה על ישר המספרים מוצגת גם בתוכנית הלימודים של כיתה ה' (עמ' 98).

מחקרים מראים שכמו בכל נושא מתמטי הנלמד בכיתות היסוד, גם הידע על העקרונות המנחים של ישר המספרים מתפתח בהדרגה, וישנם תלמידים אצלם מתגלים קשיים בהבנת הנושא, הן במספרים השלמים והן בשברים.

החלק הראשון מכיל סיכום של שני המאמרים העוסקים בהתפתחות המושג "ישר המספרים" בקרב תלמידי בית הספר מבחינה מנטלית, ומוצגת תרומתו של ישר המספרים כאחד האמצעים להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי. במאמר הראשון מוצג מחקר שנעשה בקרב תלמידי כיתה ב', והוא מספק מידע על האופן שבו מתפתח ישר המספרים המנטלי [2]. במאמר השני מוצגת התרומה הייחודית של ישר המספרים להבנת מושג השבר הפשוט ובנוסף לכך הדרך ליישום רעיונות אלה בכיתה ד' לאור ממצאים שעלו מהמחקרים הקודמים בכיתות ה'-ו' [1].

החלק השני מכיל סיכום של שלושת המאמרים המתייחסים לקשיים ולתפיסות שגויות של התלמידים בייצוג המספרים (שלמים, פשוטים, עשרוניים) על ישר המספרים. המאמר הפותח בחלק הזה מציג סדרת משימות שהציבו בפני קבוצת מורים של כיתות ג'-ה' במסגרת תוכנית

הכשרה בנושא השבר הפשוט, בדגש על הקשיים של התלמידים בבואם לבצע משימות כאלה [3]. המאמר השני מציג מחקר שבו ניתנו לתלמידי כיתה ו' משימות הערכה לבדיקת הבנתם בנושא מספרים עשרוניים. מהממצאים עולה כי רוב התלמידים התקשו בייצוג המספרים על ישר המספרים [4]. במאמר השלישי מודגשים סוגי השגיאות שתלמידים בכיתות ה'-ו' שוגים בהם בבואם לבצע משימות של זיהוי שברים פשוטים ועשרוניים על ישר המספרים [5].

בכל המאמרים מובאות דוגמאות רבות למשימות שונות לדרכי הפתרון של התלמידים ולסוגי השגיאות שעלו. נוסף לכך, בכל המאמרים מושם דגש על מושג ה-unit שתורגם כדילוג[1], אך המשמעות שלו אינה אחידה בכולם. לצורך אחידות הקריאה וההבנה נשתמש במושגים הבאים:

- *קטע יחידה* הוא קטע על ישר המספרים בין 0 ל־1 או בין שני מספרים טבעיים עוקבים;
- *שבר יחידה* הוא קטע המציין שבר יסודי כלשהו (שבר שמונהו 1);
- *דילוג* הוא קטע הכולל כמה קטעי יחידה או שברי יחידה, כמו דילוג של 10 יחידות, או כאשר המושג מופיע בהקשר כללי.

חלק א'

נציג תחילה את המאמר שמספרו ברשימה הביבליוגרפית הוא [2], ואחר כך את המאמר שמספרו ברשימה הביבליוגרפית הוא [1].

סיכום מאמר 2 – בניית תפיסה חזקה על אודות ישר המספרים - Lannin et al. (2020)

תובנה מספרית שבאמצעותה כולנו פועלים בחיי היומיום, קשורה לישר המספרים המנטלי שיצרנו, אשר מתבסס על ההבנה שלנו על אודות ישרי מספרים פיזיים[2]. בכיתות היסוד משמש ישר המספרים לספירה ו/או מנייה ולייצוג פעולות מתמטיות כמו חיבור וחיסור. במשימות אלו נדרשת הבנה מעמיקה של יחסים בין המספרים, ויכולת לקשר יחסים אלה לייצוגים שלהם על ישר המספרים. במאמר זה מוצג מחקר שנערך בקרב תלמידי כיתות ב'. על פי דיווחי המורות, הביצועים של התלמידים היו ברמה בלתי מספקת ביחס לרמה הנדרשת לגילם. הדרך שבה פעלו במשימות השונות על ישר המספרים ותיארו את דרך החשיבה שלהם, מספקת מידע על האופן שבו מתפתח ישר המספרים המנטלי.

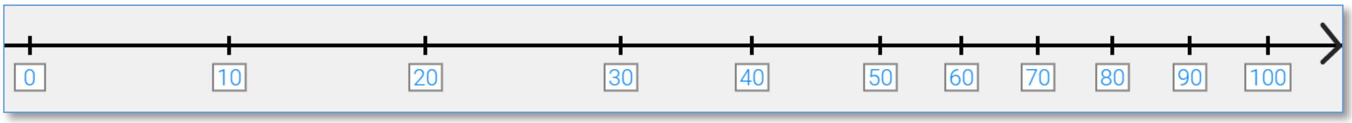
ישר המספרים המנטלי, המיוצג לרוב כישר מספרים פיזי, מאפשר הסתכלות על היחסים שבין מספרים, כמו רצף המספרים ונקודות אחיזה (כגון, 10, 100, מיליון) והשוואה בין מספרים. משמעות עמוקה יותר היא שהמרחק מאפס למספר מסוים על הישר מייצג את הגודל של אותו

[1] תרגום המילה "unit" כמילה "דילוג" נבחר בהתאם למילה בה השתמש פרופ' רז קופרמן בספרו "מתמטיקה של בית ספר יסודי: לגלות מחדש, להבין, ללמד ולאהוב" (למשל עמודים 102-103).
[2] מחברי המאמר משתמשים במושג "ישר מספרים פיזי" כאשר מדובר על ישר המספרים המסורטט על הנייר. זאת כדי להבדיל מ"ישר המספרים המנטלי".

מספר. לכן ישר המספרים מאפשר לנו לייצג, להשוות ולבצע פעולות חשבון תוך הסתמכות על מושג המרחק.

חוקרים מצאו שאצל תלמידים צעירים ישר המספרים המנטלי דחוס (לדוגמה, הם רואים את 100 ו-90 כקרובים יותר זה לזה מאשר 10 ו-20 , ראו איור 1). במספרים בתחום 0-100 המעבר לחשיבה לינארית מתחיל סביב הגיל 7-8, בעוד המעבר לחשיבה לינארית של המספרים בתחום 0-1,000 מתחיל סביב הגיל 9. עבור תלמידים מתקשים ישר המספרים נשאר דחוס לתקופה ארוכה יותר.

איור 1: דוגמה לישר מספרים דחוס



ישנם תלמידים המתקשים בשימוש בישר המספרים. חשוב לציין כי אי טיפול בקשיים אלו עלול לעכב את התפתחות הבנתם בנוגע לרעיונות מתמטיים משמעותיים על מספרים. אתגר נוסף עבור חלק מהתלמידים הוא ההכרה שהמרחק משחק תפקיד במיקום מספרים על הישר והם נוטים למנות את השנתות במקום את המרחק בין שני מספרים כדי לקבוע למשל מה ההפרש ביניהם.

רעיונות המפתח בהקשר להתפתחות ההבנה על אודות ישר המספרים בכיתות היסוד הנמוכות הם:

א. הסתכלות כללית לעומת הסתכלות ספציפית על רצף מספרים;
ב. הבנה של מושג הדילוג.

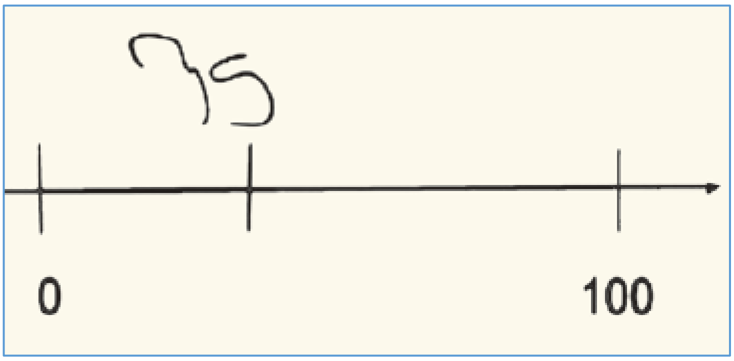
להלן דוגמאות לפעילויות המקדמות הבנה של רעיונות המפתח על ידי התייחסות לתשובות של תלמידים:

1. הסתכלות כללית לעומת הסתכלות ספציפית על רצף המספרים

תלמידים בבואם להשוות בין מספרים מסתמכים על ישר המספרים המנטלי ומתחילים מהסתכלות כללית על היחסים שבין המספרים. למשל, הם מזהים ש־95 גדול מ־23 כיוון ש־95 קרוב יותר ל־100 או שמספרים בתחום ה־90 גדולים יותר ממספרים בתחום ה־20. כאשר התלמידים רוכשים הבנה מעמיקה יותר, ההסתכלות שלהם נעשית ספציפית יותר, והם יבחינו למשל, ש־95 קטן מ־100 ב־5.

