

כמו שעון: כיצד כלים למדידת זמן מתווכים פתרון בעיות

וחושפים הבנה

Clock Work: How Tools for Time Mediate Problem Solving and Reveal Understanding

מאת: Darrell Earnest, University of Massachusetts, Amherst
הופיע ב: Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 48, No. 2,
191–223, 2017

מאמר זה מדווח על הבנת נושא ה"זמן" בקרב תלמידי בית ספר יסודי, בהקשר של שימוש בעזרים ידניים נפוצים ומערכות סימון מוכרות. 72 תלמידים בכיתה ב' ו-72 תלמידים בכיתה ד' השתתפו בראיונות שנושאים פתרון בעיות, בהם נעשה שימוש בשעונים שונים. ממצאים כמותיים חשפו שביצועי התלמידים היו שונים באופן משמעותי כתלות בכלי שעמד לרשותם. במאמר מוצגים חקרי מקרה תיאוריים של שלושה תלמידי כיתה ד. בחקרי מקרים אלה התלמידים הדגימו מיומנות במוסכמות הקשורות לנקודות ציון של המרות מספריות בין שעות ודקות וספירת סכומים של 5 כדי להתקדם בדקות בין מספרי השעון, אולם בפועל הדגימו התלמידים רק מיומנויות חלקיות בנוגע לקשר הבלתי נפרד בין שעות ודקות. לסיום, נידונות השלכות תאורטיות והשלכות הנוגעות לאופן בו מטופל ומועבר נושא הזמן במסגרת תכנית הלימוד.

מילות מפתח: זמן שחלף; מתמטיקה ביסודי; ייצוגים; חשיבת תלמידים; זמן

"זמן", נוסף לכך שהוא עומד בבסיס היבטים מחיי היום-יום, הוא חלק מהותי בחקירות מדעיות רבות של האופן בו דברים עובדים: מקביעת מהירות ועוצמת פגיעה בתופעות פיזיקליות ועד למסלול ההקפה של כדור הארץ וסיבובו. לכן הוא מרכיב, נרמז על פי רוב, של תכנים לימודיים רבים המתמקדים באלגברה ובמתמטיקה של שינוי (ראה Yerushalmy & Shternberg, 2005). אולם, למרות הרלוונטיות הגדולה של נושא ה"זמן" לחיי היום יום ולתכנים מגוונים הנלמדים בבית הספר, תלמידים רבים מתקשים בהבנתו (Kamii & Russell, 2012; Williams, 2012). למרות

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

התמקדות מפורשת בנושא הזמן בבית הספר היסודי במגוון של מסמכים המגדירים סטנדרטים (תקנים) הוראתיים (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000; National Governors Association [NGA] Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [CCSSO], 2010), קיים מחקר שיטתי מועט הבוחן נושא זה. למעשה, חוקרים זיהו את מושג הזמן, כאחד ממערכות הסמלים המתמטיים הנלמדות במידה המועטה ביותר (Burny, 2012; Kamii & Russell, 2012; Valcke, & Desoete, 2009; Friedman & Laycock, 1989), כאשר בשני העשורים האחרונים פורסמו רק מחקרים אמפיריים מועטים על למידת זמן. מוקדם יותר, נחקרו מאפייניהם הפסיכולוגיים וההתפתחותיים של קשרים הנוגעים לזמן, אולם באופן נפרד מהיחידות הסטנדרטיות של שעות ודקות (למשל Piaget, 1969; Richards, 1982). במאמר זה אני בוחן פתרון בעיות הקשורות ל"זמן שחלף" בהקשר לשעון אנלוגי ודיגיטלי, בכדי להבין את ההצלחות והאתגרים שחווים ילדים כאשר הם מתמודדים עם נושא הזמן ביחידות סטנדרטיות.

הנחתי היא, שהכלים העומדים לרשות הילדים הם, בפועל, בעלי יכולות תיווך שונות של חשיבתם ושל יכולות פתרון הבעיות של הילדים. כתוצאה מכך, גישות הפתרון השונות שידגימו תלמידים בהקשר של שימוש בכלים שונים, עשויות לספק תיאור מגוון ולכן מקיף יותר של ההצלחות והאתגרים שהם חווים בנוגע ליחידות הסטנדרטיות.

למרות נוכחותו הרווחת של זמן בחיי היום-יום שלנו, זמן איננו וודאות אונטולוגית (קיומית); במילים אחרות, הזמן לא פשוט "נמצא שם". להיפך, יחידות הזמן הינן המצאה אנושית שצמחה מתוך היסטוריה חברתית ארוכה של חדשנות טכנולוגית, כאשר חקירה מדעית (המחזור של יום או שנה כיחידת זמן) ומתמטיקה (חלוקת היום לאינטרוולים, מרווחים, שווים) משמשים הכלים העיקריים לניתוח. למרות ששיגרות תרבותיות מאפשרות לנו לחשוב על זמן ביום באופן בלתי תלוי ממידה או משך – למשל, 3:00 יכול להיות מיוחס באופן שגור יותר לאירוע כגון סיום יום הלימודים מאשר למשמעותו המתמטית של שלוש השעות שחלפו מאז 12:00. אלה יחידות סטנדרטיות לביטוי הזמן והן מושרשות על עקרונות מתמטיים של מדידה (Kamii & Long, 2003; Piaget, 1969). על אף שתפקידו הבסיסי של הזמן הוא מדידה, זמן הוא רכיב כה שכיח בחיינו, עד כדי כך שההצמדה של יחידות מידה לתיאורו עלולה להיות מוגדרת כמובנת מאליה או לא רלוונטית, שלא בצדק.

כמסגרת למחקר, אסקור תחילה מחקרים הקשורים להבנה של זמן בקרב ילדים. לאחר מכן, אציג מסגרת תיאורטית סוציו-תרבותית להתפתחות הקוגניטיבית הדרושה להבנה של זמן, אשר קשור באופן בלתי נפרד לתכונות החומריות של הכלים הזמינים לחישובו.

כלים אנלוגיים ודיגיטליים וההדדיות בינם ובין 'זמן שחלף'.

כמו בתחומים מתמטיים רבים, זמן מתואר במערכות ייצוגיות המשקפות מוסכמות מקובלות כמו גם עקרונות מתמטיים מהם נגזרה התנהגות המערכת. בהלימה עם Kamii ו-Russell (2012), אני רואה את השקילות בין שעות ודקות כמוסכמה חברתית ולא כנגזרת מתמטית: בשלב כלשהו בהיסטוריה, קבלנו את השקילות הזו כאמת. בשונה ממספרים שקולים כגון $1/2$ ו- $2/4$ שחולקים את אותו המיקום על ציר המספרים, נוכל לחשוב על שעה אחת ו-60 דקות כנקודות על שני צירים נפרדים שהותאמו זו לזו. כתוצאה מהמוסכמה החברתית לתאם ביניהם, המרות נוספות מתאפשרות מהשקילות בין שעה אחת ו-60 דקות, כגון המרה בין $1/2$ שעה ו-30 דקות.

האופן שבו אנחנו מציינים זמן ביום, הוא בהתייחס לשתי היחידות השונות אך הקשורות האלה, כאשר כל אחת מבטאת את משך הזמן שחלף מחצות הליל או חצות היום (שעות) או מקיצה של שעה (דקות). חשיבה המשלבת שעות ודקות כרוכה בפעילויות של תיאום בין יחידות (Steffe, 2001, 1994), או "הפעילות המנטאלית של פיזור יחידה מורכבת על פני רכיבים של יחידה מורכבת אחרת" (Steffe, 1992, p. 279). תיאום בין יחידות מצריך עבודה עם מושגים של שברים (למשל Hackenberg & Tillema, 2009; Izsák, Jacobson, de Araujo, & Orrill 2012) וחשיבה אלגברית (למשל Hackenberg, 2013).

למרות שמחקר על הבנת נושא הזמן הוא מוגבל, תיאום היחידות שעומד בבסיסו – למשל, הידיעה כי עבור השעה 4:50 ה-4 וה-50 משקפים יחידות שונות אשר ביניהן קיים קשר כפלי המיוחס ליחידות שהן מתואמות אך נפרדות – צוין כאתגר המרכזי בפירוש הזמן שמורה שעון אנלוגי (ראה Williams, 2012). אתגר מרכזי נוסף הוא הצורך בהרכבה ופירוק של שעות ודקות כדי לפתור בעיות של 'זמן שחלף' באופן בלתי תלוי בזמינות של שעון מסוג מסוים (Kamii & Russell, 2012).

שעונים אנלוגיים ודיגיטליים

ישנם שני כלים עיקריים לקריאת זמן: שעונים אנלוגיים ודיגיטליים. בימינו, כמעט בכל כיתה מוצג אחד מהם או שניהם. למרות שכל אחד מהם יכול לתאר את הזמן ביום באופן מדויק, ולכן עבור חלק מהמשתמשים שניהם יחשבו שקולים, כל אחד מהם משקף יחידות באופן שונה – נקודה עליה ארחיב בהמשך. אולם, מערכת החינוך מגדירה ציפיות שקולות מתלמידים עבור שימוש בשעונים דיגיטליים ואנלוגיים (NGA Center for Best Practices & CCSSO, 2010). בכיתה א', מצופה מתלמידים לשלוט בקריאת שעות וחצאי שעות בשני סוגי הייצוגים-דיגיטלי ואנלוגי (standard 1.MD.3 "קראו וכתבו בשעות וחצאי שעות בשימוש בשעונים אנלוגיים ודיגיטליים", p. 16), בעוד שבכיתה ב' מצופה מהם לשלוט בזמנים עד כדי רמת דיוק של 5 דקות בשני ייצוגי השעון, כמו גם להכיר את המוסכמה 'לפני' ו'אחרי הצהריים' (a.m. and p.m.).

למרות ששעונים דיגיטליים ואנלוגיים שניהם כלים המראים את השעה ביום, התכונות המספריות של הסימון הדיגיטלי משקפות טיפול/מצג שונה מאד באופן ייצוג של יחידה, מאשר התכונות הגאומטריות והמספריות של השעון האנלוגי. אתייחס תחילה לאופן שבו מוצגות היחידות בכל אחד מכלים אלה, ואחר כך אתייחס למחקרים העוסקים באופן שבו ילדים עושים שימוש בכלי.

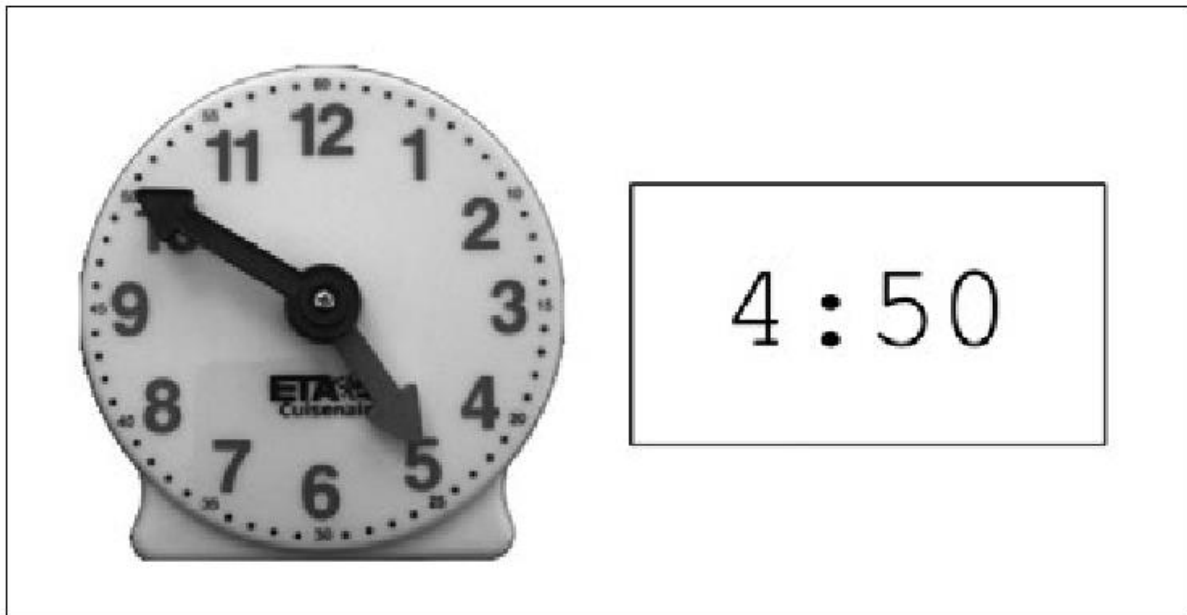
שעון אנלוגי הוא מכשיר מכני שמודד משך זמן של מחזור באורך 12 שעות, החל מחצות הלילה ועד חצות היום, ומחזור באורך 12 שעות מחצות היום ועד חצות הלילה. בהתבסס על מאמצים של מאות שנים למדוד באופן שיטתי את הזמן החולף, שעונים אנלוגיים החלו להיות נפוצים במאה ה-16 ושקפו הישגים הנדסיים בכך שכימתו תכונה של חיי היום יום שאיננו יכולים לראות או לחוש (ראה (Barnett, 1998; Cipolla, 1967/1978).

מערכת הזמן שלנו משקפת את שיטת ה-duodecimal (בסיס 12) המצרית כמו גם את מערכת ה-sexagesimal (בסיס 60) הבבלית. שתי שיטות אלה מנוגדות להרגלים שלנו בנוגע למיקום של ספרות ולאלגוריתמים מקובלים, המבוססים על שיטת הספירה של בסיס 10. בניגוד לשיטת בסיס-10, חישובי הזמן המוכרים לנו כיום הינם המצאה אנושית חדשה יחסית.

בכדי ששעון אנלוגי ישקף משך זמן, יחידותיו מומחשות כאורכים או מרווחים גאומטריים (Lakoff & Núñez, 2000). קריאת השעה בשעון אנלוגי תואמת לפיכך ייצוג במרווחים גאומטריים ויחידות מספריות של צירי מספרים. השעון האנלוגי מציג מרווחים שקולים המייצגים מגוון של משכי זמן: שעות, דקות, ולעתים שניות. על אף שבדרך כלל ייקרא 'מחוג השעות', המחוג הקטן מציין את

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

השעות וגם את הדקות דרך יחסי חלקי-שלם. למשל, כדי להראות את השעה 4:50, מחוג השעה יצביע על חמש שישיות מהמרחק שחלף מאז 4, בין 4 ל-5 (איור 1). המחוג הגדול יותר מציין זמן בתוך השעה, את הדקות בלבד בין 0 ל-60. למרות שציון הדקות על ידי מחוג נוסף אינו חיוני (משום שמחוג השעות מעיד גם הוא על מספר הדקות שחלפו מקץ השעה הקודמת), קיום מציין נוסף של מספר הדקות בתוך השעה מהווה תמיכה לקריאה מדויקת יותר של הזמן, עד כדי דקה. כדי לפרש את מחוג הדקות, סבב שלם בשעון נתפס כ-60 דקות, עם מרווחים בין שלמים המתאימים כל אחד ל-5 דקות. מאחר שסבב שלם מייצג בו בזמן 12 שעות ו-60 דקות, מחוגי השעות והדקות נעים בהתאמה כפולית זה עם זה, כך שתנועה במחוג אחד גוררת תנועה יחסית מתאימה במחוג השני.



איור 1: שעון אנלוגי ושעון דיגיטלי המורים על השעה 4:50.

מחקרים תיעדו את האופן שבו ילדים התקשו לפרש את השעון האנלוגי. בהתחשב בכך שמשך זמן חולף מיוצג על ידי אורך, נוכל לצפות שייצוג נכון של השעון האנלוגי ישקף אינטגרציה של מרווחים, שנתות, ותיוג מספרי (Barrett et al., 2012). ואכן, קשיים של ילדים מעידים על אינטגרציה חלקית של מאפיינים אילו. Williams (2012) תיעד את מה שכינה טעויות נסתרות: התייחסות קונספטואלית לא מדויקת לתכונות השעון, אשר במקרים רבים מובילה בכל זאת לקריאה מדויקת של הזמן ביום. לדוגמה: תלמידי כיתות א-ג קראו את השעה עליה מורה השעון

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

לפי הספרה אליה קרוב יותר מחוג השעות. כאשר מחוג הדקות הצביע על זמן שחלף מתחילת השעה ועד למחציתה (למשל 4:15). טעות כדוגמת זו הייתה בלתי מורגשת משום שמחוג השעות היה קרוב יותר לספרה 4, אולם כאשר מחוג הדקות קרוב לתחילת השעה הבאה (כגון 4:50, איור 1), אסטרטגיה זו מובילה לזיהוי לא תקין של השעה כ-5 ולקריאת הזמן כ-5:50 (ראה גם Siegler & McGilly, 1989).

טעות קריאת שעון נוספת שתיאר Williams היא שילדים מחלקים את פני השעון לגושים נפרדים, כאשר כל גוש נתפס כמיכל אשר לכל מיקום במסגרתו מיוחסת אותה משמעות; לכן ילדים פירשו כל מיקום עליו הצביע המחוג הקצר בין 4 ל-5 כזמן גנרי אחיד: השעה ארבע, במקום זמן ספציפי במהלך אותה השעה.

למרות שניתן לטעון שהשימוש הרווח בשעונים הדיגיטליים הזמינים בטלפונים סלולאריים, בטאבלטים, ובמוצרי אלקטרוניקה אחרים, מפחית את הצורך בשעונים אנלוגיים, אין על כך הסכמה מלאה. בדומה לשעונים אנלוגיים, שעונים דיגיטליים מציגים זמן מדויק, אולם מאפייניהם המספריים תומכים בפירוש מהיר ונוח של הזמן המדויק עד כדי דקה. השעות והדקות מיוצגים על ידי מספרים המופרדים על ידי נקודתיים, ולכן אינם משקפים באופן ממשי את יחסי החלקי-שלם המיוצגים בשעון אנלוגי. מזה נובע שה-"4" המציין את השעה, עשוי לתפקד כקטגוריה אחידה: השעה תקרא בתור השעה העגולה "4" בין שהזמן הוא 4:15 או 4:50 (איור 1). תפקוד זה דומה לתפיסת ה"מיכל" שהוזכרה לפני כן בנוגע לשעון אנלוגי (Williams, 2012).

אם אנו מחשיבים כמטרה בהוראת נושא הזמן רק את קריאתו של הזמן, אז הייצוגים השונים של היחידות עשויים להיות לא רלוונטיים, בתנאי שתתקבל קריאת זמן מדויקת. אולם, מחקר זה רואה ביחסי יחידות כדוגמת יחידות הדקות והשעות, יחסים מהותיים, והבנתם (מעבר לקריאת הזמן בשעון נתון) הכרחית כדי להעריך את מידת הסבירות של פתרונות לקריאת זמן, כמו גם פתרונות של משך 'זמן שחלף'. על כן ראוי כי הבנה זו תהווה מטרת הוראה נוספת, מעבר לקריאה מדויקת של זמן.

זמן שחלף

המונח "זמן שחלף" מתייחס למשך הזמן של מאורע. כדי לחשב את הזמן שחלף ביחידות סטנדרטיות, אנו עשויים לחבר ולפרק שעות ודקות תוך כדי שימוש במוסכמה החברתית ששעה אחת שקולה ל-60 דקות. למעשה, ניתן לעשות שימוש בהמרות הללו תוך התייחסות לשעות

ודקות כמשכי זמן שקולים או תוך התייחסות לשקילות המספרית בלבד. הקיבוץ החריג של 12-יות ו-60-יות מציב אתגרים וזאת במיוחד בכתיבה הדיגיטלית, משום שילדים עדיין מתקשים, בצדק, בפתרון בעיות הכרוכות בשימוש בבסיס-10 (Kamii & Russell, 2012). Williams ו-Breyfogle (2008) מחשיבים אתגרים אלה כקרקע פורייה לבעיות בהוראה (ראו גם Jones & Arbaugh, 2004), אם כי המחקר הקיים טרם בחן את התפקידים השונים שעשויים להיות לכלי העזר (דהיינו, סוג השעון) הזמין לתלמידים.

תלמידים בכיתות ב-ה שוגים במיוחד בבעיות של "זמן שחלף" אשר כרוכות בחישוב מרווח בין שני זמנים נתונים (לדוגמה: חישוב הזמן שחלף מ-6:40 ועד 9:15). ולפיכך פתרון בעיות אלה דורש חיבור ופירוק קבוצות של שעות ודקות (Kamii & Russell, 2012). על בסיס ממצאים אלה, ועל סמך מחקרים התפתחותיים (Piaget, 1969), Kamii ו-Russell קראו תיגר על הדרישות המקובלות ('הסטנדרטים') בכיתות א'-ג' (NGA Center for Best Practices & CCSSO, 2010) וטענו שהן אינן משקפות היטב כיצד יש לצפות באופן הגיוני שילדים צעירים יחשבו בנוגע לזמן. למרות המיקוד בדרישות המקובלות כיום ובעבר (NCTM, 1989, 2000), בהוראת נושא הזמן בכיתות בית הספר היסודי המוקדמות, נראה כי אפילו חלק מתלמידי כיתה ג' עלולים עדיין להיות לא מוכנים מבחינה התפתחותית כדי להתמודד עם המורכבות של יחידות הזמן.

כפי שהוזכר לפני כן, ישנו מחקר מועט בנוגע להוראה וללימוד נושא הזמן. כתוצאה מכך, מחקר בנוגע ליחסים זמניים – כגון: פיתוח הבנה של רעיונות עבר, הווה ועתיד (לדוגמה Harner, 1982) או התייחסות למשך זמן כתכונה של מאורע השונה מתכונות של ייצוג מרחק, מיקום או גודל (Fivush & Mandler, 1985; Kamii & Russell, 2010; Levin, 1989; Piaget, 1969; Richards,) (1982; Russell & Kamii, 2012) – טרם שולב באופן מפורש עם מחקר המתייחס לשעה ביום או הקשר בין שעות ודקות (שימו לב כי Kamii ו-Russell (2012) אכן המליצו שילדים יתבקשו לחשוב על משך זמן לאורך היום). אמשיך לדון בכך במסגרת הדיון שבסוף המאמר.

מסגרת קוגניטיבית

למערכות סימון וכלים מקובלים אין משמעות אינרטי/פעילה. הם נפוצו במהירות לאורך היסטוריה חברתית ארוכה שאינה תלויה בהתפתחות התפיסתית של אדם יחיד כלשהו. מערכות הסימון והכלים המקובלים כוללים: שעונים אנלוגיים או דיגיטליים, ציר ה-x של גרף מרחק-זמן, או השפה שמשמשת כדי לתאר או להשתמש בכל אחד מהם. כל אילו מתפקדים כמתווכים לפתרון בעיות יומיומיות או הוראתיות עבור ילדים.

חשיבה ותקשורת קשורים באופן הדוק עם כלי מלאכה חומריים וכלי עזר שמוצגים בהקשרים חברתיים, בזמן שילדים מפתחים הבנה של מושגים מתמטיים ומסתמכים על התכונות ומאפייני הכלים תוך כדי פעילותם (Earnest, 2015a; Sfard, 2007, 2008; Vygotsky, 1978, 1986). לפי מסגרת תיאורטית זו, ילדים נותנים משמעות למאפיינים של כלים ספציפים/מיוחדים, בהסתמך על התרומה של מאפיינים אלה, אותה הם מזהים דרך תקשורת בהקשרים חברתיים (Saxe & Esmonde, 2005). דהיינו, התפתחות ההבנה של מושג תלויה בתכונות הכלי הזמין ובשיח החברתי שנוצר תוך שימוש בכלי.

כשנותנים אוסף של משימות העוסקות בזמן, אנו יכולים לדמיין שמומחים בנושא הזמן יצליחו לפתור את הבעיות באופן שאיננו תלוי בתכונות הכלי המוצג להם. אולם, בהתחשב באופנים השונים בהם היחידות מיוצגות בכול כלי, מי שאיננו מומחה, עשוי לתפקד אחרת כתלות באופן שבו הכלי שברשותו מבליט את יחידות הזמן, דבר שמוביל להבדלים בין ביצועים כתלות בכלי שהוצג. אם הנחה זו תגובה באופן אמפירי, ההישגים המגוונים הנצפים של ילדים בכל כלי, עשויים לחשוף תיאור נרחב יותר של האופן שבו ילדים חושבים על היחידות האלה.

כלי עזר הניתנים להפעלה ידנית וסימונים כיתתיים נפוצים

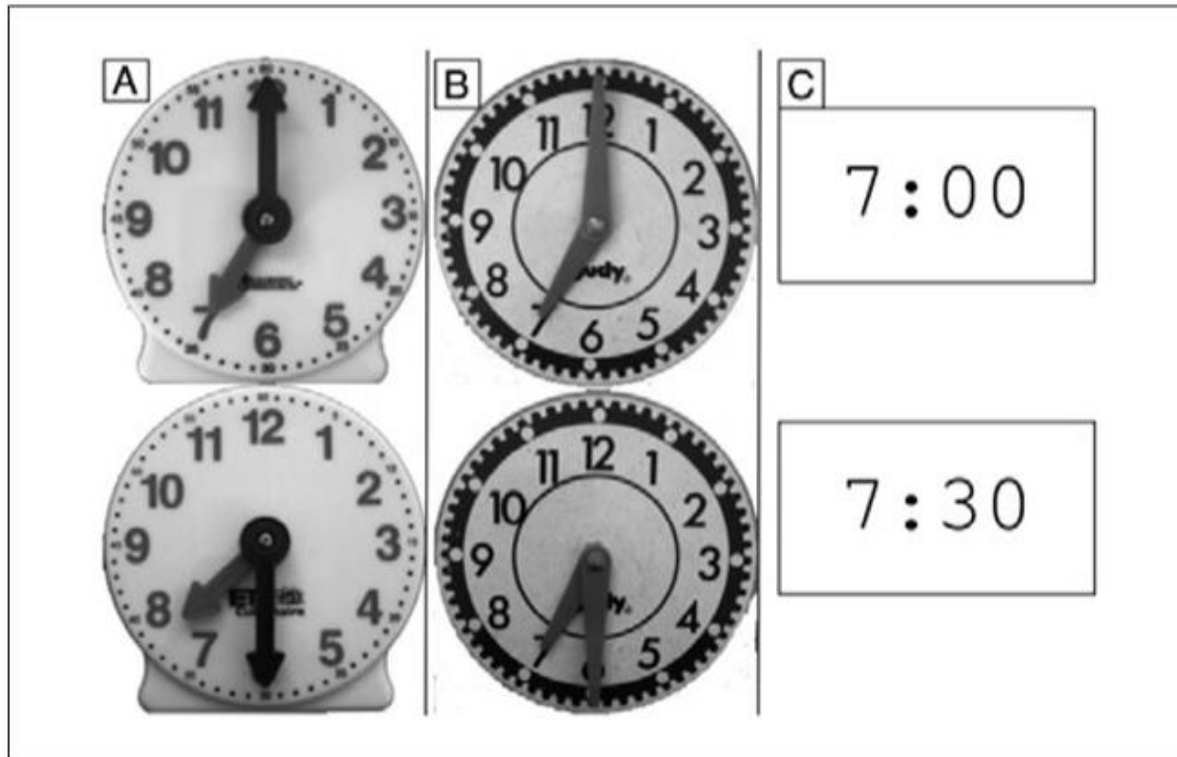
טיפול הוראתי של נושא הזמן בחינוך המתמטי, כרוך על פי רוב בשימוש בכלי עזר וסימונים ייחודיים. במסגרת כלי העזר הניתנים להפעלה ידנית בהם ניתן לעשות שימוש להוראת זמן, נפוצות שתי גרסאות של שעונים אנלוגיים בכיתות היסוד של בית הספר. על אף שבשתי הגרסאות מדובר בשעון אנלוגי, ישנם הבדלים חשובים באופן השימוש בהם כתוצאה מאופן הפעלתם השונה: בגרסה אחת שני מחוגי השעון מחוברים זה לזה מכאנית ובשנייה הם אינם מחוברים.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

באופן ההפעלה הראשון של השעון האנלוגי, כאשר שני מחוגי השעון מחוברים, המשתמש מניע את מחוג הדקות למיקום מסוים על השעון, ומחוג השעות נע בהתאמה. כתוצאה מכך, הכלי משקף את הקשר הכיפלי בין יחידות השעות והדקות. לדוגמה: נניח כי השעה היא 7:00, אזי אם יוזז מחוג הדקות ממיקומו מול ה-12 אל מול ה-6, מחוג השעות ינוע באופן אוטומטי מהצבעה על ה-7 לנקודת האמצע בין 7 ו-8 (איור a2). המשתמש בכלי זה עשוי להבחין שקיים קשר יחסי בין השעות והדקות; לחילופין, המשתמש עשוי שלא להתעמק כלל ביחידות השעה, משום שמחוג הדקות ינווט את מחוג השעות למיקומו המתאים באופן בלתי תלוי בכוונת המשתמש. שימו לב כי המשתמש איננו יכול להניע את מחוג השעות בכלל, ועליו להניע את מחוג הדקות כדי למקם את מחוג השעות.

לאופן ההפעלה השני של השעון האנלוגי, ישנו מאפיין מרכזי שונה באופן משמעותי: מחוג השעות ומחוג הדקות אינם תלויים זה בזה. כדי למקם את המחוגים שיצביעו על שעה ביום, על המשתמש להניע באופן מכוון את שני המחוגים (בנפרד). לדוגמה: אם השעון מראה את השעה 7:00 ומחוג הדקות יוזז ממיקומו מול ה-12 אל מול ה-6, מחוג השעות יישאר במיקומו (מול ה-7), ולפיכך יצביע על שעה ביום שאיננה קיימת במערכת הסימונים המקובלת (איור b2). כך יתאפשר לכל משתמש למקם את מחוג השעות באופן מכוון, כך שיצביע לבסוף על המיקום הנכון, לטענתו.

כמובן, במסגרת כלי העזר לציון זמן בנוסף לשעונים האנלוגיים, נפוצים במיוחד גם סימונים דיגיטליים. כפי שהוזכר לפני כן, סימונים דיגיטליים, מאפשרים פירוש נוח של זמן מדויק עד כדי דקה, בנוסף להיותם משולבים במגוון רחב של מכשירים אלקטרוניים נפוצים. אולם, סימונים אילו אינם ממחישים למשתמש את יחסי החלקי-שלם של יחידות השעות והדקות; שינוי של חצי שעה מ-7:00 ל-7:30 איננו חושף באופן ברור את השינוי המתבצע בשעה עצמה. לכן, משתמש עשוי להסיק ממאפייניהם של סימונים דיגיטליים הבנה שאיננה משלבת התייחסות ליחס בין שעות ובין דקות.



איור 2: שעונים, כולל (a) שעון אנלוגי עם מחוגים מחוברים, (b) שעון אנלוגי עם מחוגים נפרדים, ו-(c) סימון דיגיטלי.

עיצוב אמפירי שמטרתו לכידת הבנה של תלמידים

לפי המסגרת התאורטית שתוארה לפני כן העומדת בסיס מחקר זה, הבנתו של אדם תלויה באופן הדוק בתכונות הכלים הזמינים לו. לפיכך, אין זה מספיק לבחון את ההבנה של תלמידים בנושא הזמן רק עם אחד הכלים שהוזכרו לעיל. לכן, מחקר זה בחן את השימוש בשלושת הכלים הנפוצים, במטרה להשוות בין השימוש בהם בשלוש קבוצות מקבילות של תלמידים. אני טוען כי אם השוואה זו תראה ביצועים דומים בכלים שונים, אז תהא זו הוכחה שילדים מבינים את נושא הזמן בלי להיות מוגבלים בייצוג של היחידות או הקשרים ביניהן כפי שאלה מופיעים בכלי מסוים. לחלופין, אם ביצועי התלמידים עם הכלים השונים יהיו שונים באופן מובהק, ישתמע מכך כי לתלמידים ישנה הבנה חלקית שאיננה תואמת את מה שמקובל לראות כשימוש תקין ביחידות הזמן (באופן שהוא בלתי תלוי בכלי הזמין להם). אולי חשוב מכך, אם תלמידים פותרים בעיות באופן שונה בהתחשב

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

בכלי הזמין להם, התפקוד השונה בכל כלי יוכל להבהיר היבט אחר בנוגע להצלחות ולאתגרים שתלמידי בית ספר יסודי חווים בהקשר של יחסי היחידות של שעות ודקות.