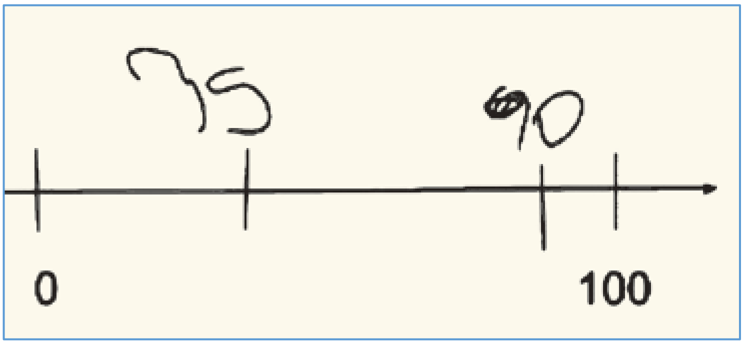
המשימות שניתנו בהקשר זה עסקו בישרים מתוחמים מ־0 ל־100, שבהם התלמידים התבקשו למקם ערכים מסוימים על הישר. איורים 2-4 מציגים שלוש משימות ברצף שתלמידה מסוימת התבקשה לפתור במטרה לבדוק מה ההסתכלות שלה על מספרים בישר המספרים.

איור 2: האם 35 קרוב יותר ל־0 או ל־100?



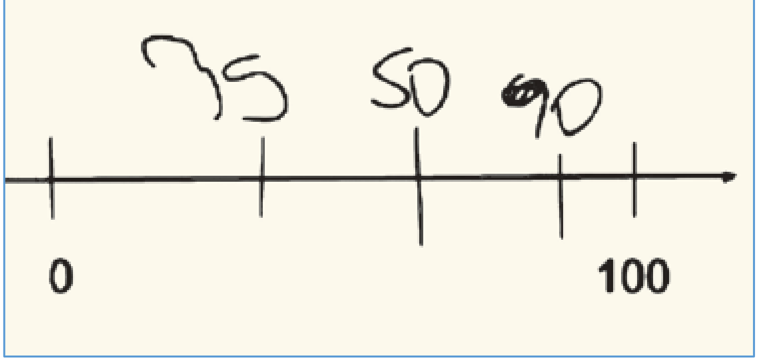
תשובה: אף אחד. 100 הוא בסוף ו-35 זה באמצע.

איור 3: סמני היכן צריך להיות 90. מדוע הוא צריך להיות שם?



תשובה: זה קרוב יותר ל־100, כי צריך רק 10 כדי להגיע ל־100.

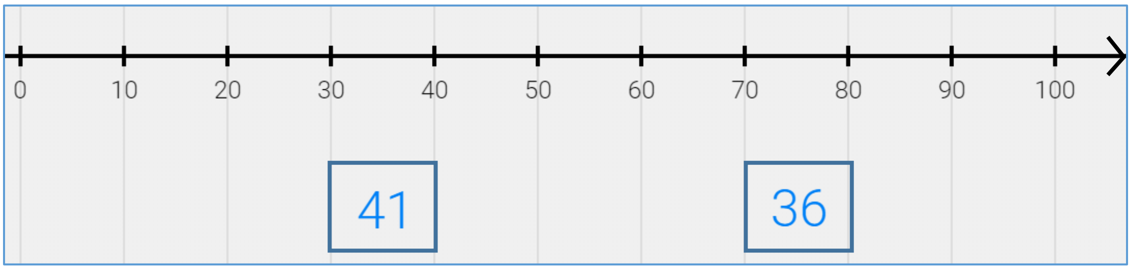
איור 4: האם 50 קרוב יותר ל־35 או ל־90?



תשובה: שניהם, בגלל שזה באמצע שלהם.

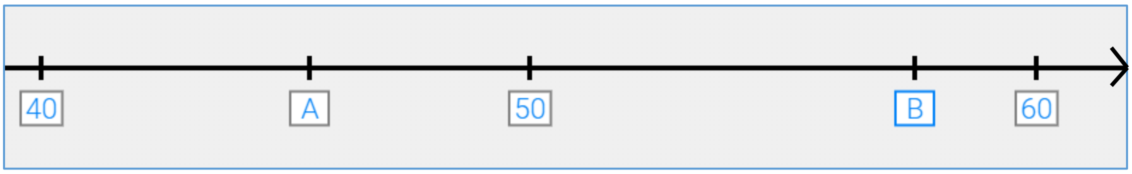
במשימות אלה התלמידה פעלה לפעמים בהסתכלות כללית ולפעמים בהסתכלות ספציפית במטרה להשוות בין מספרים. כדי לעודד את שתי היכולות הללו ניתנו לתלמידים משימות מסוגים שונים. איור 5 מציג משימה שבה שנתות המסומנות על ישר המספרים הן בדילוגים של 10. התלמידים מקבלים 2 כרטיסים, ועל כל כרטיס רשום מספר דו־ספרתי ועליהם לקבוע איזה מספר גדול יותר.

איור 5: השוואת מספרים על גבי ישר המספרים מ־0 עד 100
עם שנתות בדילוגים של 10



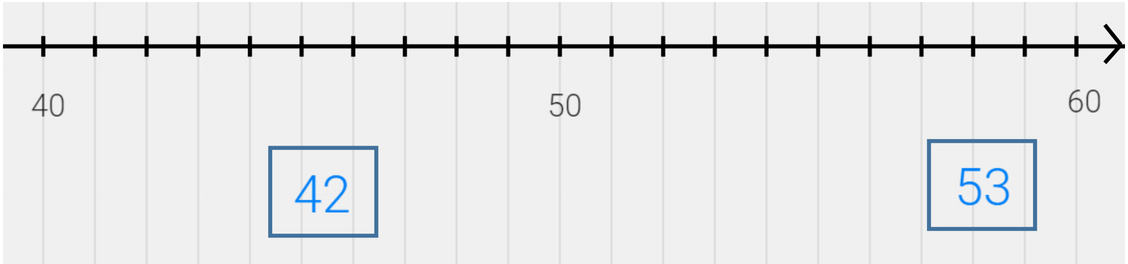
במשימה הבאה (איור 6), התלמידים קיבלו הכוונה לבצע הכללה על היחסים שבין העשרות, באמצעות התייחסות למספרים המסומנים באותיות על הישר, והתבקשו להסביר איזה מספר גדול יותר. התלמידים קיבלו הכוונה לזהות שמספרים בתחום בין 50 ל־60 הם גדולים יותר ממספרים בתחום שבין 40 לבין 50, ובכך לחזק את ההסתכלות הכללית שלהם על מספרים המוצגים על הישר.

איור 6: איזו כמות גדולה יותר: A או B? הסבירו כיצד ידעתם



במטרה לעודד הסתכלות ספציפית הוצגו לתלמידים משימות שבהן נשאלו איזה מספר קרוב יותר לנקודות האחיזה המוצגות על ישר המספרים (איור 7). למשל: איזה מספר קרוב יותר ל־50: 42 או 53? לצורך ביצוע משימות כאלה, היה על התלמידים למצוא את המרחק בין כל מספר לבין נקודת האחיזה בעשרות. לתלמידים ניתנו משימות רבות מסוג זה, כולל משימות בהן המרחק בין כל מספר לבין נקודת האחיזה היה שווה.

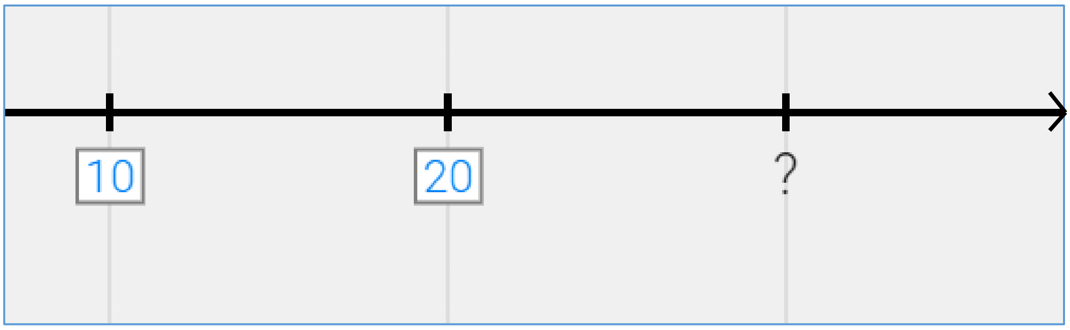
איור 7: השוואת מספרים למספר משותף המוצג בעשרות



2. בניית הבנה של מושג הדילוג

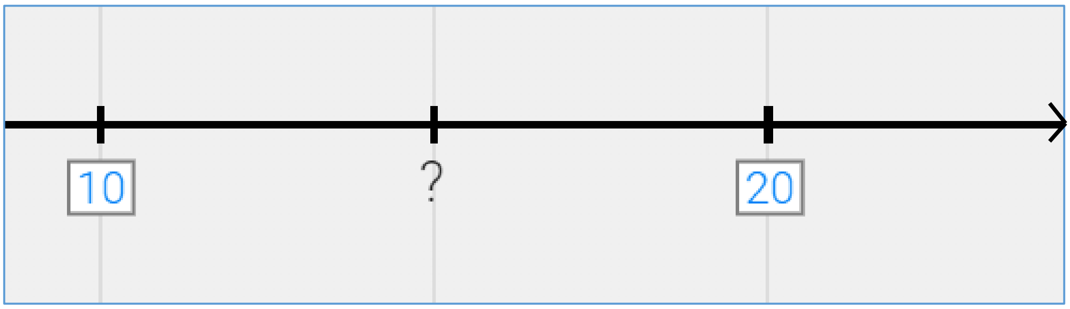
הבנה חשובה נוספת על ישר המספרים המנטלי כרוכה ביישום מושג הדילוג והכרה שגודל הדילוג יכול להשתנות כאשר נתון ישר מספרים פיזי. בישר המספרים שמסומנים בו שני ערכים יש דילוג מרומז, שיש ליישם הבנה זו עבור כל הערכים בישר המספרים הזה. לדוגמה, אם תלמיד מקבל ישר מספרים עם המספר 10 מתחת לשנת אחת, והמספר 20 מתחת לשנת שאחריה, הרי שהמרחק שבין שתי שנתות אלה מייצג ערך של 10 יחידות. התלמיד צריך להבין שבשנת הבאה המסומנת במרחק שווה מהשנת הקודמת יבוא המספר 30 (איור 8).