שאלות המחקר

המחקר הנוכחי עושה שימוש בשיטות כמותיות וחקר מקרה תיאורי כדי להתייחס לשתי השאלות הבאות:

(א) האם הדיוק של תלמידים במענה לשאלות הדורשות פתרון ל"זמן שחלף" משתנה בהתאם לכלי הזמין להם?

(ב) אם כן, כיצד תלמידים מתייחסים לשעות ודקות בכלים השונים כאשר הם פותרים בעיות שנושאן זמן שחלף?

כדי להתייחס לשאלה הראשונה, אני מסתמך על ביצועים מבחינים (נכון/ לא נכון) במגוון בעיות של "זמן שחלף". אלה ניתנו במסגרת ראיונות אישיים עם משתתפים שניתן להם כלי אחד מתוך שלושת הכלים. כדי להתייחס לשאלת המחקר השנייה, בהלימה לעיצוב על פי הגישה ההוליסטית של מקרים מרובים (Yin, 2009), אציג שלושה מקרים, כשבכל אחד נעשה שימוש באחד משלושת הכלים שנתנו לתלמידים במסגרת המחקר, כדי לאפשר תיאור של חשיבת הילדים במהלך פתרון בעיות, בהקשר של הכלי שניתן להם.

כדי לצמצם את הנתונים (לדוגמה, Chi, 1997) ולערוך ניתוח נתונים מעמיק יותר בהתבסס על קבוצת נתונים קטנה יותר, בחרתי להתמקד בשלושה תלמידי כיתה ד. מטרת הבחירה בתלמידים מכיתה זו היא שניתן יהיה ללמוד על האופן שבו מתייחסים לשעות ולדקות תלמידים אשר אמורים היו ללמוד את מושגי היסוד האלה בכיתות נמוכות יותר.

שיטה

משתתפים

המשתתפים כללו תלמידים בכיתה ב' ($n = 72$) וכיתה ד' ($n = 72$) משישה בתי ספר יסודיים באזורים עירוניים, פרבריים וכפריים במערב מסצ'וסטס. כל בתי הספר היו מסוג 1, כלומר זוהו

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

כבתי ספר בהם ישנו אחוז גבוה של ילדים ממשפחות בעלות רקע סוציו-אקונומי נמוך – קטגוריה שבה נמנים 51% מבתי הספר הציבוריים במדינה. הראיונות התקיימו בין ינואר לאפריל 2015. מידע דמוגרפי מדווח בטבלה 1.

תלמידי כיתה ב' נבחרו משום שהסטנדרטים של תכנית הלימודים מצביעים על כך שילדים בכיתה זו למדו בעבר בנושא הזמן בשעות ובחצאי שעות, ובכיתה זו (כיתה ב) נלמד שוב נושא הזמן, כעת ברמת דיוק של 5 דקות (NGA Center for Best Practices & CCSSO, 2010). תלמידי כיתה ד' נבחרו משום שעל פי אותם הסטנדרטים של תכנית הלימודים, מושגי זמן, כולל "זמן שחלף", נלמדו בכיתות קודמות, ועל כן ביצועיהם יבהירו אתגרים שמתמסכים מעבר לשלב הלמידה הרשמי. לפי מידע שניתן בראיונות עם מורים, תלמידי כיתה ב' שהשתתפו במחקר עבדו באופן מפוזר ולא סדיר על נושא הזמן לאורך השנה, ובמסגרת פעילויות של 'חשבון ב-10 דקות' ופעילויות חימום. בנוסף, בבית הספר ניתנו כמה ימים של עבודה ממוקדת בנושא קריאת שעון ברמת דיוק של 5 דקות ולפני הצהריים ואחר צהריים (a.m. and p.m.) לכיתות אילו. אף אחד ממורי כיתה ד' לא התמקד בנושא הזמן במהלך שנת הלימוד 2014-2015.

משתתפי המחקר עליו מדווח כאן הינם מדגם מתוך קבוצת משתתפים במחקר גדול יותר, מחקר בו השתתפו שישה בתי הספר (ראה Earnest, 2015b). בבתי ספר אלה ניתנה מטלת הערכה כתובה, שעוצבה עבור הפרויקט הגדול יותר וכללה שאלות הקשורות לנושא הזמן וזמן שחלף. המשתתפים במחקר המתואר במאמר זה צוותו לשלוש קבוצות, כאשר לכל קבוצה הוקצו תנאי מחקר שונים (יפורט בהמשך). כדי לצוות תלמידים לאחת משלוש הקבוצות הללו, התמקדתי ראשית בתלמידים שהוריהם נתנו הסכמה להשתתפותם. מתוכם זיהיתי שלשות של תלמידים עם ציוני הערכה דומים (שניתנו עבור מטלת ההערכה המלאה) בתוך כל כיתה, כך שהתקבלו מספר שלשות בכל כיתה המכסות את כל טווח הלומדים בהתבסס על ציוני ההערכה המקוריים. בכל שלשה, שייכתי כל ילד באופן אקראי לאחד מתנאי המחקר שכלל שימוש באחד מהכלים: אחד משני השעונים האנלוגיים או סימון דיגיטלי. חזרתי על תהליך זה עבור כל כיתה בכל שכבה (ראה תיאור של סך¹ המשתתפים בטבלה 2). לעתים, תלמיד מסוים לא שובץ בשלב זה לשלשה משום שלא היו תלמידים נוספים מאותה הכיתה בעלי ציון הערכה דומה; כאשר ניתן היה, ורק לאחר שכל

¹ הבדלים בין שכיחויות בין בתי הספר בין כיתות ב' ו-ד' היו תוצאה של מספר תלמידים גדול במיוחד בכיתה ב' או בכיתה ד' (בתי ספר 1 ו-3), מורי כיתה ד' שסירבו שתלמידיהם ישתתפו במחקר (בית ספר 2), והיות אוכלוסיית בית הספר מורכבת רק מכיתות ב'-ג' (בית ספר 4) או ד'-ה' (בית ספר 5).

יתר ההתאמות הפנים כיתתיות הושלמו, התאמתי תלמידים אלה עם שני משתתפים מכיתה אחרת, ושוב שייכתי באופן אקראי כל אחד מהם לאחד משלושת תנאי המחקר. המטרה הייתה להצליח ליצור שלוש קבוצות בהן מספר שווה של תלמידים בעלי תוצאות הערכה נמוכה ומספר שווה של תלמידים בעלי תוצאות הערכה גבוהה, כמות שווה של נציגים בעלי תוצאות הערכה דומות מכל כיתה, וכמות שווה של נציגים בעלי תוצאות הערכה דומות מכיתות שונות.

Table 1
School Demographics and Curricula^a

| | School 1 | School 2 | School 3 | School 4 | School 5 | School 6 |
|-----------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------|------------------|-----------------------|
| Grade span | P-6 | P-6 | P-6 | 2-3 | 4-5 | P-6 |
| Location | Urban | Urban | Urban | Suburban | Suburban | Rural |
| Curriculum | <i>Everyday Math</i> | <i>Everyday Math</i> | <i>Everyday Math</i> | Teacher selected | Teacher selected | <i>Investigations</i> |
| Total Pupils | 422 | 366 | 412 | 342 | 417 | 155 |
| Sex (F/M) | 204:218 | 190:176 | 200:212 | 153:189 | 206:211 | 83:72 |
| African American | 9.0% | 7.7% | 9.0% | 1.8% | 1.7% | 1.9% |
| Asian | 15.8% | 13.1% | 12.9% | 0.3% | 0.2% | 0.6% |
| Hispanic | 22.0% | 22.7% | 17.2% | 7.9% | 6.0% | 7.7% |
| Native American | 0.0% | 0.8% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.6% |
| White | 45.5% | 49.5% | 51.2% | 87.1% | 89.4% | 79.4% |
| Native Hawaiian, Pacific Islander | 0.2% | 0.3% | 0.0% | 0.0% | 0.2% | 0.0% |
| Multi-Race, Non-Hispanic | 7.6% | 6.0% | 9.7% | 2.9% | 2.4% | 9.7% |

^a Source: <http://profiles.doe.mass.edu/search/search.aspx>. Demographics reflect information reported to the Massachusetts Department of Education.

Because research questions did not concern issues related to racial or gender identity, these data were not collected from individual participants in this sample.

טבלה 1: דמוגרפיה ותכנית לימוד בית ספרית

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

Table 2
Breakdown of Participants by School

| | School 1 | School 2 | School 3 | School 4 | School 5 | School 6 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Grade 2 Interviewees | 13 | 20 | 17 | 13 | — | 9 |
| Grade 4 Interviewees | 21 | 4 | 11 | — | 27 | 9 |

טבלה 2: פירוט המשתתפים לפי בית הספר.

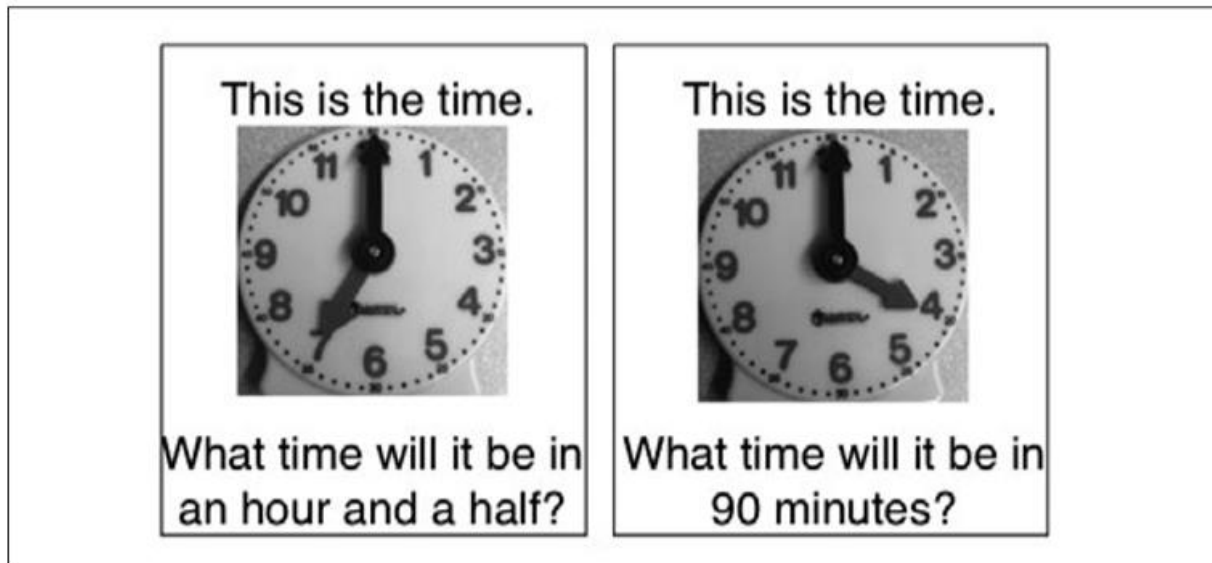
מהלך הראיונות

תלמידים רואיינו באופן יחידני, וכל הראיונות תועדו בווידאו. כל ראיון נמשך 30 דקות. אני מדווח כאן על המשימות כמו גם על שלושת תנאי המחקר השונים שנבדקו.

משימות. הראיונות כללו סדרה של 23 משימות שונות בשתי קטגוריות: 16 שאלות זמן שחלף שהן המיקוד של הניתוח שנעשה עבור המחקר הנוכחי, בנוסף ל-7 משימות של בניית זמן (עליהן לא ידווח כאן) בהן המראיין ביקש מהתלמידים להראות שעה מסוימת ביום (למשל, להראות 4:30) בשעון שהיה זמין להם (בהתאם לתנאי המחקר אליו צוותו). משימות של זמן שחלף עוצבו גם על בסיס ספרות קודמת (Kamii & Russell, 2012; Williams, 2012) וגם על בסיס פיילוטים מתמשכים שנערכו כהכנות לקראת המחקר הגדול יותר. עיצוב כל משימה נבדל בשלושה גורמים: זמן ההתחלה, משך הזמן שחלף שניתן במשימה, וסוג היחידות בהן הוצג משך זמן זה (שעות או דקות).

בכל אחת מ-16 המשימות, הוצג זמן התחלה מאחת מהצורות הבאות: זמן בשעה עגולה (x:00), זמן של מחצית שעה (x:30), זמן בתוך המחצית הראשונה של השעה (x:10 או x:20) וזמן בתוך המחצית השנייה של השעה (x:40 או x:50). בכל משימה ניתן בנוסף אחד מתוך ארבעה משכי זמן אפשריים (מנוסחים כאן בשעות): שעה, חצי שעה, שעה וחצי ו-3 שעות. סוגי היחידות בהן תואר משך הזמן שחלף היו שעות (למשל, שעה וחצי) או דקות (למשל 90 דקות). 14 מתוך 16 המשימות היו זוגות של משימות דומות (זמן ההתחלה היה מאותו הסוג, ומשך הזמן היה זהה) אשר נבדלו רק בסוג היחידה בהן ניתן משך הזמן (איור 3). שתי המשימות הנותרות – משימות בהן ניתן

משך זמן שחלף של 3 שעות – נוסחו ביחידות של שעות בלבד. הנספח כולל את האוסף המלא של 16 מטלות הזמן שחלף, בנוסף לשבע מטלות בניית הזמן הנוספות.



איור 2: דוגמה למשימות ראיון שנערכו עם זמן התחלה עגול ומשכי זמן שקולים המנוסחים ביחידות של שעות או דקות.

משתתפים צוותו לאחד משלושה תנאי מחקר². תנאי מחקר A כלל שעון אנלוגי עם מחוגים מחוברים (תנועה במחוג הדקות גררה תנועה מתאימה של מחוג השעות). תנאי B כלל שעון אנלוגי עם מחוגים בלתי תלויים (תנועה של מחוג אחד לא השפיעה על תנועת האחר). תנאי C כלל סימון דיגיטלי. באופן בלתי תלוי בתנאי המחקר אליו צוותו, ניתנו לכלל המשתתפים אותן 23 משימות, כאשר תלמידי תנאים A ו-B התבקשו במקביל למתן המענה על המשימה גם למקם את מחוגי השעון האנלוגי שניתן להם, בעוד שתלמידי תנאי C התבקשו לכתוב בכתיבה דיגיטלית את השעה ביום על פיסת נייר שניתנה להם. לאחר שצוותו כלל המשתתפים לאחד משלושת תנאי המחקר, נערכה בדיקה של post hoc ANOVA על ביצועיהם במטלת ההערכה הכתובה, אשר אישרה כי שלוש הקבוצות אינן שונות זו מזו ($p = .575$).

² ישנן 3 קבוצות של נחקרים. כל קבוצה קיבלה כלי עזר אחר: קבוצה 1 שעון אנלוגי מסוג 1, קבוצה 2: שעון אנלוגי מסוג 2 וקבוצה 3: סימונים דיגיטליים.

כדי להציג את משימות הזמן שחלף למשתתפים בתנאים A ו-B, המראיין מיקם את מחוגי השעון לציון שעת ההתחלה הרלוונטית מחוץ לטווח הראייה של המרואיין, ובהציגו את השעון ביקש מהתלמיד או התלמידה לזהות תחילה את השעה שהשעון מורה ולהסביר את חשיבתו או חשיבתה. ללא תלות בתשובה שניתנה, המראיין הציג לאחר מכן כרטיס עליו הודפס שעון עם שעת התחלה זהה, על גביו צוין משך הזמן שחלף המבוקש (ראה איור 3 ונספח). בזמן הצגת הכרטיס, שאל המראיין: "אם זו השעה, מה תהיה השעה בעוד..." כאשר יתר המשפט הושלם על ידי הזמן שחלף המבוקש. גם במשימות זיהוי הזמן וגם במשימות הזמן שחלף, המראיין שאל את התלמיד: "איך אתה יודע?" במידת הצורך ובזמן מתאים במהלך המענה שסיפק התלמיד, הזכיר המראיין את זמן ההתחלה המקורי על ידי כך שהסב את תשומת לבו של התלמיד לכרטיס, משום שזמן ההתחלה המקורי (שהוצג על השעון על ידי המראיין בתחילת המשימה) נעלם מיד כאשר התלמיד הניע את מחוגי השעון. התמונה בכרטיס שימשה כעוגן כדי לשוב ולהתייחס אל זמן ההתחלה במידת הצורך. לעתים הציע המראיין הצעות חלופיות לתלמידים כאשר סיפקו תשובות לא ברורות מספיק.

עבור המשתתפים בתנאי C, המראיין הציג לתלמיד דף נייר שעליו תמונה של זמן ההתחלה בסימון דיגיטלי ולימינו מלבן ריק. בדומה לתנאים A ו-B, המראיין ביקש מהתלמיד לקרוא מה מורה השעון לפני ששאל אותו בנוגע לזמן החדש שיתקבל כתוצאה ממשך הזמן שחלף. הזמן שחלף הייעודי הודפס מעל המלבן הריק ולאורך הריאיון, כיוון המראיין את תשומת לבו של התלמיד לאזורים השונים המתאימים על גבי הדף.

כדי להיערך לקראת האפשרות של השפעת סדר השאלות על ביצועי התלמידים, עוצבו שלושה נוסחים של המשימות השונות שנבדלו בסדר השאלות, ואילו פוזרו לרוחב תנאי המחקר השונים, כך שכל סדר ניתן למספר שווה של משתתפים בכל תנאי (A, B ו-C). כל 23 המשימות הוצגו בכל אחד משלושת הנוסחים, וסדר המשימות בשלושתם נקבע על סמך אותם שלושה עקרונות סידור: (א) פרטים תואמים (זוגות השאלות הנבדלות רק בסוג היחידה בה ניתן משך הזמן שחלף) לא יופיעו זה מיד אחרי זה, (ב) משימות בניית זמן (שניתוחן לא כלול במאמר זה), לא תופענה זו אחר זו ותהיינה מפוזרות באופן שווה, (ג) כל התלמידים יתחילו באותן שלוש משימות בסיסיות – שתי משימות בהן הזמן שחלף הוא שעה אחת ואחריהן משימת בניית השעה 7:00. לא נמצאו הבדלים בין ביצועי המשתתפים בין שלושת הנוסחים השונים ($p = .341$).

שיטות אנליטיות

כדי להעריך את ביצועי המשתתפים במשימות זמן שחלף, כל תשובה נכונה סומנה כ-1, וכל תשובה שגויה סומנה כ-0. התשובות הוגדרו כנכונות רק אם הזמן שדווח באופן מילולי התאים לזמן שדווח גם בשעון המתאים שבנה התלמיד או שכתב, ושניהם שיקפו את זמן הסיום המתאים. כאשר התשובה שנחשבה נכונה הייתה שעה עגולה, הזמנים שנאמרו באופן מילולי נחשבו נכונים אם נוספה להם המילה "o'clock" [כינוי המעיד כי ספרה מסוימת מתארת שעה עגולה, המקבילה העברית תהיה למשל "בשעה 7" להבדיל מ"7"], או אם נאמרו בקצרה רק על ידי ציון המספר עצמו (למשל "7"). עבור תשובות המתקבלות לאחר חציית נקודת הציון 12:00, תשובות המשקפות שעון של 24 שעות (כלומר התייחסות לשעה 2:00 כאל "השעה 14:00") נחשבו תשובות נכונות, אולם הן היו נדירות מאד. תשובות שסטו בדקה או שתיים מזמן התשובה הנכונה נחשבו גם כן תשובות נכונות (למשל, זיהוי 7:00 כ-6:59).

ארבעה בודקים ניתחו בנפרד את קטעי הווידאו ועבודות התלמידים כדי לקבוע במדויק את התשובות המילוליות שנתנו התלמידים, מיקומי המחוגים על השעון (בתנאים A ו-B) והמענה בכתב (תנאי C). בכל תנאי, זוהה הזמן שציין התלמיד באופן מילולי בעזרת צילומי הווידאו. הבודקים הסתמכו על צילומי הווידאו גם כדי לקבוע את מיקומי המחוגים, כשבדקו את תנאי A ו-B, ובחנו בנפרד את מיקומו הספציפי של כל מחוג מסביב לשעון; נתונים אילו נבדקו פעמיים. כל אי התאמה בין שתי הבדיקות נפתרה בפגישות צוות שבועיות על ידי חקירה נוספת של הנתונים עד להגעה לקונצנזוס.

כתוצאה מכמות הראיונות שקוימו וכדי לאפשר צמצום נוסף של הנתונים (Chi, 1997), בחרתי להתמקד במקרים מכיתה ד' בלבד. בחרתי בכיתה ד' במקום כיתה ב' משתי סיבות: ראשית, לפי הדרישות הסטנדרטיות (NGA Center for Best Practices & CCSSO, 2010), תלמידי כיתה ד' כבר שולטים היטב בתכנים הקשורים לזמן. חקר מקרים בכיתה זו במיוחד, יבהיר קשיים מתמשכים שקיימים למרות שהושלמה ההוראה שממוקדת בנושא הזמן באופן ישיר. שנית, מחקרם של Kamii ו-Russell (2012) מראה כי אפילו תלמידים בכיתה ד' עלולים שלא להתייחס ליחידות השעות והדקות כיחידות שיש ביניהן קשר, לכן בחירת המקרים מכיתה ד' מאפשרת אימות והרחבת מחקר זה.

חקרי המקרה עוצבו על פי גישה הוליסטית של מקרים מרובים (Yin, 2009). שלושה תלמידים מכיתה ד', אחד עבור כל אחד מהתנאים, זוהו בהתבסס על ממוצע ביצועיהם ביחס ליתר התלמידים באותה כיתה במסגרת ההערכה הכתובה וגם במהלך הראיונות. כדי לזהות מקרים שמתארים תלמיד כיתה ד' טיפוסי, נקבעה מועמדותם של התלמידים על פי: (א) ביצועיהם במבדקי ההערכה – אם הם היו בתחום הרבעון השני והשלישי מכלל תלמידי כיתה ד'. (ב) ביצועיהם בראיון – אם הם היו בתחום הרבעון השני והשלישי של כל תנאי מכלל תלמידי כיתה ד'. שלושת המקרים מייצגים את כלל המדגם במובן שביצועי שלושת התלמידים שנבחרו היו קרובים לממוצע של כיתה ד'. מאחר והיבט מהותי של התנאים הוא האופן השונה שבו כל כלי משקף את יחידות הזמן (שעות ודקות) ואת הקשר ביניהן, סומנו במיוחד הראיונות בהם התלמידים התייחסו לקשר זה באופן מפורש.

לאחר בחירת שלושת המקרים נאספו הנתונים של תלמידים אלה (הקלטות ווידאו, תכתובת תשובתם המילולית ועבור תנאי C גם עבודתו הכתובה של התלמיד), לצורך ניתוח במטרה לבצע טריאנגולציה של הנתונים (Yin, 2009). לפני הניתוח המעמיק, ניהלתי יומן תכנים תוך שימוש בצילומי הווידאו של הראיונות וקטעי תכתוב נבחרים, וזאת כדי לקבל תמונה כללית של כל מקרה. לאחר סקירה ראשונית זו, ניתחתי קטעי תכתוב של צילומי הווידאו תוך כדי התמקדות ספציפית בחשיבת התלמידים על הקשר בין שעות ודקות. מטרה אחת של ניתוח המקרים הייתה לקבל "הסברים עבים" "thick descriptions" (Geertz, 1973) שמיצבו את פתרון הבעיות בהקשר התרבותי שכלל את הכלי הספציפי שיועד לאותו התנאי. לאחר ניתוח ראשוני של קטעי התכתוב שייכתי מגמות שנבעו ממנו לפעילות פתרון בעיות שניתן היה לזהות בצילומי הווידאו (דהיינו, כיצד המשתתפים פעלו והפעילו את הכלי הזמין להם). לאחר מכן תיעדתי את הקשר בין הכלי ובין פעילות פתרון הבעיות בהלימה עם המסגרת הקוגניטיבית של המחקר.

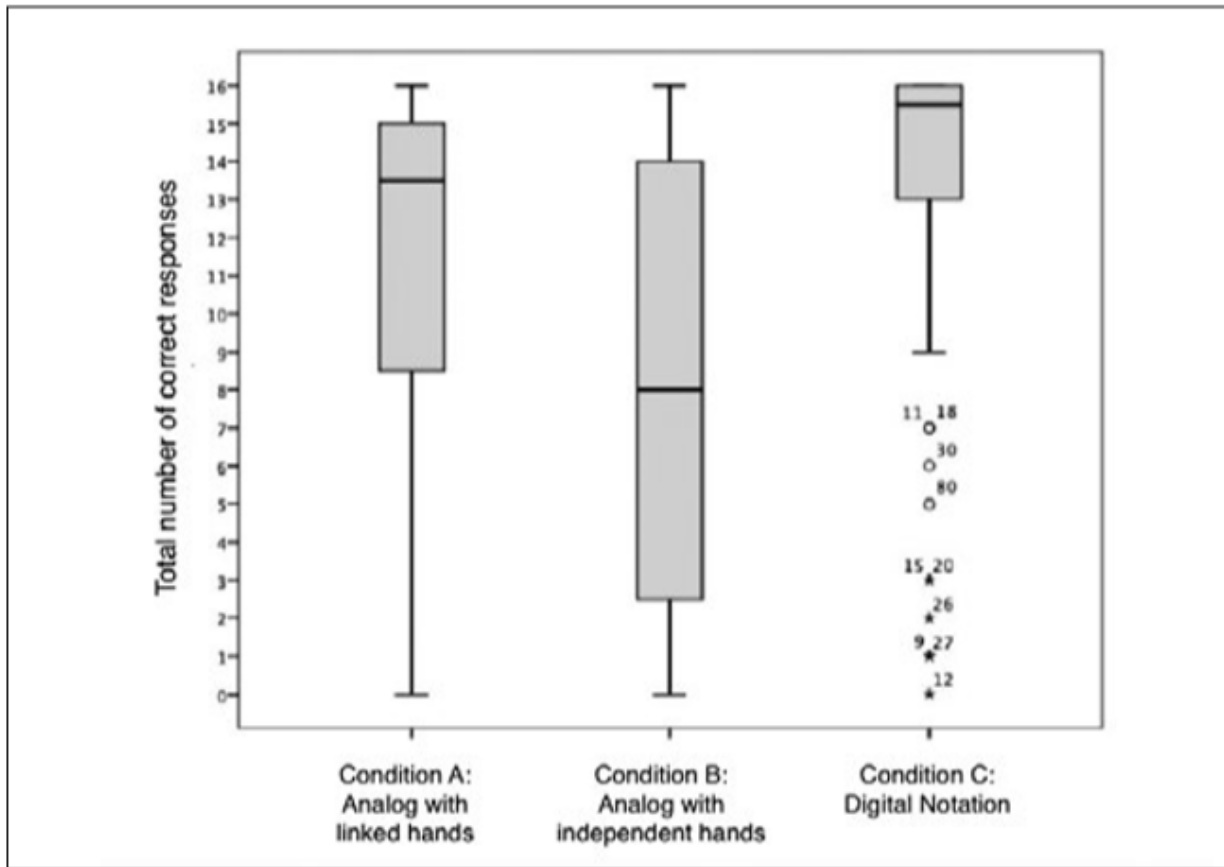
ממצאים

הממצאים מובאים בשני חלקים בהתאמה לכל שאלת מחקר. בחלק הראשון אני מציג את ביצועי התלמידים במסגרת הראיונות במשימות הזמן שחלף עבור כל אחד משלושת התנאים וזאת כדי להבין כיצד התלמידים חשבו עם יחידות השעות והדקות. לאחר מכן אני מציג שלושה מקרים, אחד

לכל תנאי, כדי לספק תובנות נוספות בנוגע לדינאמיקה של חשיבת התלמידים תוך כדי פתרון בעיות בעזרת כל אחד מהכלים.

ביצועים במשימות הזמן שחלף

כדי להשוות בין ביצועי התלמידים בשלושת התנאים, השווייתי בין ממוצעי הביצועים תוך שימוש בתשובות הנכונות או השגויות של 16 משימות הריאיון. איור 4 מציג את ביצועי התלמידים עבור כל תנאי (ממוצעים וסטיית תקן מובאים בטבלה 3). מבדק one-way ANOVA חשף הבדל מובהק בביצועים בהתבסס על תנאי המחקר $F(2, 141) = 10.802, p < .0005$, מבדק post hoc Tukey's HSD הראה שתלמידים בתנאי B – שעון אנלוגי עם מחוגים בלתי תלויים, תפקדו אחרת באופן מובהק בהשוואה לתלמידים בתנאי A – מחוגים מחוברים, $p = .004$, ותנאי C – סימון דיגיטלי, $p < .0005$. לא היה הבדל בביצועים בין תלמידים בתנאים A ו-C ($p = .459$). איור 5 מציג את ממוצעי הציונים עבור כל תנאי.

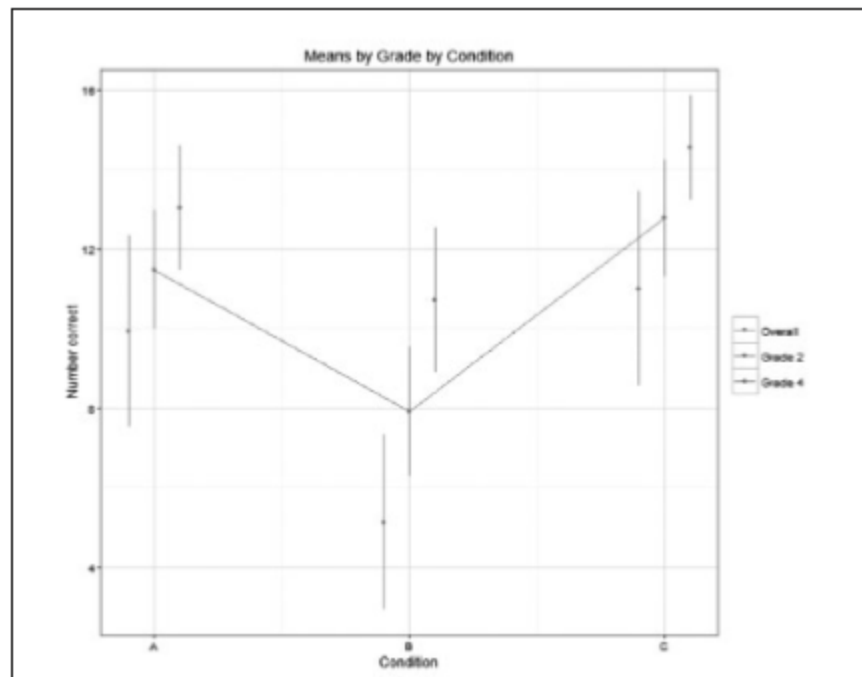


איור 3: ביצועים עבור כל סוג בעיות לפי תנאי.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
 NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

Table 3
Means and Standard Deviations for Elapsed Time Tasks for Each Condition

| | Performance on 16 elapsed time tasks | | |
|--|--------------------------------------|------------|-------------|
| | Overall | Grade 2 | Grade 4 |
| | Mean (SD) | Mean (SD) | Mean (SD) |
| Condition A: Analog with Linked Hands | 11.48 (5.2) | 9.92 (5.9) | 13.04 (3.8) |
| Condition B: Analog with Independent Hands | 7.92 (5.6) | 5.13 (5.4) | 10.71 (4.4) |
| Condition C: Digital Notation | 12.77 (5.1) | 8.68 (6.2) | 14.54 (3.2) |



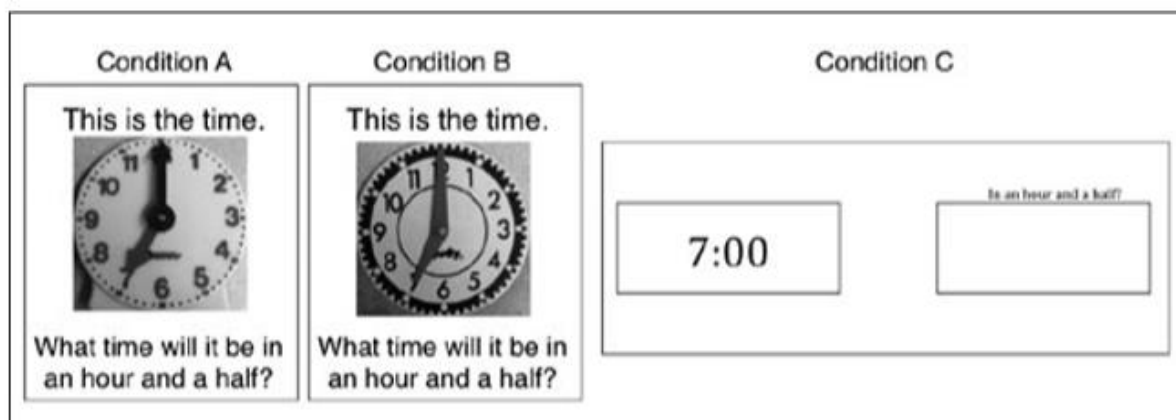
איור 4: תצוגה של ממוצעי כל כיתה לפי תנאי.