איור 8: משימה להבנת הדילוג של 10



באופן דומה, אם על ישר מספרים מופיעה שנת באמצע המרחק שבין 10 ל־20, המספר שיופיע מתחת לאותה שנת יהיה 15 כי 5 שווה לחצי הדילוג של 10 (איור 9).

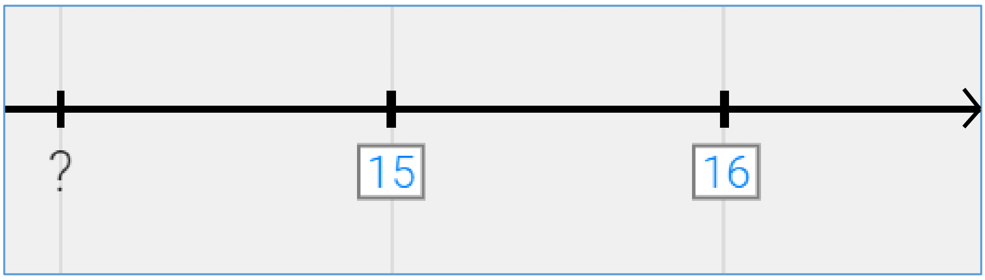
איור 9: משימה נוספת שמתמקדת בהבנת הדילוג



כאשר תלמידים מתבקשים למקם נקודה על ישר מספרים שבו מסומנות הנקודות 0 בקצה אחד ו־100 בקצה השני, חלקם לא תמיד מצליחים להגדיר כהלכה את גודל הדילוג. הם נוטים להתחיל לספור ביחידות בודדות ומתקשים לסמן את גודל הדילוג הנכון. השימוש בדילוגים של 2, 5 ו־10 מתפתח אצל הילדים בשלב מתקדם יותר. רק כאשר התלמידים מסוגלים להשתמש בדילוגים של 10 הם מתחילים להבין שהמרחק מ־0 ל־10 שווה למרחק מ־40 ל־50, וכך גם למרחק מ־130 ל־140 ומ־58 ל־68. בהגיעם לכיתה ד' התלמידים מסוגלים להרחיב את ההבנה שלהם על אודות מספרים ולזהות יחסים כאלה עד למיליון.

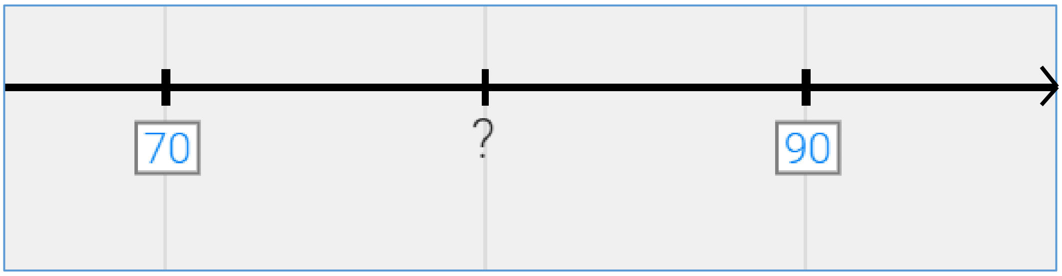
משימות שונות על ישר מספרים עוזרות לתלמידים לפתח את המודל המנטלי של דילוגים, ובכך להעמיק יותר את ההבנה על הקשרים בין המספרים. לדוגמה, משימה שבה לפני התלמיד ישר מספרים שבו מסומנות שלוש יחידות במרחק שווה, ובשתיים מהן רשומים ערכים והוא מתבקש למצוא את המספר החסר (איור 10).

איור 10: משימה של ספירה ברצף



משימות המשך עוסקות בדילוגים שונים ובמיקומים שונים עבור הערכים החסרים. למשל: נקודת האמצע שבין 70 ל־90 (איור 11), או בין 100 ל־200, או בין 0 ל־200. הצורך להגדיר בכל פעם דילוג אחר (10, 50, או 100 בהתאמה) מחזק את ההבנה של התלמידים על האפשרות לסמן מספרים על ישר המספרים בדילוגים שונים.

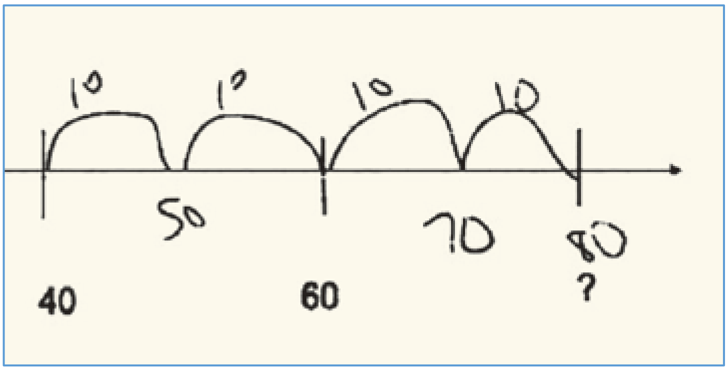
איור 11: מציאת נקודת האמצע בדילוג של 10



במשימה אחרת שבה התלמידים התבקשו למצוא את הערך של המספר שמופיע בשנת הבאה אחרי שתי שנתות שהמרחק ביניהן הוא 20 יחידות, תלמידה אחת נקטה אסטרטגיה שונה (איור 12). היא זיהתה שהמרחק בין 40 ל־60 שווה למרחק בין 60 למספר החסר. היא גם זיהתה

שניתן לחלק את המרחק בין 40 ל־60 לשני דילוגים של 10, והמשיכה למנות בדילוגים של 10 עד שהגיעה למספר החסר (80).

איור 12: מהו המספר הבא? הסבירו כיצד ידעתם



ניתן לתת משימות כאלה גם במספרים גדולים יותר או בשברים פשוטים ועשרוניים.

חשוב לתת לתלמידים משימות שמעודדות אותם לחשוב על הדילוג באופן גמיש. באמצעות משימות אלו יש לעודד את התלמידים במהלך הלמידה:

- לשאול את עצמם שאלות שמגבשות את הרעיונות שלהם על הדילוגים באמצעות משימות הכוללות הבנת היחס בין מספר נתון לבין הדילוג.
- להבין שניתן לסמן מספרים בדילוגים שונים על ישר המספרים, לקבוע את גודל הדילוג כאשר נתונים שני ערכים וניתן לקבוע את גדול הדילוג ביניהם.
- לשאול שאלות לפיתוח ההבנה בלימוד נושא זה, כגון: לפי איזה דילוג אנחנו מונים במשימה זו? כיצד המספרים שעל ישר המספרים הזה קשורים זה לזה?

לסיכום: לישר המספרים תפקיד חשוב בפיתוח ההבנה על קשרים בין מספרים. חשוב שכל התלמידים יפתחו הבנה מעמיקה של רעיונות המפתח שקשורים לישר המספרים. ככל שהידע של התלמידים על המספרים הולך וגדל, הם זקוקים להתנסויות רבות על ישר המספרים על אודות הקשרים בין המספרים. במיוחד יש למקד את התלמידים ברעיונות הגדולים שהוצגו קודם לכן. אותן שאלות על רעיונות המפתח צריכות להישאל גם כשלומדים על מספרים רציונליים ואי־רציונליים. ישר המספרים הוא כלי עוצמתי שיכול להעמיק את ההבנה של תלמידים במעבר מבית הספר היסודי לחטיבת הביניים.

סיכום מאמר 1 – שיחזור היחידה על ישר המספרים: משימות להרחבת הידע של תלמידי כיתה ד' על שברים – Cramer et al. (2019)

ישר המספרים הוא אחד מכמה ייצוגים שבהם נתקלים תלמידי בית הספר היסודי כאשר הם לומדים על שברים, ויש לו פוטנציאל להעמיק ולהרחיב את ההבנה שלהם על שברים שנוצרה מלכתחילה בעזרת מודלים אחרים. המחקר בדק את תרומת השימוש בישר המספרים שמרחיב ותומך ברעיונות מפתח על אודות שברים להבנות שנוצרו באמצעות מודלים אחרים והפוך: אילו הבנות שנוצרו באמצעות מודלים אחרים נדרשות כדי להבין את משמעות השבר כנקודה על ישר המספרים? הייחודיות של המחקר המוצג במאמר זה היא בבדיקת יכולת היישום בכיתה ד' של ממצאים שנמצאו במחקרים אחרים על תלמידים בוגרים יותר בכיתות ה'-ו'.