ההבדלים בין הביצועים בתנאי ההשתתפות השונים מרמזים כי הכלי הזמין לילד אכן תמך באופן שונה בתהליך פתרון הבעיות. זכרו כי טווח דומה של משתתפים צוות לכל אחד משלושת תנאי המחקר (שנבדלו רק בסוג השעון או הסימון). על אף דמיון זה, היו הבדלי ביצוע בין המשתתפים שפתרו את אותה קבוצת משימות לאורך שלושת התנאים האלה. תוצאה זו מרמזת שהכלי שהוקצה אכן תיווך באופן שונה את חשיבתם של התלמידים תוך כדי פתרון הבעיות שניתנו להם. לכן, תוצאה זו מובילה אל שאלת המחקר השנייה במאמר זה, העוסקת בהבנה של ילדים את נושא הזמן שחלף, בהקשר של האופן שבו הם מתייחסים ליחידות של שעות ודקות בכל כלי.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

מקרים

אני פונה כעת לשלושה מקרים כדי להבהיר את גישות פתרון הבעיות של התלמידים בהקשר של כלי מסוים. בחרתי בשלושה תלמידי כיתה ד' – אסטר (Aster), בלייק וקייסי – שהוצמדו לתנאים C ו-B, A בהתאמה. כל מקרה מבוסס על אותה משימת מיקוד, אותה בחרתי משום שהזמן שחלף שניתן בה, בהיותו יותר משעה אחת, הוא בעל פוטנציאל להדגיש כיצד ילדים מחברים ומפצלים יחידות של שעות ודקות כדי לפתור בעיות של זמן שחלף. במשימה זו, הוצג לכל ילד השעון המתאים עם השעה 7:00. לאחר שהתלמידים זיהו את השעה (נכון או לא נכון), המראיין הציג כרטיס (תנאים B-A) או הפנה את תשומת לבם למלבן הנתון להם, שמעליו צויין משך הזמן שחלף (תנאי C) ושאל: מה תהיה השעה בעוד שעה וחצי? (איור 6).



איור 5: כרטיסים של חומרים שהוצגו לתלמידים בכל תנאי עבור משימת המיקוד.

תנאי A: שעון אנלוגי עם מחוגים מחוברים. אסטר, שצוות לתנאי A, השיב נכונה על 14 מתוך 16 המשימות של זמן שחלף, כך שמיקומו היה ברביע השני של הישגי כיתה ד', מעט מעל החציון. למרות שהצליח לקבוע נכונה את השעה שמתקבלת עבור משימת המיקוד, אסטר פירש את זמן ההתחלה באופן שגוי בכך שזיהה את השעה 7:00 כ"השעה 6". כדי להבהיר את אופן החשיבה שלו, אני מתאר משימה מוקדמת יותר במהלכה אסטר הביע לראשונה את החשיבות של 'דיוק' בפירוש של מיקום מחוג השעה בשעון אנלוגי.

לפני משימת המיקוד, הוצג לאסטר שעון המורה 6:30. הוא התבקש לזהות: מה יהיה הזמן חצי שעה מאוחר יותר? לאחר שזיהה את הזמן 6:30, הוא הזיז נכונה את מחוג השעות כך שיצביע

על השעה 7:00, אולם כינה באופן שגוי שעה זו כ"השעה 6" (איור a7). הוא הסביר כי מחוג השעה חייב להיות בדיוק על או אחרי מספר מסוים בשעון – במקרה זה 7 – אחרת הוא מעיד על השעה הקודמת. הוא הסביר:

אסטר: בגלל שזה [מחוג השעה] לא בדיוק [על ה-7], אז [הזמן הסופי] הוא עדיין השעה 6 [איור a7]... זה [מחוג השעה] לא בדיוק על הנקודה [של 7], אז זה אומר שאתה הולך אחורה, וזה אומר שהשעה היא 6.



איור 6: אסטר שוגה בזיהוי של (a) 7:00 בתור השעה שש; (b) 11:00 בתור השעה עשר; ו-(c) במשימת המיקוד, 7:00 שוב בתור השעה שש.

אסטר התייחס באופן מפורש לתפקיד שמגלם הדיוק בפירוש הזמן שעליו מורה השעון. תוך שיישם את החוק שניסח, נראה שהתייחס למרווחי השעה כמכלים עם גבולות מוחלטים של הכלה או אי הכלה. אנו יכולים לדמיין שתלמיד אחר אשר היה מזהה את מיקומו של מחוג השעה באופן דומה מעט לפני ה-7, היה מציע למשל את השעה 6:59 אם יתייחס למחוג השעה כמורה על מיקום בתוך המרווח של שעה, להבדיל ממורה על מיקום בתוך או מחוץ למיכל. אסטר לא הוטרד מכך שכדי להורות כי השעה היא 6:00, מחוג השעות צריך להיות לא קרוב ל-7, או מכך שהשעה 6:30 איננה מגיעה 30 דקות לפני השעה 6:00. אסטר זיהה זמנים נוספים תוך שימוש באותה פרוצדורה שבה פירש בהתחלה את מחוג השעות, ואז באופן בלתי תלוי את מחוג הדקות, שהובילה שוב לקריאה לא נכונה של השעה שהשעון מורה (למשל זיהוי 11:00 בתור "השעה 10", איור b7).

בחזרה למשימת המיקוד, המראיין מיקם את מחוגי השעות להראות את השעה 7:00, כך שמחוג השעות הצביע בדיוק על ה-7, ומחוג הדקות הצביע בדיוק על ה-12. כאשר נתבקש לזהות מהי השעה (איור c7), אסטר התמהמה קצרות ולאחר מכן השיב:

אסטר: השעה 6, בגלל שזה [מחוג השעות] לא מדויק, וזה [מחוג הדקות] הוא על 12.

תשובתו למשימת המיקוד – שוב פירוש של השעה 7:00 כ"השעה 6" – מצביעה על אחדות בין תשובה זו ותשובותיו הקודמות. המראיין הציג את הכרטיס ושאל: "מה תהיה השעה בעוד שעה וחצי?" מבלי לומר דבר, אסטר הניע נכונה את מחוג הדקות מסביב לשעון וביצעו הקפה וחצי – כך שהשעון הורה על השעה 8:30 – וזיהה היטב את הזמן שהתקבל. הוא הסביר:

אסטר: עשיתי שעה אחת שזה כל הדרך חזרה ל-12. אחר כך עשיתי 30 דקות יותר כאן. [מצביע על 12 ומזיז את אצבעו עם כיוון השעון עד למספר 6]

כפי שאסטר הסביר את הזמן שחלף, הוא תפעל נכונה את מחוג הדקות של השעון – ולפיכך גרר שינוי מתאים של מחוג השעות המחובר אליו – כך שהורה על הזמן הסופי המתאים של 8:30. הוא התבסס בעיקר על מחוג הדקות כדי לנהל מעקב על משך הזמן של השעה וחצי שחלפה. למרות הזיהוי השגוי הראשוני שלו, אסטר יישם את משך הזמן שחלף על תנועת מחוג הדקות כך שהגיע לזמן סיום מדויק.

בעוד שבאופן פוטנציאלי המחוגים המחוברים מדגישים למשתמש את הקשר הכיפלי בין יחידות השעות והדקות, המחוגים המחוברים עלולים לייתר את הצורך של משתמש לשקול באופן פעיל את מיקום מחוג השעות. בזיהוי זמן ההתחלה, אסטר פירשה את מחוג השעות והדקות בזה אחר זה לזיהוי 7:00 בתור "השעה 6". אולם לאחר מכן הוא תפעל את מחוג הדקות באופן מדויק כדי להמחיש את השעה וחצי שחלפה. בעוד שאסטר ביטא התחשבות במיקום מחוג השעות כאשר זיהה את "השעה 6", התחשבות זו הייתה קשורה למיקום המחוג במיכל מסוים ולא לקשר המתאים עם מחוג הדקות. כאשר אסטר הזיז את מחוג הדקות כדי להראות שעה וחצי, הוא התייחס באופן נפרד לשעה שחלפה ("כל הדרך חזרה ל-12") ואחריה למחצית השעה ("30 דקות יותר כאן").

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

תנאי B: שעון אנלוגי עם מחוגים נפרדים. בשונה מהשעון האנלוגי עם המחוגים המחוברים, השעון האנלוגי עם מחוגים נפרדים דורש מהמשתמש בו למקם באופן מכוון את מחוג השעות כדי להצביע על הזמן הסופי של 8:30. כחלק מהמשתתפים שצוותו לתנאי B, בלייק תועד כעונה נכונה על שמונה מתוך 16 המשימות, כך שמוקם ברביע השלישי עבור תלמידי כיתה ד'. בדומה למקרה הקודם, כדי להסביר את הפתרון של בלייק למשימות המיקוד, אני מתייחס גם לפעילות נוספת שהתרחשה במהלך הריאיון.

כאשר הוצג לבלייק השעון של משימת המיקוד, בלייק זיהה נכון כי השעה הייתה "השעה 7". המראיין הציג את הכרטיס ותוך כדי כך שאל את בלייק: "מה תהיה השעה [הזמן] בעוד שעה וחצי?". כדי לפתור משימה זו, בלייק הניח בהתחלה את אצבעו על מחוג הדקות כדי לקבע אותו במיקומו הנוכחי; לעתים, תנועה במחוג אחד עשויה לגרור תנועה כלשהי באחר, ומכך ניסה בלייק להימנע. הוא העביר את מחוג השעות ממיקומו מול ה-7, עם כיוון השעון כך שיהיה בדיוק מול ה-8. לאחר מכן הסיט את תשומת לבו ממחוג אחד לאחר; הוא קיבע במקומו את מחוג השעות עדיין מול ה-8 והניע את מחוג הדקות עם כיוון השעון ממיקומו מול ה-12 כך שיהיה ממוקם מול ה-6 (איור 8).



איור 7: בלייק מיקם את מחוגי השעון לציון השעה 8:30 כך שמחוג הדקות על 6 ומחוג השעות על 8.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

כאשר נתבקש לספק הסבר, שוב התייחס בלייק קודם כל להנעת מחוג השעות ולאחר מכן, באופן נפרד, להנעת מחוג הדקות:

בלייק: בגלל שזה היה על 7:00. אז, זה קל. זה רק 7. ואז אתה מזיז אותו [את מחוג השעות] שעה אחת למעלה, שזה רק 8. ואז, בגלל שזה קל כי זה [מחוג הדקות] הוא רק ב- o'clock [שעה עגולה], אתה יכול פשוט להזיז את זה למטה ל-6. ואז זה יהיה 8:30.

המראיין שאל את בלייק באופן מפורש כיצד הוא קבע את מיקומו של מחוג השעות. נראה שתשובתו שיקפה רעיונות חלקיים וסותרים בהקשר של זמן:

המראיין: ...ותספר על המחוג הזה [שעות] פה.
בלייק: המחוג הזה נשאר... אמממם... זז מעט למעלה?

בתיעוד הווידאו נשמע טון הדיבור של בלייק לא בטוח, ובנקודה זו, אמירתו "זז מעט למעלה" איננה ברורה. לאחר מכן הוא ביקש הבהרה לשאלתו של המראיין בכך ששאל בנוגע לאיזה מהמחוגים שאל המראיין, דבר שעשוי לרמז על כך שעבור בלייק תנועת מחוג השעות איננה מהותית.

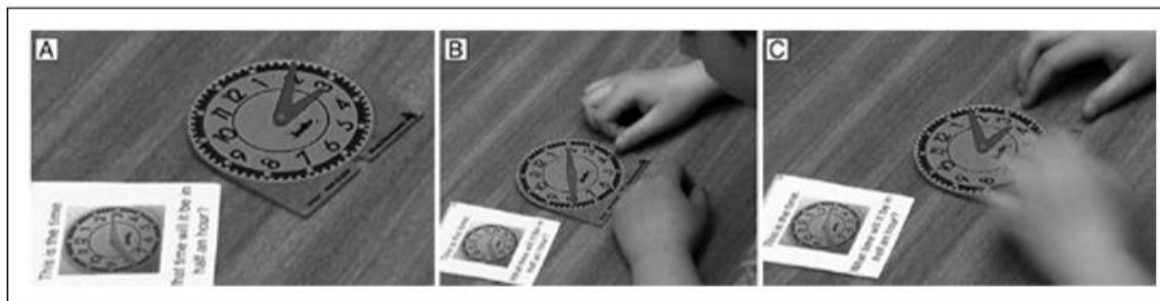
בלייק: [שואל את המראיין] חכה דקה, מדוע זה [מחוג השעות] שם?
המראיין: כן אז זה נראה כאילו הוא בדיוק מול ה-8. אז אני מניח שהשאלה שלי הייתה, איך ידעת איפה לשים את המחוג הזה [שעות]?
בלייק: בגלל שזה [הכרטיס] אמר שעה אחת. אז אתה רק מזיז אותו מ-7 ל-8 בגלל שזה שווה שעה אחת. אחר כך זה אמר 30 דקות, אז אתה פשוט מזיז את זה [מחוג הדקות] למטה ל-6 בגלל שהוא כבר היה ב-o'clock [שעה עגולה].

בתשובתו, בלייק הסתמך על הרעיון ש"שעה" שחלפה משמעותה שמחוג השעות נע בכיוון השעון ממיקום מול ספרה אחת לזו שאחריה (למשל, מ-7 ל-8). יתר על כן, בלייק התייחס לכרטיס באומרו "זה אמר 30 דקות." אמירתו זו איננה מדויקת, משום שעל גבי הכרטיס כתוב "שעה וחצי." הדבר מרמז על כך שבלייק התייחס ל-30 דקות כשקולות למינוח "וחצי". לצורך הבהרות נוספות, שאל המראיין שאלות נוספות בנוגע לאופן שבו בלייק השתמש במידע על הכרטיס כדי להניע ולמקם את מחוגי השעון:

המראיין: אז האם אתה אומר שה"שעה" [על הכרטיס] אמר לך שעליך להזיז את המחוג הזה [שעות]
 בלייק: כן
 המראיין: ומה לגבי...
 בלייק: ה"וחצי"? החצי בעצם אומר חצי שעה. ו-60 דקות זו שעה אחת, ו-30 ועוד 30 שווה ל-60 דקות. אז אתה פשוט שם את זה [מחוג הדקות] על ה-6 בגלל שאם תספור בחמישיות אז זה שווה 30.

בעוד שהכרטיס הציג את משך הזמן שחלף ביחידות של שעות, בלייק הראה כי פירש את ה"חצי" במושגים של יחידות של דקות בכך שאמר "אחר כך זה אמר 30 דקות..." ומאוחר יותר "החצי בעצם אומר חצי שעה. ו-60 דקות זו שעה אחת, ו-30 ועוד 30 שווה ל-60 דקות." בלייק הציג באופן מדויק את השקילות המספרית המוסכמת בין יחידות השעות והדקות.