אחת המשמעויות של המספרים הרציונליים היא מידה, כלומר מרחקו של מספר רציונלי נתון מה־0 בהתאם לקטע היחידה שנבחר.[3] הייחודיות של ישר המספרים לעומת מודלים אחרים של שברים היא בכך שנדרשת התייחסות גם לייצוג המספרי של השבר וגם התייחסות למרחק שלו מ־0, ולמרחק בין שני שברים כלשהם. כמו כן, הוא מציג בבירור שהשבר (המצומצם) הוא מספר רציונלי יחיד בעל ערך ייחודי המתבטא כנקודה על הישר. הנקודה מייצגת את השבר גם כמספר ביחס למספרים אחרים וגם כמרחק מה־0, דבר שאינו בהכרח בולט דיו במודלים וייצוגים אחרים של השבר. הרעיון שמספר מתבטא במרחק מה־0 מוסיף פרשנות חדשה לסידור שברים הגדולים מ־0, בכך שהשבר הגדול יותר הוא זה שמרוחק יותר מה־0. ישר המספרים מרחיב גם את הרעיון של שברים שווים. שני שברים יוגדרו כשווים, אם הם ממוקמים על אותה נקודה בדיוק על ישר המספרים. מכל האמור לעיל, ישר המספרים הוא ייצוג חשוב להבנתם של שברים. ישר המספרים הוא כלי להבנת המושגים: קטע יחידה, יחסים בין מספרים שלמים ושברים, צפיפות המספרים הרציונליים (בין כל שני מספרים רציונליים יש אינסוף מספרים רציונליים) ושוויון (למרות שלכל מספר יש מקום ייחודי על הישר, ניתן למצוא לכל מספר רציונלי אינסוף ייצוגים מספריים על ידי הרחבתו ו/או צמצומו).

כדי שתלמידים בבית הספר היסודי יהיו מסוגלים להשתמש בישר המספרים באופן שיטתי וברור, עליהם להבין את רעיונות המפתח של מרחק וסדר:

- הקטעים על ישר המספרים מראים את המרחק בין שתי נקודות (מספרים) וניתן לחלק קטעים אלה או לחזור עליהם.
- השנת מסמנת את המרחק של המספר הנתון מה־0.
- נקודות (מספרים) על ישר המספרים מופיעות בסדר מסוים כך שהמספרים הולכים וגדלים בהתקדמות לכיוון החץ.
- לכל המספרים [הממשיים] יש מקום על הישר, אם כי לא חייבים להציג את כולם.

---

[3] ראו מאמר: מספרים רציונאליים במשמעות של מנה ומדידה

- שברים שווים נמצאים באותה נקודה על ישר המספרים.
- הרעיונות על אודות סדר המספרים ושברים שווים מאפשרים להשתמש בישר המספרים כאמצעי להשוואת מספרים.

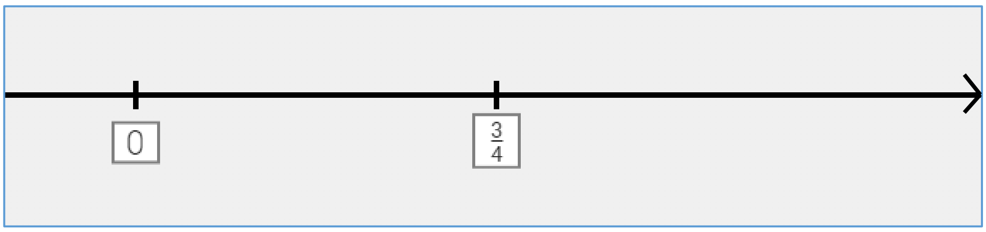
תלמידים המשתמשים בישר המספרים לייצוג שברים עלולים לגלות קשיים הבאים לידי ביטוי בצורה הבאה:

- קבלת ישר המספרים [הפיזי] כולו כשלם במקום ההבנה שקטע יחידה מגדיר את השלם.
- התייחסות לשנתות ולא לקטעים שביניהן כקובעים את גודל השבר.
- התעלמות מהמרחק של השנת מה־0.
- קושי להתעלם משנתות לא רלוונטיות המופיעות על הישר. למשל: מציאת הנקודה של $\frac{3}{4}$ על ישר שבו היחידה מחולקת לשמונה חלקים.

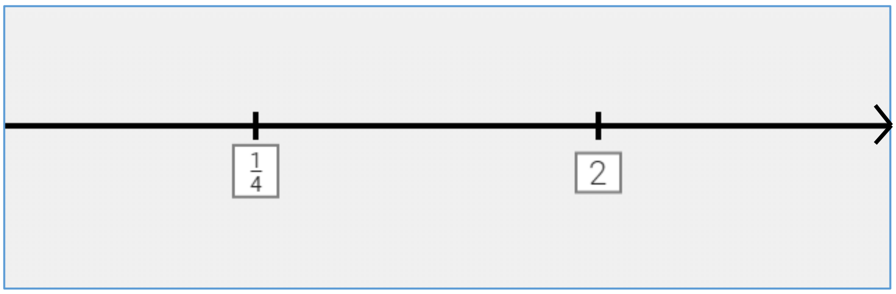
מחקרים מראים שלמרות קשיים אלה, בהינתן הוראה תומכת מתאימה, ישר המספרים הוא כלי יעיל לקידום ההבנה של תלמידים על ***אורך היחידה*** ו־***חלוקה שווה*** שהם "רעיונות גדולים" קריטיים להבנה של מספרים רציונליים. המחקר המוצג במאמר זה התמקד באופן מיוחד בהבנה כיצד רעיונות מפתח שהתפתחו בעזרת מודלים אחרים, מיושמים ומתפתחים במשימות מורכבות המשמשות במודל ישר המספרים. במחקר זה נבדק האופן שבו תלמידים בכיתה ד' חושבים ומיישמים רעיונות חשובים על אודות שברים בבואם לפתור משימות שעוסקות בשחזור קטע היחידה (איור 13).

איור 13: שתי דוגמאות למשימות של שחזור קטע היחידה

הצביעו על המקום של המספר 2 על ישר המספרים.



איפה נמצא המספר 1? איפה נמצא המספר 0?



במשימות של שחזור קטע היחידה מוצגים ישרי מספרים ובהם מסומנים שתי נקודות בערכים מספריים. התלמידים צריכים להבין שכל שנת מסמנת את מרחקה מה־0 ומתבקשים למצוא את מקומם על ישר המספרים של שבר או מספר שלם. משימות כאלה מאפשרות לתלמידים ליישם ידע קודם שיש להם על שברים במודלים אחרים, למודל חדש, שבתמורה מרחיב ותומך ברעיונות מפתח על אודות שברים. השימוש במשימות לא שגרתיות כאלה מתבסס על הרעיון שילדים מסוגלים ללמוד מתמטיקה על ידי פתרון בעיות. בִּמְקום הוראה ישירה התלמידים קיבלו משימות שהעסיקו אותם בפתרון בעיות ובשיתוף הרעיונות שהם פיתחו.

שאלות המחקר היו:

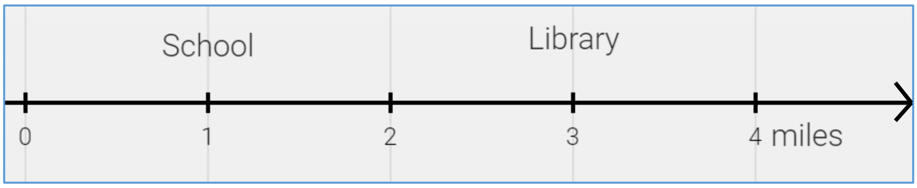
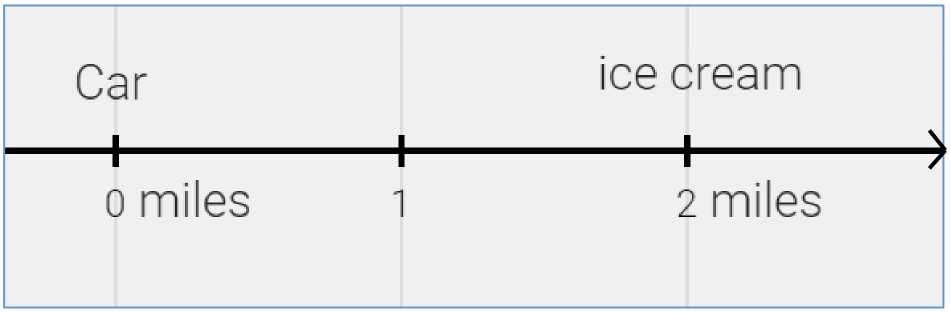
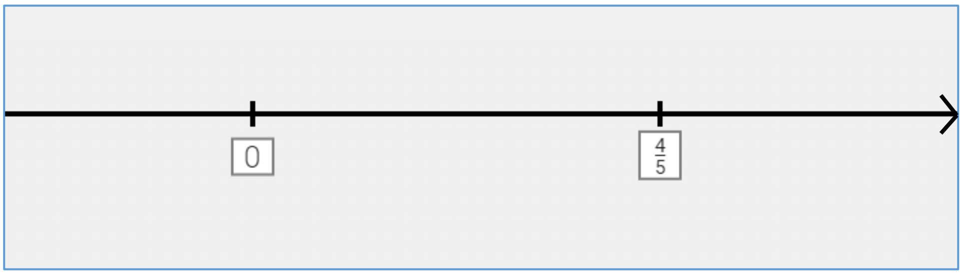
1. כיצד תלמידים בכיתה ד' מפרשים ופותרים משימות של שחזור קטע היחידה על ישר המספרים?
2. באילו אופנים מיישמים תלמידי כיתה ד' את הידע הקודם שלהם על רעיונות מפתח בשברים כדי לפעול מתוך תובנה במשימות של שיחזור קטע היחידה?

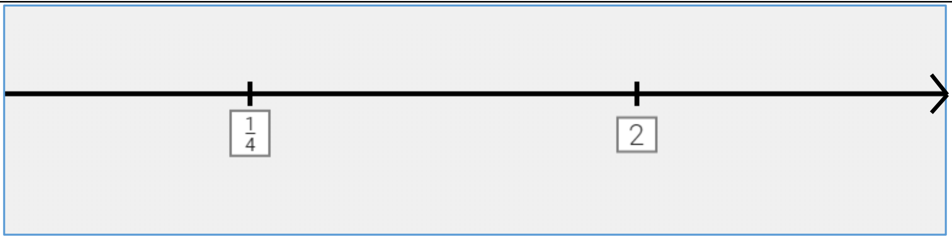
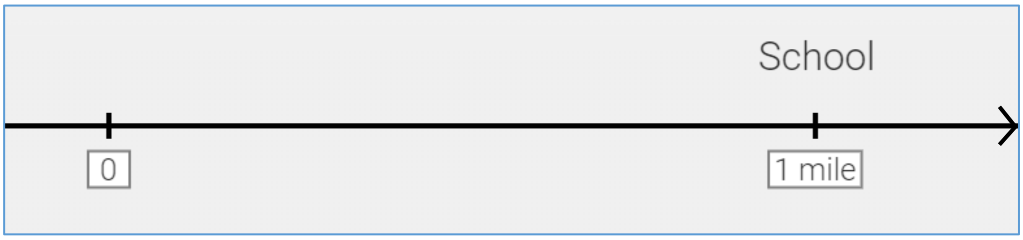
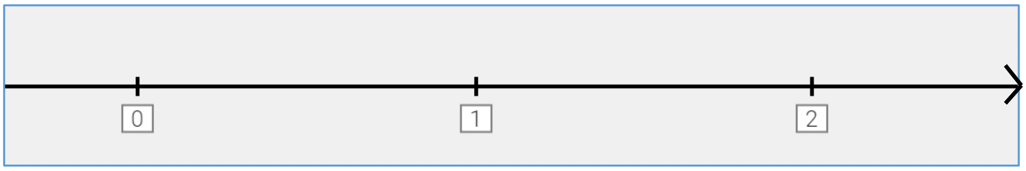
המחקר נערך במסגרת ניסוי של יחידת לימוד בת שבעה שיעורים שנלמדה בשלוש כיתות ד' מקבילות בבית ספר עירוני בארה"ב. לפני שנחשפו ליחידת הלימוד המוצגת בטבלה 1, למדו התלמידים במשך 23 שיעורים את הנושאים הבאים: השבר כחלק משלם, מושג השלם, סדר, שוויון וחיבור וחיסור בעזרת המחשה. הם למדו בעזרת המודלים של: עיגולים, קיפול רצועות נייר ודסקיות. החשיפה הראשונה הייתה למודל העיגול שבאמצעותו נלמדו כל הנושאים, ולאחר מכן נוסף בכל פעם מודל חדש שבו ביססו את הנלמד קודם לכן. בהמשך נלמד גם מודל ישר המספרים שבו התלמידים יכלו לפרש מחדש רעיונות על המשמעות של השבר כ- $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, מושג השלם, חלוקה, סדר, ושוויון כפי שהם באים לידי ביטוי במודל החדש.

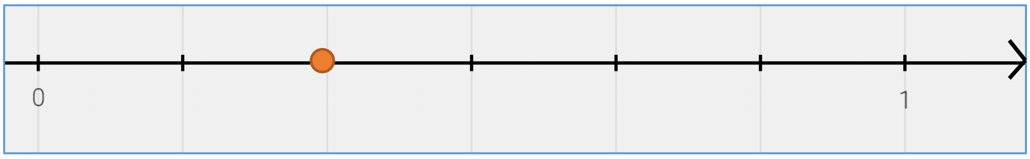
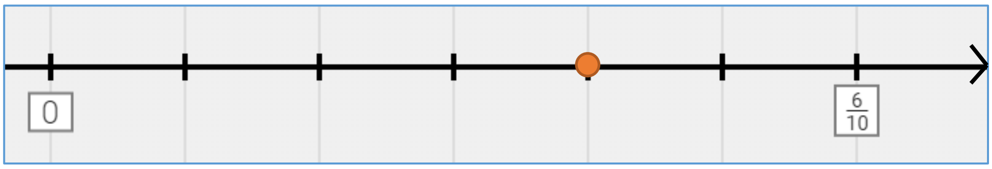
מבנה השיעורים ביחידת הלימוד של הניסוי התבסס על מודל פתרון בעיות שבו כל שיעור כולל את השלבים הבאים:

- בעיית פתיחה ודיון קצר המציגים את סוג המשימות ומגדירים את מוקד השיעור;
- עבודת עמיתים בזוגות או בקבוצות קטנות על מספר משימות מדורגות מהקל לקשה. העבודה אומנם משותפת אבל כל תלמיד מתעד בנפרד את האסטרטגיות שלו לפתרון המשימות. המורה עוקב אחר עבודת התלמידים ובוחר משימות לדיון בהמשך ואסטרטגיות של תלמידים שיוצגו בדיון;
- דיון מסכם שמציג את האסטרטגיות המגוונות שהעלו התלמידים, ובתוך כך ניתוח והשוואה בין הגישות השונות שהוצגו. במסגרת הדיון עולים רעיונות מפתח בליווי הסבר מפורט על ידי התייחסות לקשיים ולתפיסות השגויות שהתעוררו;
- משימה סוגרת לעבודה עצמית, אשר משמשת גם להערכה מעצבת.

טבלה 1: דוגמאות למשימות שניתנו במהלך יחידת הלימוד על ישר המספרים

שיעור מספר	דוגמה למשימה	מטרת הלמידה
1	המרחק מבית הספר לספרייה הוא 3 מייל. דני הלך לקראת הספרייה מרחק שאורכו כ- $\frac{7}{8}$ של מייל לפני שאבא שלו אסף אותו במכוניתו. האם תוכלו להעריך היכן יהיה $\frac{7}{8}$ של מייל על ישר המספרים?  	הערכת מיקום ושיום נקודות על ישר המספרים
2	המרחק בין המכונית לדוכן הגלידה הוא 2 מייל. גל הלך $\frac{1}{4}$ מייל ופגש חבר. סמנו על ישר המספרים את הנקודה שבה גל פגש את חברו.  	יצירת ישר מספרים כדי לסמן שברים
3	חגית שילמה 8 שקלים עבור כרטיס לסרט, שהם שווים ל- $\frac{4}{5}$ מהתקציב שלה. קבעו מה היה גודל התקציב שלה? השתמשו בישר המספרים כדי לפתור בעיה זו.  	שחזור קטע היחידה על ישר המספרים
4	קבעו איפה נמצא המספר 1? איפה נמצא המספר 0? הסבירו כיצד ידעתם.	שחזור קטע היחידה על ישר המספרים

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>מרק אמר ש- $\frac{3}{4}$ ו- $\frac{11}{12}$ שווים משום שבשני השברים חסר חלק אחד להשלים לשלם. האם תשובתו של מרק נכונה? השתמשו בישר המספרים להסבר תשובתכם.

</td><td>סידור שברים על ישר המספרים</td></tr>
<tr><td>6</td><td>השתמשו בישר המספרים כדי להראות ש- $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$.


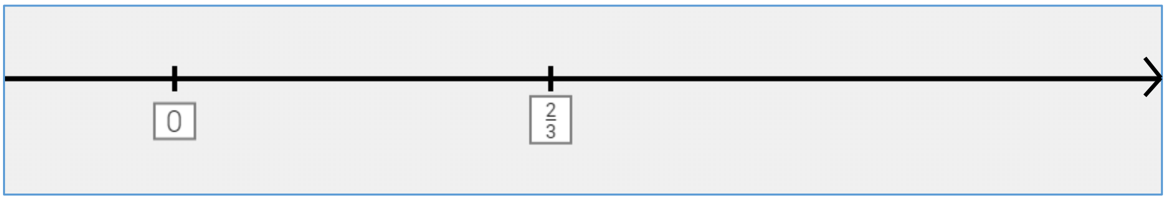
השתמשו בישר המספרים כדי למצוא כמה שלישים שווים ל- $\frac{2}{6}$.
הסבירו כיצד מצאתם זאת.