מאוחר יותר במשימה שונה, הוצג לבלייק שעון המעיד על השעה 2:40 והוא נשאל מה יהיה הזמן לאחר שתחלוף חצי שעה. מילולית, בלייק ציין נכונה גם את שעת ההתחלה (2:40) ושעת הסיום (3:10) כמו גם הניח נכונה את מחוג הדקות על 2 כדי להצביע על השעה 3:10; אולם, הוא מיקם את מחוג השעות בדיוק על הספרה 3 ולא מעט אחריה (איור a9). מאחר וקריאה והצבת מחוג השעות במיקום מדויק עלולה להיות מאתגרת טכנית על גבי שעון קטן, המראיין שאל את בלייק היכן בדיוק תכנן למקם את המחוג כדי לברר האם מיקומו המדויק מול ה-3 היה מכוון. כדי להסביר, בלייק התחיל למקם מחדש את המחוגים – באופן שגוי – כדי שיוורו על השעה 2:40; במאמציו אילו מיקם בלייק את מחוג השעות בדיוק מול ה-2, במקום במיקום הנכון של שני שלישי אחרי 2, בין 2 ל-3, ואת מחוג הדקות על 8 (איור b9). כאשר המראיין הזכיר לו את זמן ההתחלה שצויר על הכרטיס, בלייק הניע את מחוג השעות למיקומו המקורי (או קרוב לכך).



איור 8: צילומי סטילס מהקלטת הווידאו של הריאיון של בלייק בהם הוא: (a) מיקם את המחוגים כדי לציין את השעה 2:40, (b) מיקם מחדש את המחוגים כדי להראות את זמן ההתחלה 2:40 אבל כך שמחוג השעות מצביע בדיוק על ה-2, ו-(c) הראה שמחוג השעות נע למיקום בין 3 ו-4 אם מחוג הדקות היה על ה-6.

בלייק: זה היה על 2:40 [ממקם את מחוג השעות על 2 ואת מחוג הדקות על 8 (איור 8)].
 המראיין: אז, [הזמן ההתחלתי] נראה ככה. [מצביע על הכרטיס].
 בלייק: כן. [מניע את מחוג השעות כך שהוא ממוקם לבסוף בערך באמצע הדרך בין 2 ובין 3] ו, אמנם, ספרתי [חצי שעה] בחמישיות. [מניע את מחוג הדקות] חמש, עשרה, חמש עשרה, עשרים.

כאשר בלייק הגיע בספירתו ל-20, כאשר מחוג הדקות הצביע על 12, הוא הדגיש במיוחד את המילה הזו (20). הוא המשיך את ספירתו על מנת להשלים את מחצית השעה שחלפה. בסיום ההסבר שסיפק וכתגובה לשאלות נוספות שהציג לו המראיין, בלייק הציע תאוריה מתפתחת – שהתאפשרה בזכות תכונותיו המכאניות של השעון – לקשר בין שעות ודקות המיוצגות במחוגי השעון:

בלייק: זה רק עשרים. וזה הגיע ל'clock [שעה עגולה] אז זה, אז זה [מחוג השעות] הופך ל-3. [תוך שהוא מניע את מחוג השעות כך שיצביע על 3] עשרים, עשרים וחמש, שלושים. [ממקם את מחוג הדקות על 2].
 המראיין: אז המחוג הזה [הדקות] הוא ישר על העשר או ה-2, והמחוג הזה [השעות] הוא בדיוק מול ה-3?
 בלייק: אה הא! בגלל שהוא [מחוג הדקות] לא עבר את החצי [מצביע על ה-6].
 המראיין: בגלל שהוא לא עבר את החצי. בגלל שכשהוא עובר את החצי...?

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

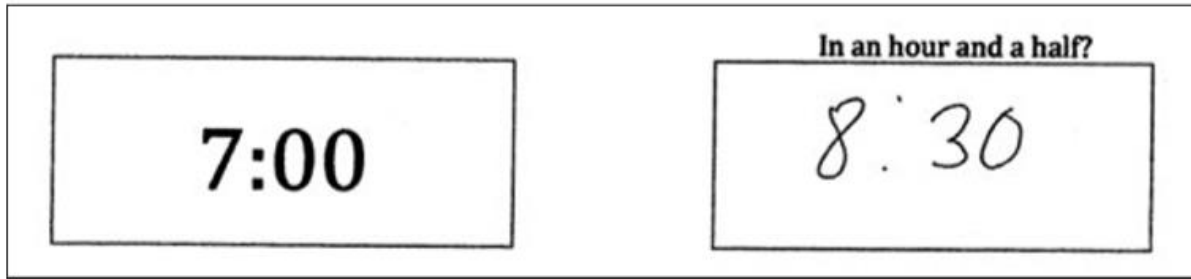
בלייק: הוא [מחוג השעות] זז רק מעט. [ממקם את מחוג השעות באמצע הדרך בין 3 ובין 4 (איור c9)].

כדי להסביר את הזמן שחלף, בלייק מיקם באופן נכון את מחוג הדקות, ועשה שימוש בספירה של חמשות כדי לקבוע את הדרך שעשה המחוג על גבי השעון. הרציונל של בלייק שיקף התייחסות לזמן שבה הבנתו בנוגע ליחידות השעות והדקות לא שולבו לכדי מערכת קוהרנטית. במשימה האחרונה בראיון, בלייק הציע תאוריה מתפתחת לתיאום ביניהן: מחוג השעות תמיד מצביע באופן מדויק על הספרה בשעון עד אשר מחוג הדקות מגיע ל-6, או 30, ובנקודה זו מחוג השעות עובר להצביע על אמצע הדרך בין שתי הספרות.

במשימת המיקוד, בלייק מיקם באופן שגוי את מחוג השעות בדיוק מול ה-8, כדי לציין את הזמן 8:30. במשימה הסופית בראיון, הטיפול של בלייק במחוג השעות היה דומה לזה שבמשימת המיקוד, בכך שמיקום מחוג השעות ומיקום מחוג הדקות היו בלתי תלויים. האופן שבו בלייק פתר את הבעיה משקף הבנה סבירה, אם כי חלקית, שבעיקרה נשענה על המוסכמה החברתית של השקילות בין שעות ודקות, ולא על הקשר המתמטי בין שעות ודקות.

תנאי C: סימון דיגיטלי. במסגרת התנאי האחרון נעשה שימוש בסימון דיגיטלי. התלמידה שאחריה יעקוב חקר המקרה, קייסי, השיבה נכונה על 14 מתוך 16 המשימות, מעט מתחת לחציון של תנאי C. כדאי להזכיר שבמקום עבודה עם שעון שניתן לתפעול ידני, לתלמידים בתנאי C הוצג הזמן בסימון דיגיטלי, ולאחר שזיהו מילולית את הזמן הם נתבקשו לכתוב את הזמן החדש לאחר שחלף משך הזמן שניתן להם (ראו את עבודתה של קייסי באיור 10).

כאשר המראיין הציג את המשימה על דף נייר, עם הסימון הדיגיטלי 7:00 בצדו השמאלי של הדף, קייסי קראה את הזמן במהרה "השעה 7". המראיין הסב לאחר מכן את תשומת לבה של קייסי לצדו הימני של הדף ובו מלבן ריק ומעליו מודפסות המילים "בעוד שעה וחצי?" ושאל, "מה תהיה השעה בעוד שעה וחצי?" קייסי ווידאה "וחצי אחד?" ורשמה "8:30" במלבן. לאחר מכן המראיין ביקש שתסביר את חשיבתה.



איור 9: הפתרון של קייסי לבעיית המיקוד.

קייסי: אה, זה אמר שעה, אז מיד, כאילו, מיד ידעתי שה-7, זה לא יישאר 7 אם כתוב שעברה שעה. אז שינית את זה ל-8. ואז זה אמר "חצי" ושמתי 30. אני חושבת, אני לא יודעת אם זה נכון. אבל אני חושבת שזה יהיה 30 כי, כמו שאמרתי קודם, יש 60 דקות. אז שישים לחלק לחצי יהיה 30.

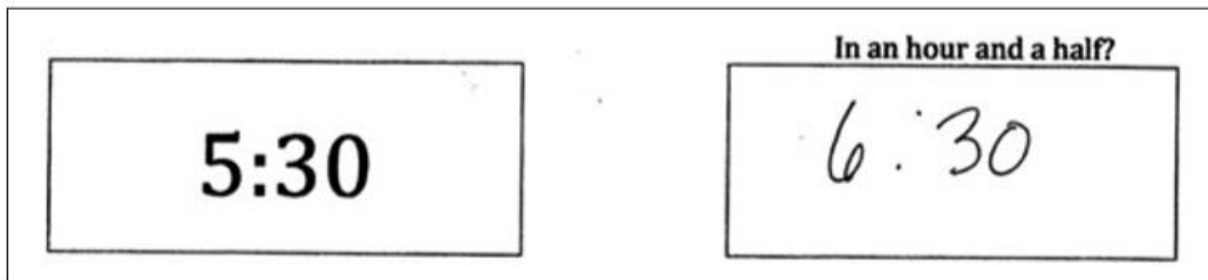
בדומה לבלייק, גם קייסי התייחסה תחילה למה שקורה בעקבות השעה שחלפה, כשתשובתה מדגימה את הבנתה כי אם חלף זמן רב יותר או שווה לשעה אחת, אז ספרת השעות בסימון הדיגיטלי תשתנה. בהסבר שלה, קייסי הציגה יחידות שקולות מתמטית של חצי (שעה) ו-30 (דקות), כך שנרמזת הבנה בנוגע להמרה זו. קייסי הגיעה לתשובה נכונה במשימה, על אף שביטאה ספק בנוגע לדיוק שלה ("אני לא יודעת אם זה נכון").

כדי לחשוף יותר את השיקולים שהפעילה קייסי, אני מתייחס למשימה נוספת לקראת סוף הריאיון שבה ניתן משך זמן שחלף זהה. במסגרתה, הוצג לקייסי הזמן הדיגיטלי 5:30 ולאחר שקראה אותו בהצלחה בקול, קייסי נשאלה מה תהיה השעה בעוד שעה וחצי. מיד, ועם מידה מסוימת של ספקנות, היא אמרה:

קייסי: אז, שעה וחצי. אה, חכה, שעה אחת וחצי אחד? [תורגם מ: An hour and a half].

בדומה למשימת המיקוד שתוארה לעיל ("חצי אחד?") קייסי נראתה מופתעת ממשך זמן זה. המראיין אישר "שעה אחת וחצי אחד", ולאחר שחשבה לרגע, קייסי כתבה "6:30" במלבן שיועד לכך (איור 11). לאחר מכן ביקש המראיין שתסביר כיצד פתרה את המשימה.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation



איור 10: הפתרון של קייסי למשימה עם זמן ההתחלה של 5:30 וזמן שחלף של שעה וחצי.

קייסי: פתרתי את זה ב"שעה אחת". [מחווה לביטוי "שעה אחת" שהודפס בתור הזמן שחלף] אז צריך היה להוסיף שעה אחת ל-5. [מחווה על ה"5" (איור a12)] כש, זה נתן לי 6. ואז חצי שעה אחת [מחווה ל"וחצי" שהודפס בתור הזמן שחלף (איור b12)] זה 30 דקות, אז פשוט שמתתי שם 30, וקיבלתי 6:30.

בהתאם למשימת המיקוד, גישת הפתרון של קייסי מעידה על כך שהיא שוקלת תחילה את השעה ("אז צריך היה להוסיף שעה אחת ל-5") לפני שהיא ניגשת לדקות ("ואז חצי שעה אחת..."). לאחר מכן היא התייחסה למילה "וחצי" ולשקילות בין חצי שעה ו-30 דקות, כדי לפרש את ה"וחצי" כאינדיקטור לזמן הסיום "x:30" ("ואז חצי שעה אחת זה 30 דקות, אז פשוט שמתתי שם 30, וקיבלתי 6:30"). כדי להרחיב את ההסבר בנוגע לגישת הפתרון שלה, קייסי הרהרה ברעיון אשר, כפי שהיא אמרה, היא הרגישה שהיא כבר הבהירה במהלך הריאיון בנוגע לשקילות בין שעות ודקות.

קייסי: ואה... אני שוב חוזרת על זה, אבל אני יודעת ש-30 ועוד 30 שווה ל-60, ויש 60 דקות בשעה אחת, אז אני חייבת לעשות את זה. כי לא היית עושה, כאילו, 6:20, בגלל שזה לא יהיה, כאילו, "וחצי".

כאשר אמרה "וחצי" היא החוותה בידה תנועה שמדמה חצייה של משהו לשניים. לאחר מכן, נראה כי היא עושה שימוש בייצוג של שעון אנלוגי, על אף שלא היה כזה בנמצא, נראה היה שקייסי מדמיינת שעון שמונח על גבי השולחן ועל גביו החוותה על ה-12 ו-6:

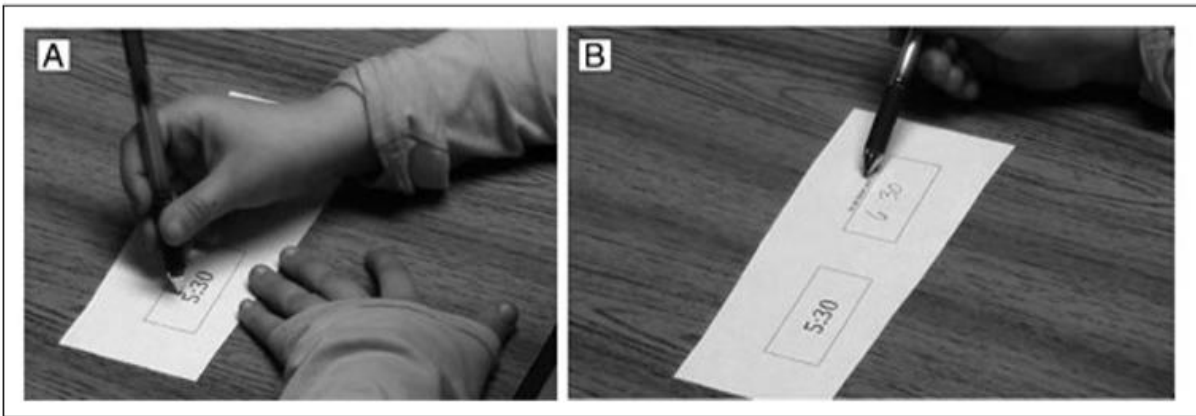
קייסי: "בגלל שהשעון הוא, כאילו, בעיגול. זה ה-12 [איור a13], וזה ה-6 [איור b13], וחצי מ-6 זה 3."

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

כאשר אמרה "12" ו-"6", היא הצביעה לעבר מה שנראה כמיקומים על אותו שעון דמיוני (איור 13), למרות שלא הצביעה לעבר מקום מסוים כאשר אמרה "3". (בהתבסס על ראיונות אחרים, ייתכן שהתכוונה באמירה "3" ל-30 הדקות שמהוות חצי מ-6, אם כי אין לכך גיבוי בנתוני הריאיון איתה). מאחר שקייסי הצליחה בכל יתר משימות הזמן שחלף, להוציא אחת נוספת – ולפיכך הפגינה מסוגלות בתחום זה – ניסה המראיין להבהיר עוד יותר את אופן חשיבתה בכך שהציע לה בעיה חלופית. בהתייחסו לזמן ההתחלה המקורי של 5:30, שאל המראיין:

מראיין: יש לי שאלה אליך... השאלה הזו [מחווה לדף הנייר] שואלת בנוגע לשעה וחצי, נכון? אז מישהו אמר לי שאם שעה אחת חולפת [מ-5:30], רק שעה אחת, זה יהיה שש וחצי. מה דעתך?

קייסי: אני חושבת שזה נכון. בגלל שכל מה שאתה צריך לעשות בעצם זה להוסיף שעה אחת.



איור 11: צילומי סטילס מהקלטת הווידאו בהם קייסי מחווה ל-(a) ה-"5" של 5:30, ו-(b) הביטוי "וחצי" עבור הזמן שחלף.

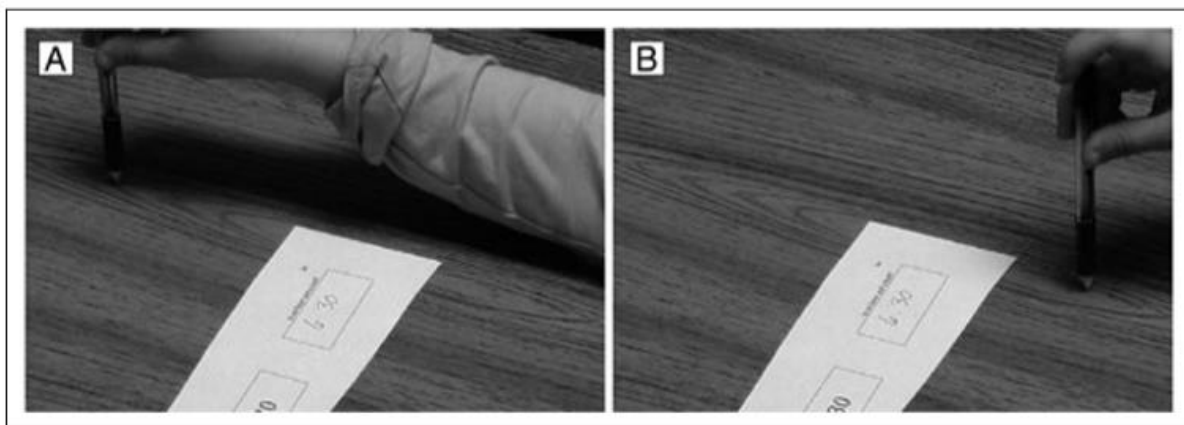


Figure 13. Casey first described a clock and then gestured to positions for (a) the 12 and (b) the 6.

איור 12: קייסי תיארה תחילה שעון ולאחר מכן החוותה למיקום של (a) ה-12 ו-(b) ה-6.

קייסי הסכימה ללא היסוס עם הפתרון שהציע המראיין לבעיה החלופית. למרות האישור שלה ש-5:30 ועוד שעה זה 6:30, היא מיד הצדיקה מחדש את תשובתה המקורית ש-5:30 ועוד שעה וחצי גם שווה ל-6:30 (איור 11). בניסיון הצדקה זה, היא הסבירה שוב את גישתה ל"שעה וחצי" שבמסגרתה היא מתמודדת ראשית עם ה"שעה" לפני שהיא מתמודדת עם ה"חצי" מבלי שנראה שהיא משלבת בין השניים. בכך, היא סיפקה באופן ספונטני את הרציונל שלה לפיו, למרות העובדה שאנשים מסוימים עשויים לחשוב שזמן הסיום אמור להיות 7:00 – התשובה הנכונה – היא יודעת שזמן זה נגמר ב"30".

קייסי: אני חושבת שחלק מהאנשים חושבים שאם נכתב שעה וחצי, שצריך להוסיף, כאילו, שלושים [מחווה ל-3 ברישום 5:30 שסופק] ועוד שלושים שווה שישים, ואז זה [התשובה] יהיה [השעה] שבע. אבל אני פשוט לא חושבת שזה יהיה נכון. בגלל שכל מה שאתה בעצם עושה זה מוסיף את השעה, ואז את החצי. אתה פשוט באופן אוטומטי יודע שזה [התשובה] שלושים.

מראיין: וזו הסיבה שבגללה יש לך "30" פה? [מחווה לתשובתה הכתובה, "6:30"]

קייסי: אה הא.

עבור קייסי, ה"וחצי" שהודפס על גבי דף הנייר הוביל ליישום של כלל: כאשר הזמן שחלף הוא "שעה וחצי" הזמן הסופי נגמר ב"30". עבור קייסי, שלא היה לה כלי שבו משך הזמן הומחש כמרחק, הזמן שחלף (שעה וחצי) קבע את הדקות בזמן הסופי באופן בלתי תלוי מהזמן ההתחלתי. בהלימה עם ביצועיהם של אסטר ובלייק, הכלל של קייסי משקף הבנה חלקית של יחידות השעות והדקות, שלא משקפת את הקשר המתמטי ביניהן. למעשה, נראה שקייסי מקבלת את הרעיון ש-5:30 ועוד שעה אחת שווה ל-6:30, וש-5:30 ועוד שעה וחצי גם שווה ל-6:30, דבר שעלול לרמוז כי עבור קייסי המשימה הייתה מטלה פרוצדורלית ולא משימה המייצגת זמן במציאות. באופן מעניין, משימה נוספת זו הייתה רק אחת מתוך שתיים בהן נתנה קייסי תשובה שגויה, כלומר במרביתם המכרעת של המקרים תשובתה בראיון הייתה נכונה. עבור משימות בהן הזמן שחלף היה "חצי שעה" (למשל, 9:30 ועוד "חצי שעה"), קייסי סיפקה זמן סיום מדויק (10:00). לפיכך, לא נראה כי הכלל של קייסי תקף לכלל המשימות בהן מופיעה המילה "חצי" במסגרת הזמן שחלף הנתון. בדומה לבלייק, נראה שגם לקייסי ישנן מספר שיטות לא אחידות לקביעת הזמן שחלף, ולא נראה כי חוסר האחידות שבין השיטות הטרידה אותה. קייסי ביטאה גישה לפתרון בעיות שבמסגרתה הפרידה בין השעות והדקות לצורך חישובים, אולם ללא מאמץ לחבר או לפצל את היחידות הקשורות זו לזו.

דין

אחת המטרות של מחקר זה היא לבחון כיצד תלמידים פותרים בעיות של זמן שחלף, והאם הכלי שזמין להם יגרור גישות שונות לפתרון הבעיות. במחקר זה, ביצועי התלמידים היו שונים בין שלושת תנאי המחקר שכללו שימוש בכלים שונים, דבר המרמז כי תכונות שונות של שעונים שונים מתווכות באופן שונה את פתרון הבעיות.

בדין זה, אתייחס ראשית לממצאים הקשורים לשימוש בכלי ולקשר בין היחידות שעות ודקות, שבאו לידי ביטוי בשלושת תנאי המחקר ובמסגרת שלוש חקרי המקרה. לאחר מכן, אתייחס להשלכות של המחקר בנוגע לשימוש בנושא ציר המספרים כבעל פוטנציאל לתמוך בלמידת זמן ביחידות סטנדרטיות, ובאופן רחב יותר לנחיצות תאוריה קוהרנטית בנוגע להבנת זמן שמשלבת בין קשרים זמניים וזמן ביחידות המקובלות. אסיים את המאמר בהתייחסותי להשלכותיו בנוגע לשילוב של למידת הזמן בתכנית הלימוד.

משימות זמן שחלף והתפקיד המתווך של תכונות השעון

ההבדלים בין ביצועי התלמידים בתנאי המחקר השונים שדווחו לעיל מעידים כי פתרון הבעיות התפתח באופן שונה, כתלות בכלי הזמין, בהלימה לכך שכל כלי שיקף יחידות וקשרים בין יחידות באופן מסוים. אני מזכיר כי לכל תנאי הוקצה טווח דומה של תלמידים אולם תלמידים שצוותו לאחד מהתנאים הפגינו ביצועים שונים באופן מובהק סטטיסטית מאילו שצוותו לשניים האחרים. תוצאה זו מרמזת כי הבנתם של התלמידים בנוגע לנושא הזמן וזמן שחלף באה לידי ביטוי באופן שונה, הקשור לתכונות המיוחדות של השעון הספציפי שהיה זמין להם.

באופן כללי, תשובות נכונות עבור תנאי B – השעון בעל המחוגים הבלתי תלויים – היו באופן משמעותי שכיחות פחות מאשר עבור שני התנאים האחרים. למרות שהמסקנה האפשרית מכך היא שעדיף שהוראה תספק לתלמידים כלים בעלי סיכוי גבוה יותר לתמיכה בהצלחה במשימות כאלה (למשל, שעון אנלוגי עם מחוגים מחוברים וסימון דיגיטלי) מסקנה כזו תפשט יתר על המידה את המשמעות של תוצאות אלה. בכל אחד משלושת התנאים, הילדים הפגינו מיומנות במוסכמות החברתיות הקשורות לנקודות ציון של המרות מספריות וספירה בחמשות מסביב השעון. אולם, קשרים בין יחידות השעות והדקות בוטאו באופן שונה בין כלי לכלי. ייתכן, שמידת הצלחתם של התלמידים בראיונות קשורה לתכונות החומריות של מחוגים מחוברים (תנאי A), או הכרות עם מספרים שמאפשרת הכתיבה הדיגיטלית (תנאי C), ולא התפיסה שלהם בנוגע לטיפול ביחידות וקשרים בין יחידות. במקום לטעון כי השעון האנלוגי בעל מחוגים בלתי תלויים הוא ככלי עזר פחות מתאים להוראה, בהסתמך על בסיס הביצועים הנמוכים יותר שהפגינו הילדים בשימוש בו, תוצאות אילו עשויות להעיד כי מחוגים מחוברים וסימון דיגיטלי למעשה עושים עבור התלמידים חלק מהעבודה המתמטית הקשורה לקשרים בין יחידות וזהו ההסבר לכך שמשותפי המחקר שנעזרו בהם ענו נכונה על מספר גדול יותר של משימות.

שלושת המקרים שהוצגו בפירוט במאמר מצביעים על אתגרים שילדים חווים בהקשר של זמן ובמיוחד ממחישים כיצד תלמידים בכל תנאי מתמודדים עם הקשר בין שעות ודקות. יחד, המקרים משרתים אותנו בכך שהם מספקים אוסף נתונים תיאוריים עשיר בנוגע לאופן שבו תלמידים – גם כאשר עברו כבר את שלב הלימוד הרלוונטי – נעזרים בשקילות המספרית של שעות ודקות אולם אינם מיישמים את ההשלכות המתמטיות של שקילות כזו בפתרון בעיות. אתייחס תחילה למידע שחשף כל תנאי בנוגע להצלחות התלמידים. לאחר מכן אתאר כיצד כל אחד משולשת התנאים סיפק מידע בנוגע לאתגרים שחווים תלמידים.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

כל אחד משלושת התלמידים שנחקרו בשלושת המקרים הדגימו הבנה מדויקת כלשהי הקשורה לזמן. בפרט, אני מצוין שני רעיונות שונים: ספירה בחמשות כדי לקבוע דקות בשעון האנלוגי והשקילות של שעה אחת ו-60 דקות, וחצי שעה עם 30 דקות. ראשית, גם אסטר וגם בלייק התייחסו לספירה בחמשות, דבר המרמז כי הם הבינו כיצד להיעזר בתכונות השעון כדי לקבוע את מספר הדקות בנקודות שונות בשעון. קייסי אמנם לא התייחסה לספירה בחמשות, אולם תכונות הסימון הדיגיטלי לא הדגישו באופן בולט את ההיבט הזה כפי שהדגיש זאת השעון האנלוגי. שנית, נראה שהתלמידים מיומנים היטב בשקילות של שעה ו-60 דקות. למעשה, קייסי אף ביטאה תחושה של תסכול במידה מסוימת כאשר הסבירה במסגרת תשובתה הלא נכונה "אני כל הזמן חוזרת על זה, אבל אני יודעת ש-30 ועוד 30 שווה 60, ויש 60 דקות בשעה." באופן דומה, בלייק אמר כי "חצי שעה זה 30 דקות" בעוד שאסטר תרגם ללא קושי את ה"חצי" בכרטיס ל-30 דקות. שלושת המקרים מצביעים על כך שתלמידים בכיתה ד' מיומנים בשימוש בשעון אנלוגי כדי לספור בחמשות, ומדגימים הבנה של שקילות בין שעות ודקות. באופן מעניין, שתי המיומנויות קשורות לשימוש בשעון, אולם אינן מיוצגות בו באופן שתלוי במיקום של כל אחד ממחוגיו.

בו בזמן, המקרים גם מדגימים שתלמידים עלולים להיות זקוקים לתמיכה נוספת כדי להבין כיצד יחידות השעות והדקות קשורות זו לזו. בפרט, פתרון הבעיות של התלמידים לא ביטא חשיבה הקשורה ליחס הכפלי שעומד בבסיס השקילות המספרית המקובלת. בכל חקר מקרה תואר תלמיד כיתה ד' אשר לפי הסטנדרטים (NGA Center for Best Practices & CCSSO, 2010) אמור היה כבר לשלוט היטב בנושא הזמן בטרם סיים את כיתה ג. ואולם, ללא תלות בתנאי המחקר, כל אחד מהתלמידים פתר בעיות תוך התייחסות נפרדת לשעות ולדקות.

תנאי A כלל שימוש בשעון אנלוגי עם מחוגים מחוברים. תכונות שעון זה, יצרו תנאים שחשפו את החוק של אסטר הגורס כי יש 'לדייק' בפירוש מחוג השעות. חוק הדיוק שלו הוביל לפרשנות שגויה של 7:00 שלא שיקפה את מיקומם של מחוגי השעות והדקות. גם אם מיקום מחוג השעות היה אכן 'מעט לפני' 7, כפי שפירש אסטר, הרי יחסי החלקי-שלם גוררים שהשעה שהשעון מורה קרובה מאד לסופה של השעה שש (למשל 6:59). אסטר התייחס למרווח בין 6 ל-7 כמיכל אחיד של השעה כולה, וככל הנראה באופן בלתי תלוי מכך, פירש את מיקום מחוג הדקות. למרות שהמיקום המדויק של מחוג השעות עלול להיות מאתגר בשעון כה קטן, בעיקר בהתחשב בגודל הגדול של כל ספרה והמציינים הקטנים יותר על היקף השעון המתאימים לכל ספרה, הפרשנות של אסטר טיפלה בשעות ובדקות ללא ניסיון נראה לעין לקשר ביניהן.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

במקביל, תנאי B כלל שימוש בסוג שונה של שעון אנלוגי, שעון בעל מחוגים בלתי תלויים. בתנאי זה, המשתמש יכול לשלוט במדויק במיקום של שני המחוגים. בלייק השתמש בשעון זה ובפתרון משימת המיקוד אמר מילולית את התשובה הנכונה "8:30". אולם, הוא מיקם את מחוגי השעון כך שמחוג השעות פנה בדיוק אל הספרה 8. בהתבסס על הקשר בין שעות ודקות, סידור מחוגים ספציפי זה איננו אפשרי באופן שבו השעון הסטנדרטי מציג זמן. בהמשך, התכונות החומריות של השעון אפשרו לבלייק להתייחס ואפילו לבנות תאוריה מתפתחת בנוגע להתנהגות השעון ולקיום קשר בין מחוגיו, אולם תאוריה זו עדיין לא ביטאה נכונה את יחסי השעות-דקות: מחוג השעות מצביע על ספרה ונשאר במקומו עד חלוף חצי שעה, ובנקודה זו המחוג נע לאמצע המרווח של השעה. על אף שנדרש מחקר נוסף כדי להבהיר מתי וכיצד תאוריה זו תקפה לקריאת שעון, אציין כי בלייק לא היה המרואיין היחיד בתנאי זה שביטא את הרעיון הנ"ל. לפיכך, נראה כי תכונות השעון היו אלה שאפשרו בנייה של תאוריה זו, אשר איננה משקפת נכונה את יחסי השעות-דקות.

לסיום, תנאי C כלל שימוש בסימון דיגיטלי שאיננו ממחיש באופן גאומטרי משך זמן. תוך כדי פתרון הבעיות, קייסי התבססה על רמזים בתוך משך הזמן שחלף הנתון, במיוחד על ה"וחצי" כאינדיקציה לכך שזמן הסיום אמור לכלול "30". כאשר זמן ההתחלה היה שעה עגולה, טעות זו לא הייתה בולטת ולמעשה הובילה לתשובה נכונה. אולם כאשר זמן ההתחלה כלל מחצית שעה, הפתרון של קייסי – ש-5:30 ועוד שעה וחצי הוא 6:30 – רמז על הבנה חלקית של זמן בהקשר של האופן שבו דקות ושעות קשורות זו לזו. כלל ביצועיה של קייסי מרמזים כי היא יישמה מגוון רעיונות בנוגע לזמן אשר לעתים קרובות הובילו לתשובה נכונה. אולם, התשובות השגויות של קייסי מעידות כי יישמה אסטרטגית פתרון בעיות שהייתה בסתירה עם הקשר המתמטי בין היחידות, סתירה אשר לא נראה שקייסי הבחינה בה.