</td><td>זיהוי שברים שווים על ישר המספרים</td></tr>
<tr><td>7</td><td>נתונים השברים הבאים:
$\frac{5}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}$.
איזה מהשברים מתאים לנקודה המסומנת על ישר המספרים?

</td><td>זיהוי שברים שווים על ישר המספרים</td></tr>
</table>

תוצאות:

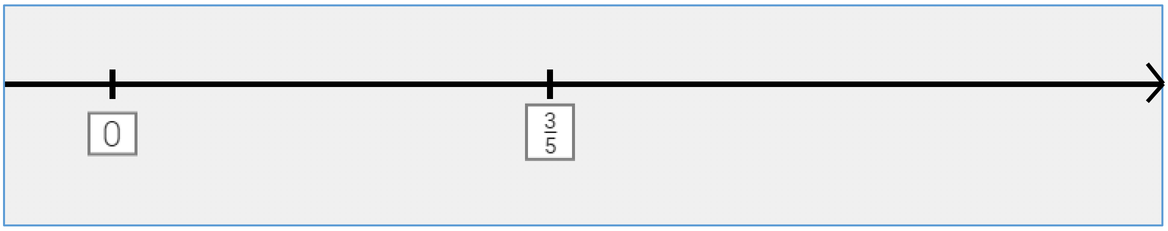
כדי להשיב על שאלות המחקר ממצאי המחקר מתמקדים בארבע משימות של שחזור קטע היחידה אשר ניתנו בריאיון אישי לכל תלמיד בסיום יחידת הלימוד (איור 14).

איור 14: משימות ההערכה שניתנו בריאיון האישי

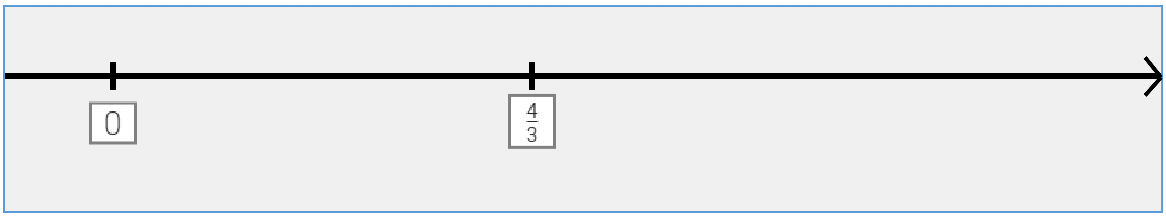
משימה א: סמנו את המקום של המספר 2 על ישר המספרים.



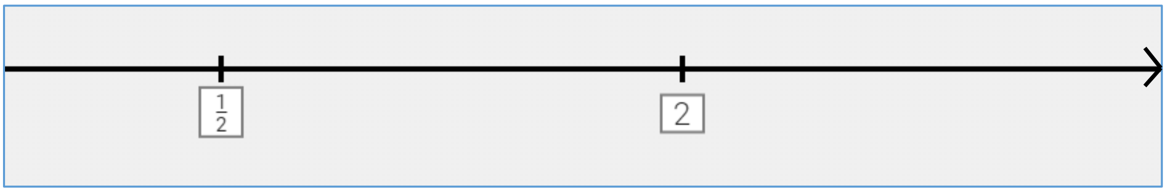
משימה ב: סמנו את המספר $1\frac{1}{5}$ על ישר המספרים. הסבירו כיצד קבעתם.



משימה ג: סמנו על ישר המספרים שלפניכם את המספר 1 (אם עונה נכון, בקשו גם לסמן המספר $\frac{1}{2}$).



משימה ד: סמנו על ישר המספרים שלפניכם את המספרים 1 ו־0.

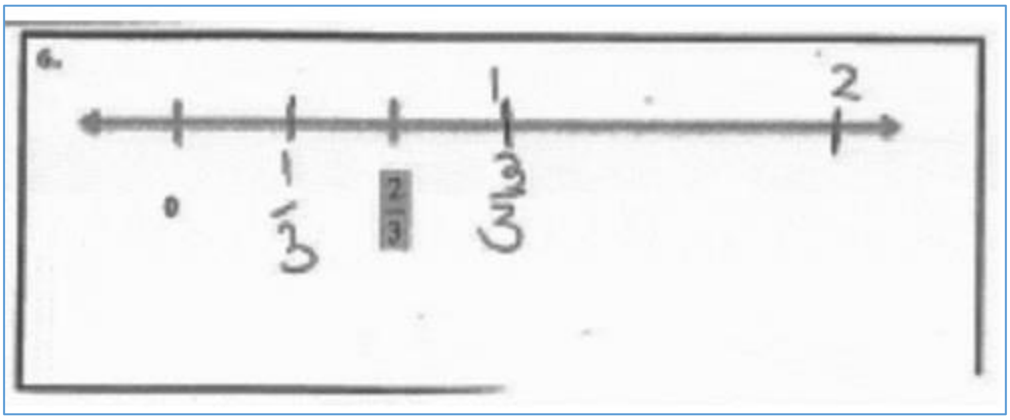


משימה א:

במשימה זו התבקשו התלמידים למצוא את המספר 2 על ישר מספרים שבו נתונות הנקודות 0 ו־$\frac{2}{3}$. מתוך 16 התלמידים שרואיינו, 14 ניגשו למשימה על ידי מציאת $\frac{1}{3}$ תחילה לפני שהם ממשיכים לכיוון ה־1. לעומת זאת, תלמידה אחת השתמשה בעקביות במהלך הראיונות באסטרטגיה של אומדן מבלי לחפש את שבר היחידה. למרות שהאומדן שלה היה מתאים, היא התקשתה להסביר כיצד הגיעה לתשובתה. תלמידה אחרת שחזרה את היחידה $\frac{2}{3}$ לאורך ישר המספרים עד שהגיעה ל־2.

דוגמאות להסברים שנתנו תלמידים:

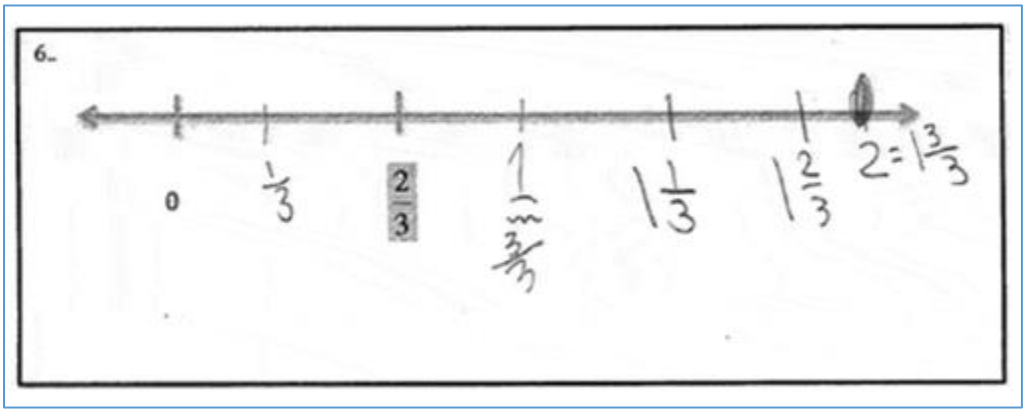
- **ריאן**: "אם אתה חוצה את זה לחצי אז זה $\frac{1}{3}$. אחרי זה תוסיף את זה ($\frac{1}{3}$) אחרי ה־$\frac{2}{3}$ ותקבל $\frac{3}{3}$ שהם 1. פעמיים 1 זה 2". ניתוח הסבר זה מעיד על הבנה מעמיקה בנושא השברים. תחילה התייחס ריאן למספר 2 שמוצג במונה של $\frac{2}{3}$ לחלוקת המרחק ממנו ועד ל־0 לשני חלקים שווים על ידי שימוש במושג חצי, אבל עם ההבנה שזה בעצם שליש. כלומר, הוא לא התעלם מהמכנה של המספר. לאחר מכן הוא חזר על הקטע שאורכו $\frac{1}{3}$ בהמשך לנקודה $\frac{2}{3}$ וקיבל $\frac{3}{3}$ שאותו כינה שלם. כלומר התלמיד השתמש בידע שלו על שוויון שברים, ולבסוף דרך הנקודה 1 הגיע ל־2 על ידי חזרה על קטע היחידה מבלי להזדקק עוד לשברים.



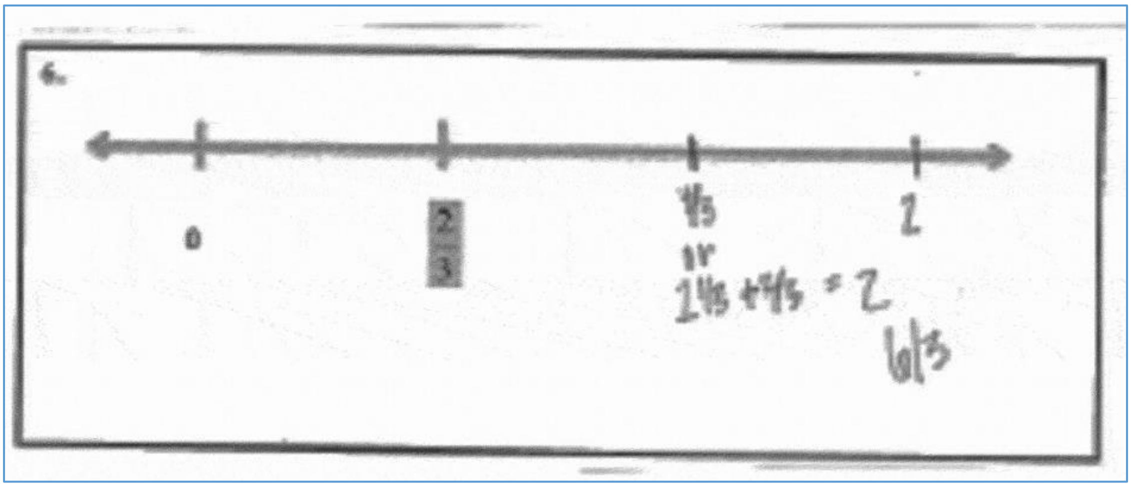
בעוד שחמישה תלמידים נוספים פעלו כמו ריאן בדילוג מ־1 ל־2, רוב התלמידים חזרו על הקטע שאורכו $\frac{1}{3}$ עד שהגיעו ל־2.

- **אריאנה**: "ראיתי $\frac{2}{3}$ והלכתי אחורה וראיתי 0, אז שמתי ביניהם את $\frac{1}{3}$. לקחתי את הקטע שאורכו $\frac{1}{3}$ והמשכתי אחרי ה־$\frac{2}{3}$ והגעתי ל־$\frac{3}{3}$, המשכתי עוד קטע כזה והגעתי ל־$1\frac{1}{3}$. עוד קטע

זה $1\frac{2}{3}$ והקטע הבא יוביל ל-$1\frac{3}{3}$, אבל זה גם שווה ל־2 יחידות". האסטרטגיה של אריאנה מבוססת על ספירה הדילוגים של $\frac{1}{3}$ לאורך ישר המספרים עד שמצאה את 2. היא הקפידה על קטעים שווים בין השנתות וציינה את השוויון של השברים עבור 1 ו־2.



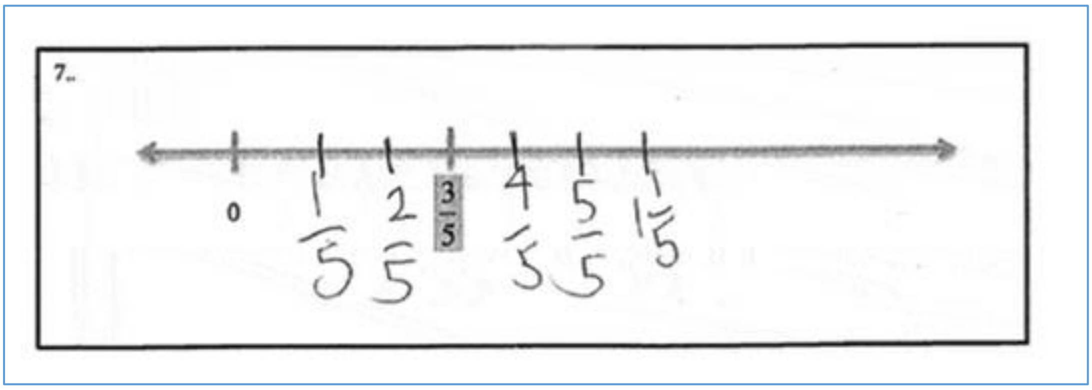
- **לינה**: "טוב, אני יודעת שפעמיים $\frac{2}{3}$ זה $\frac{4}{3}$ וזה קצת יותר מ־1 וזה מכפיל את זה עד כאן, וזה יוצא $\frac{4}{3}$ או $1\frac{1}{3}$ ואז עוד אחד כזה מגיע לשם וזה יוצא 2 כי $1\frac{1}{3}$ ועוד $\frac{2}{3}$ שווה 2."



האסטרטגיות שהציגו התלמידים מעידות על הבנת משמעות המונה והמכנה בשבר (חילקו את הקטע לפי המונה וכינו כל חלק לפי המכנה), שימוש בשברים שווים והבנת הצורך בחלוקה שווה על ישר המספרים.

משימה ב:

במשימה זו התלמידים התבקשו למצוא את המיקום של $1\frac{1}{5}$ על ישר המספרים שבו נתונים המספרים 0 ו-$\frac{3}{5}$. 15 תלמידים מתוך 16 שהשתתפו במחקר, ביצעו זאת בהצלחה. האסטרטגיה השכיחה ביותר הייתה למצוא קודם את שבר היחידה. תלמידה אחת אמדה את המיקום מבלי לבצע חלוקה של הקטע. האומדן היה נכון, אך היא לא ידעה להסביר את מה שעשתה. מבין התלמידים שמצאו את שבר היחידה תחילה תשעה דיברו במפורש על חלוקת הקטע בין 0 ל-$\frac{3}{5}$ לשלושה חלקים שווים לפני שהם כינו את החלקים 'חמישיות'. תלמידים אלה התייחסו למונה של השבר ($\frac{3}{5}$) חילקו את הקטע הנתון לשלושה חלקים שווים. הם בעצם הבינו שכל חלק הוא חמישית (המכנה של השבר $\frac{3}{5}$) מקטע היחידה על ישר המספרים. שישה תלמידים השתמשו באסטרטגיה של מנייה כדי לחלק את המרחק בין 0 ל-$\frac{3}{5}$ לשלושה קטעים שאורכם $\frac{1}{5}$ ואז מנו קדימה עוד חמישיות עד שהגיעו ל-$1\frac{1}{5}$.



לינה השתמשה שוב באסטרטגיה הקודמת שלה והסבירה שמאחר ש-$1\frac{1}{5}$ שווה ל-$\frac{6}{5}$ צריך פשוט להכפיל את הקטע שאורכו $\frac{3}{5}$ כדי להגיע ל-$\frac{6}{5}$.

משימה ג:

במשימה זו התלמידים התבקשו למצוא על ישר המספרים את המיקום של המספר 1, כאשר נתונות הנקודות 0 ו-$\frac{4}{3}$. 13 מתוך 16 התלמידים השיבו תשובה נכונה על ידי זיהוי שבר היחידה. האסטרטגיות לביצוע המשימה היו דומות לאלו ששימשו את התלמידים במשימות הקודמות. להלן ההסבר של **בטי**: "אני יודעת ש-1 זה לפני השנת הזו כי הוא $\frac{4}{3}$. ו-$\frac{4}{3}$ זה שבר גדול מ-1

השווה ל- $1\frac{1}{3}$. אז אני אחרי ה־1. אז אני צריכה לחלק לארבעה חלקים שווים. לחלק לחצי ועוד פעם לחלק לחצי (מסמנת את השנתות), צריך למנות שלוש כי הערך (של כל קטע) הוא $\frac{1}{3}$, אז יש לי 1,2,3, אז כאן זה 1".

3 תלמידים התקשו במשימה זו שנושאה האורך מ־0 עד $\frac{4}{3}$, למרות שבמשימות הקודמות עם שברים קטנים מ־1 הם פתרו כהלכה. 2 מתוכם הבינו ש- $\frac{4}{3}$ >1 ולכן פשוט סימנו שנת משמאל אליו מבלי לחלק את הקטע.

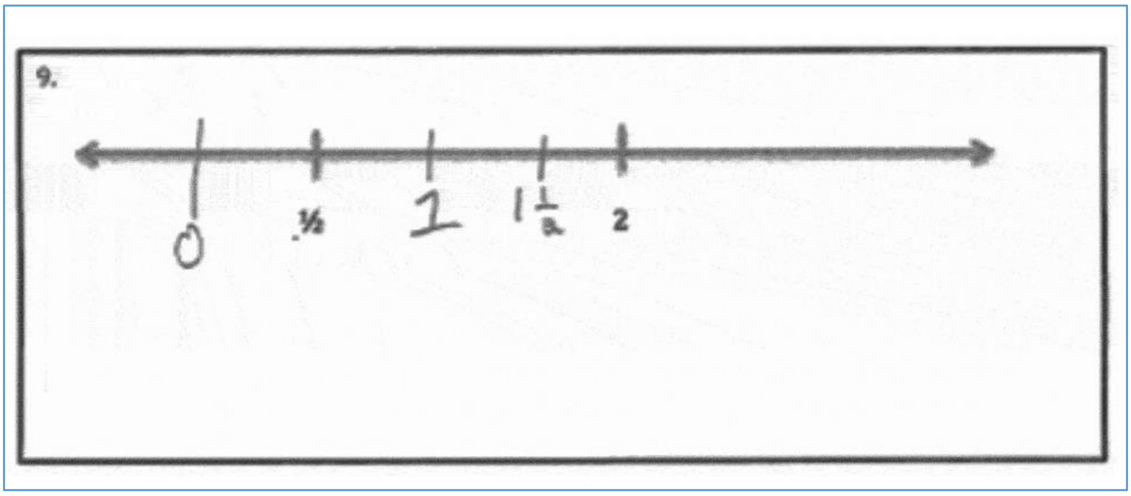
אריאנה פיתחה אסטרטגיה מעניינת. הנקודה $\frac{4}{3}$ בלבלה אותה ולכן היא מחקה את המספר וכתבה במקומו 1. לאחר מכן היא חילקה את הקטע בין נקודה זו וה־0 לשלושה חלקים שווים, הוסיפה עוד חלק אחד כזה אחרי המספר 1 ורשמה מתחת לשנת שלו $\frac{4}{3}$.

משימה ד:

במשימה האחרונה התלמידים התבקשו למקם את 0 ו־1 על ישר מספרים שבו מסומנות הנקודות $\frac{1}{2}$ ו־2. מתוך 16 התלמידים 13 הצליחו במשימה זו והראו יכולת לפעול בגמישות עם היחידה בחלוקה שווה ובשיום הנקודות על הישר.

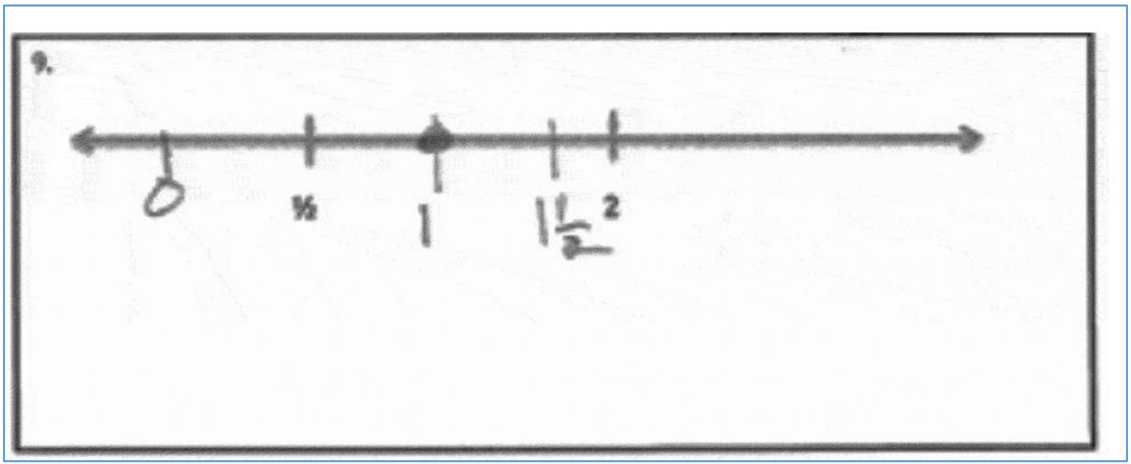
לביצוע משימה זו היו שלוש אסטרטגיות:

- לחלק את הקטע בין $\frac{1}{2}$ ל־2 לשלושה חלקים שווים, ולרשום מתחת לשנתות שברים שהמכנה שלהם 2. לאחר מכן להעתיק את המרחק בין $\frac{1}{2}$ ל־1 למרחק בין $\frac{1}{2}$ ל־0 ולמקם את הנקודה 0.



18

- לחלק את הקטע בין $\frac{1}{2}$ ל־2 לשלושה חלקים שווים ואורכו של כל קטע כזה יהיה $\frac{1}{2}$. למיקום ה־0 השתמשו באסטרטגיה שצוינה קודם לכן.
- לאמוד את המיקום של 0 ושל 1, ללא הקפדה על חלוקה שווה של הקטעים בין השנתות.



סיכום ומסקנות:

המחקר המוצג בסיכום זה [1] בדק כיצד למנף את ישר המספרים ככלי להרחבה ולהעמקת ההבנה של תלמידים על אודות רעיונות מפתח בשברים, אשר פותחו לפני כן באמצעות מודלים מוחשיים יותר. החוקרים מאמינים שכאשר התלמידים מטמיעים מושגים לתוך מודל חדש, הם מפרשים את המושגים מחדש ומעמיקים יותר את ההבנתם. ממצאי המחקר התייחסו רק למשימות של שחזור קטע היחידה, אך יחידת הלימוד כללה משימות שונות.

לצורך ביצוע המשימות של שחזור קטע היחידה, התלמידים ידעו:

א. לפרש את המידע על המונה והמכנה של השבר כדי למצוא את שבר היחידה בשתי דרכים שונות;

ב. לארגן חלוקה שווה ולבצע חזרתיות ברמות שונות של יעילות;

ג. לזהות את השברים השווים הנדרשים לפתרון הבעיות;

ד. להשתמש בידע הקודם שלהם על שברים ביחס למספרים אחרים על ישר המספרים.

האסטרטגיות שבהן השתמשו התלמידים בבואם לבצע משימות מסוג שחזור קטע היחידה על ישר המספרים סיפקו תובנה כיצד תלמידים מפרשים את משמעות המונה והמכנה של השבר. בצעד הראשון שהתלמידים נקטו לשם מציאת שבר היחידה בכל ארבע המשימות עלו שתי אסטרטגיות שכיחות:

1. אסטרטגיית מנייה שבה מונים את כמות שברי היחידה של השבר הנתון ומחלקים את הקטע לחלקים שווים בהתאם לכך, ואז מבצעים חזרתיות של שבר היחידה שנוצר

בעקבות חלוקה זו, עד להגעה למיקום של המספר הנדרש. זוהי אסטרטגיה אדיטיבית (חיבורית).

2. אסטרטגיה שמתחילה מחלוקת הקטע לקטעים שווים לפי גודל המונה וכינוי כל חלק בהתאם. למשל: קטע בין 0 ל-$\frac{3}{5}$ יחולק לשלושה חלקים שווים, ואז כינוי כל חלק שנוצר לפי המכנה, כלומר: כל חלק הוא בעצם חמישית. התלמידים ראו את $\frac{3}{5}$ כ-$\frac{1}{5}\times 3$. אסטרטגיה זו מציגה חשיבה כפלית.

רעיון נוסף שהודגש בעקבות משימות אלה הוא חשיבות החלוקה לקטעים שווים. התלמידים נעזרו ברוחב האצבעות שלהם כדי לבצע חזרתיות של שברי היחידה במרווחים שווים לאורך הישר. דרך אחרת הייתה חצייה חוזרת של הקטע כאשר נדרשה חלוקה לארבעה חלקים שווים. הבנה קודמת על שוויון שברים תמכה גם כן ביכולת של התלמידים לבצע את המשימות, כמו למשל היכולת למצוא את הנקודה $1\frac{1}{5}$ מתוך הבנה ש- $\frac{6}{5}=2\times\frac{3}{5}$ ולכן לא צריך למצוא את שבר היחידה, אלא פשוט לחזור על המרחק מ־0 ל-$\frac{3}{5}$ פעם נוספת. בכל פעם שתלמידים סימנו על אותה השנת שני מספרים (נכונים) הם הראו את הבנתם על אודות שברים שווים. תלמידים גם השתמשו בידע על אודות סדר וגודל שברים על הישר כדי להעריך, למשל ש-$\frac{4}{3}$ גדול מ־1.

נוסף על התרומה של המשימות שניתנו על ישר המספרים להרחבה ולהעמקת ההבנה של תלמידים על אודות רעיונות מפתח בשברים, ניסוי הלמידה תרם גם בתחומים הבאים:

- שיטת ההוראה אפשרה לתלמידים להתמודד בעצמם עם משימות מורכבות ולעסוק בחשיבה והנמקה באופן עצמאי או עם עמיתים ללא צורך בהוראה ישירה;
- לתלמידים ניתנו הזדמנויות לשתף זה את זה באסטרטגיות הפעולה שלהם, להשוות - להסביר את דרך החשיבה שלהם;
- ההסתמכות על הידע שנרכש כאשר התלמידים למדו על שברים בעזרת מודלים שונים סייעה להם להתמודד עם משימות במודל ישר המספרים, גם כאשר הידע הקודם לא היה לגמרי מבוסס אצל כולם. לא ברור אם התלמידים היו מסוגלים לעשות זאת ללא הידע הקודם, אך זה כבר נושא למחקרים הבאים.

ביבליוגרפיה לשני החלקים:

1. Cramer K., Monson D., Ahrendt S., Wyberg T., Pettis C. & Fagerlund C. (2019). Reconstructing the unit on the number line: Tasks to extend fourth grader's understandings. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(3), 180-194.
2. Lannin J.K., van Garderen D. & Kamuru J. (2020). Building a Strong Conception of the Number Line. *Mathematics Teacher: Learning & Teaching PK-12*, *113*(01), 18-24.
3. Liu K. (2013). Toward a Conceptual Understanding of Fractions Using the Number Line Model. *Journal of the California Mathematics Project*, *6*, 45-53.
4. Martinie S.L. & Bay-Williams J.M. (2003). Investigating Students' Conceptual Understanding of Decimal Fractions Using Multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(5), 244-247.
5. Shaughnessy M.M. (2011). Identify Fractions and Decimals on a Number Line. *Teaching Children Mathematics*, *17*(7), 428-434.
6. משרד החינוך – האגף לתכניות לימודים (2006). תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים.

מאמרים קשורים:

1. מספרים רציונליים במשמעות של מנה ומדידה
2. טיול מוקדם בין אפס לאחד
3. מודל העוגה המלבנית – חילוק שברים