בהתבסס על נתונים אילו, הממצאים שפורטו לעיל מעידים כי, למרות שנראה כי התלמידים עושים שימוש במוסכמות חברתיות כגון השקילות בין 60 דקות ושעה 1 כמו גם ספירה בחמשות מסביב לשעון, הקשר הכיפלי בין יחידות השעות והדקות מאתגר הרבה יותר.

השלכות

הדרכים השונות בהן תלמידים פתרו את הבעיות, כולל שלושת חקרי המקרה התיאוריים, חושפים הצלחות, כמו גם אתגרים שתלמידים נתקלים בהם בעת חשיבה לרוחב יחידות הזמן. אולם, האתגרים שחשפו חקרי המקרה עשויים להיחשב לא מהותיים אם אנו תופסים את המטרה הסופית

של הוראת נושא הזמן כ"קריאת שעון". לעומת זאת, כהנחת יסוד במחקר זה, אני טוען כי הבנת נושא הזמן שכוללת הבנה של יחסי שעות-דקות היא רחבה הרבה יותר מפרוצדורות לקריאת שעון וראויה להוות המטרה הסופית של הוראת הנושא. תחת עדשה זו, אני דן בהשלכות תאורטיות, והשלכות עבור תכנית הלימוד והוראה.

השלכות תאורטיות.

עיצוב המחקר הנוכחי נשען על הגישה הסוציו-תרבותית כדי למצב את ההבנה המתמטית של תלמידים אשר קשורה באופן שלא ניתן להפרדה לכלים שסופקו להם ונעשו נפוצים הן בחיי היום-יום והן במצבים לימודיים (Sfard, 2007, 2008; Vygotsky, 1978). התייחסות זו איפשרה חקירה המעוגנת בתיאוריה על האופן שבו תלמידים פותרים בעיות שכוללות זמן שחלף בהקשר של כלי עזר שניתן להם. כדי למקם את ההבנה המתמטית של ילדים בנוגע לקשר בין שעות ודקות בהקשר תאורטי גדול יותר, אציג בהתחלה הקשר מתמטי נוסף - צירי מספרים, הכולל שילוב של רכיבים גאומטריים ומספריים באופן דומה לשילוב המאפיין מבנה של השעון האנלוגי. לאחר מכן, אציג את החיתוך בין תחום הקשרים הזמניים, עם הוראה ולמידה של נושא הזמן.

ההבנה של ילדים את תכונות ציר הזמן עשויה להכין אותם היטב להבנת מאפייני השעון האנלוגי. כפי שהוזכר לעיל, השעון האנלוגי ממחיש משך זמן כאורך, ומתוך שכך טיפול דיסציפלינרי של יחידות ומרווחים על השעון הוא בהלימה עם זה של ציר המספרים. בעבודה קודמת, בחנתי כיצד ילדים מפרשים תכונות גאומטריות ומספריות של ציר המספרים וכיצד הגישה בה נקטו היתה בהלימה עם האופן בו פרשו גרפים של פונקציות (Earnest, 2015a). מצאתי כי ילדים מפרשים ייצוגים עם מבנים אחידים באופן דומה לצורך פתרון בעיות. במילים אחרות, ילדים אשר יישמו טיפול המשלב רכיבים גאומטריים ומספריים של ציר המספרים (דהיינו, יישמו עקרונות של מרווחי יחידה גם כאשר ציר המספרים כלל חלוקות לא שוות) נטו לעשות כך אם גם השוו נכון שני גרפים של פונקציות עם קנה מידה שונה, גם אם לא עברו הוראה ישירה קודמת על גרפים של פונקציות. לחילופין, אלה שהשתמשו בסימונים על גבי הציר כדי לספור מבלי לתאם זאת עם המרווחים הגאומטריים, בסבירות גבוהה גם פרשו גרף של פונקציה באופן בלתי תלוי בקנה המידה הנתון של הצירים, והסתמכו על המגמה של הקו במישור או ספירה של משבצות. ממצאים אילו עולים בקנה אחד עם מחקר על מדידת אורך, המדגיש את האופן שבו ילדים מפתחים את היכולת לשלב מרווחים, סימונים על גבי ציר, ומספרים על גבי כלי מדידה (Barrett et al., 2012). הנתונים שהוצגו

במחקר הנ"ל אינם דנים בשאלה האם ילדים מתייחסים לשעון אנלוגי כפי שהיו מתייחסים לציר מספרים, מה שמצביע כי מחקר נוסף דרוש בתחום זה.

השלכה תאורטית נוספת מעידה על הצורך בשילוב של תאוריות הקשורות לפסיכולוגיה התפתחותית כדי לפתח תאוריה קוהרנטית להבנת מושג הזמן. היזכרו בשגיאות המתמטיות של אסטר וקייסי בהקשר של זיהוי זמן וזמן שחלף: 6:30 הוא חצי שעה אחרי 6:00, לא לפני כן, ו-5:30 ועוד שני משכי זמן שונים (שעה 1 או 1.5 שעות) אמור להוביל לשני זמני סיום שונים. שיקולים אלו לא הועלו על ידי אסטר וקייסי, ובאופן רחב יותר מתקשרים להבנה של קשרים זמניים. לפיכך, השלכה תיאורטית של מחקר זה היא שיש לשלב מחקר בנוגע לקשרים זמניים (למשל Fivush & Mandler, 1985; Harner, 1982; Levin, 1989; Piaget, 1969; Richards, 1982), כגון פיתוח רעיונות של עבר, הווה ועתיד, עם התייחסות לזמן ביחידות סטנדרטיות, כדי להתקדם לעבר תאוריה ממצה של התפתחות קונספטואלית של נושא הזמן ביחידות סטנדרטיות. למרות שמחקר בפסיכולוגיה התפתחותית הצביע על אתגרים שילדים חווים בבידוד מימד הזמן מגורמים בולטים אחרים, בעיקר מרחביים (Kamii & Russell, 2010; Richards, 1982), מיקוד דומה חסר באופן כללי מההתייחסויות לנושא הזמן ביחידות סטנדרטיות. במחקר הנוכחי, רעיונות של קשרים זמניים לא נתפסו כמשאבים לפירוש רמת הסבירות של תשובות, למרות שהשאלה האם רעיונות אילו היו לא זמניים, או זמניים אם כי לא בשימוש, נותרה ללא מענה. כחיזוק למסקנות של Russell ו-Kamii (2012), אני טוען כי כיתות מוקדמות בבית ספר יסודי עלולות להיות מוקדמות מדי עבור תלמידים להיאבק עם תיאום יחידות בשעון אנלוגי, מכיוון שמחקר על התפתחות של קשרים זמניים מעיד על כך שילדים בגיל זה טרם מבודדים זמן כמידה נפרדת מתכונות ויזואליות ומוחשיות של מאורע, כגון אורך או מיקום פיזי.

תכנית לימוד והשלכות הוראתיות. לטענתי, תלמידי שלושת חקרי המקרה – אסטר, בלייק וקייסי – היו ערוכים טוב יותר לחשיבה על זמן וזמן שחלף, אילו תפיסות הזמן שלהם היו מושרשות בהבנה מבוססת יותר של קשרי שעות-דקות. אני מעלה כאן השלכות עבור תכנית לימוד והוראה שיקדמו זאת.

בגלל ששעונים דיגיטליים כה נפוצים, על המטרות ההוראתיות לנוע מעבר לקריאת זמן בשעון. בדיוק כשם ששימוש מיומן במחשבון לא משקף הבנה של מספרים של המשתמש, קריאה מיומנת של שעון איננה משקפת הבנה של נושא הזמן. לצורך אחידות בין כיתות, אני טוען שעל הטיפול ההוראתי שלנו בנושא הזמן למצב את הסיבות ללימוד זמן בהקשר מתמטי רחב יותר של כיתות

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

א'י"ב. ההסתכלות הרחבה הזו תוכל לאפשר שהתכונות הגאומטריות והמספריות של שיעון אנלוגי יסייעו גם בעבודה עתידית של ילדים הכרוכה בייצוגים גאומטריים נוספים של כמויות, כולל גרפים של פונקציות או כל מודל מדעי אחר שמכיל התקדמות בזמן (למשל, הסבר לשינוי בצללים לאורך יממה).

אם הכלים בהם אנו משתמשים בבית הספר עבור זמן מתווכים פתרון בעיות בדרכים שונות, עלינו לחשוב היטב על הכלים בהם אנו משתמשים בהוראה ומדוע, מתי ואיך אנו מציגים אותם. במילים אחרות, כיצד אנו נשענים על שעונים בהוראה ובאיזה אופן הדבר מתקשר לזמן שחלף והיחס בין שעות ודקות? מחקרים וספרות מקצועית מספקים דוגמאות כיצד ניתן לעשות שימוש בפני השעון האנלוגי כשטח שמהווה מודל שיתמוך בהבנה של ילדים את נושא השברים (ראו Chick, Tierney, & Storeygard, 2007) או כיישום של כפולות ה-5 (ראו Hatfield, Edwards, Bitter, & Morrow, 2000). למרות ששעון עשוי להיות כלי יעיל לפיתוח רעיונות אילו, עלינו להיות מודעים לכך ששימושים אילו במסגרת הוראה עלולים אמנם לקדם רעיונות מסוימים, אם כי לא בהכרח יתמכו בפיתוח רעיונות מתמטיים הקשורים לזמן שחלף או יחסים של שעות-דקות. כלומר, למרות שמתאפשרים בעזרתם תהליכי חקירה מעניינים של רעיונות מתמטיים, השימוש בשעון באופן כזה, רחוק מלהמחיש ולהדגיש את הקשר הכיפלי בין היחידות שמיוצגות בשעון.

בנוסף, יש לשלב בין למידה על רעיונות הקשורים לנושא הזמן עם חוויות מוכרות של משך זמן. חשבו על המקרה של אסטר, אשר פרש תחילה את הזמן כ-6:30 אך גם אמר שחצי שעה מאוחר יותר תהיה השעה 6:00. במקרה זה, לא נראה כי אסטר חווה קונפליקט כלשהו בנוגע לרעיון שעל פי תשובתו, 6:00 מאוחר בחצי שעה מ-6:30, בדיוק כפי שקייסי לא נראתה מוטרדת בנוגע לתשובתה ש-5:30 ועוד שעה אחת או שעה וחצי שניהם הובילו ל-6:30. ללא הוראה של זמן שמעוגנת בחוויה ומדידה של משכי זמן, עלול להיות חוסר בכלים קונספטואליים לתלמידים כמו אסטר וקייסי שיאפשרו להם להעריך את הסבירות של תשובות כדוגמת אלה. כשם שלא נצפה שילדים יפתחו הבנה מעמיקה של אורך בלי הדגשה והתנסות בתכונה זו של עצם, הרי זה בסתירה לתאוריות של התפתחות קוגניטיבית לצפות כי ילדים יפתחו הבנה מעמיקה של נושא הזמן מבלי להמחיש זאת במשכי זמן, בדגש על מצבים בחיי היום-יום שזמן מודד. בניגוד לאורך זמן איננו יחידה מוחשית, לכן יש חשיבות מיוחדת להדגיש עובדה זו ולהתייחס אליה.

מבחינת השלכות בנוגע לתוכנית הלימודים, ממצאי מחקר זה מעודדים שילוב של הוראת נושא הזמן במסגרת סדרה רחבה יותר של הוראת מספר נושאים הקשורים ל"מדידה", אשר תתפרש

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

לאורך כלל כיתות בית הספר היסודי. לעת עתה, תוכנית הלימודים ואופני ההוראה מכוונים תלמידים להתמודד עם נושא האורכים לאורך כיתות א-ג, ולאחר מכן שטח ונפח בכיתות גבוהות יותר בבית הספר היסודי (Lehrer, 2003; NGA Center for Best Practices & CCSSO, 2010; Sarama & Clements, 2009; Sarama, Clements, Barrett, Van Dine, & McDonel, 2011). למרות שישנו צורך במחקר נוסף, תוצאות מחקר זה מרמזות כי חקר מדידת הזמן יכול להיות משולב בתכנית הלימוד אחרי עבודה עם אורכים, בפרט אחרי כיתה ג' שבה ילדים נדרשים לשלב הבנה בנוגע למרווחים ונקודות ציון עם רעיונות מבוססי-יחידה, במסגרת למידת הנושא מדידת אורכים (Barrett et al., 2012). השלכות אלה קוראות תיגר על מיקומם הנוכחי של נושאי הזמן והאורך בתכנית הלימוד העדכנית של כיתות א'-ג'. לדוגמה, למרות שייתכן כי תלמידים בכיתה ב' יכולים להתמודד עם הנוהגים התרבותיים של עמידה בלוח זמנים בסימון דיגיטלי או מוסכמות חברתיות הקשורות לאירועים של לפני או אחר הצהריים, כיתות גבוהות יותר בבית הספר היסודי יכולות להיות מקום מתאים יותר בתוך סדרת הלימוד של כיתות א'-י"ב למיקום התמודדות עם משכי זמן ויחסי שעות-דקות. בכך, תלמידים, עם תמיכתם של תכנית הלימודים וההוראה, יכולים לשלב רעיונות מתפתחים בנוגע לזמן עם יחסי החלקי-שלם של שברים. הבנת הזמן והיחידות שמקובלות לתיאורו, תוכלנה לשמש תלמידים כמשאב אינטלקטואלי מרכזי גם בהמשך לימודיהם, כמו גם במסגרת חקירת תופעות בעולם שסביבם.

מגבלות

אני מציין שלוש מגבלות למחקר הנוכחי. ראשית, חקרי המקרה שיקפו תלמידי כיתה ד' עם הישגים ממוצעים, לאור המאמצים לבחירתם שתאמו את המתודולוגיה ההוליסטית של חקרי מקרה מרובים (Yin, 2009). עם זאת, ניתוח הנתונים שתואר לעיל לא כלל דיווח בנוגע לעד כמה נרחבים היו הרעיונות הספציפיים שביטאו אסטר, בלייק וקייסי, בקרב יתר משתתפי המחקר, וניתוח נוסף צריך להיעשות כדי לבחון עד כמה מייצגים היו רעיונות ספציפיים אילו.

שנית, עיצוב המחקר לא כלל התייחסות לחוויה של משכי זמן. לעתים קרובות מדי, טיפול בנושא הזמן בהוראה מנותק ממשכי זמן, ולכן הוא מבודד את המערכת הייצוגית של הנושא מחוויות יומיומיות בעולם האמיתי אותן היא נועדה למדוד. המחקר הנוכחי איננו יוצא מכלל זה: למרות שהוצגו לתלמידים בעיות הקשורות לזמן שחלף, החוויה של משך הזמן לא הייתה רכיב בעיצוב המחקר. מסיבה זו, יש לפרש את הממצאים שדווחו לעיל בהקשר של סימון וכלים אולם ללא חוויות משך הזמן (ובהיעדר כלי מדידת זמנים אחרים כגון סטופרים).

שלישית, המחקר הנוכחי לא דן בתפקיד התרבות והשפה. והרי, בדיוק כשם שבארה"ב ישנם מנהגי התייחסות מילולית לזמן מסוים שחלף ביחס לשעה עגולה (למשל, רבע אחרי שמונה: "quarter past 8") או לשעה ביום על ידי שימוש ביחידות השעות והדקות יחד (למשל 10 אחרי 8: "10 past 8"), שפות שונות בעולם כוללות דרכים מגוונות להתייחס ולחשוב על זמן (ראו Burny, Valcke, 2000), שפות שונות בעולם כוללות דרכים מגוונות להתייחס ולחשוב על זמן (ראו Desoete, & Van Luit, 2013; Lakoff & Núñez, 2000). באופן אידיאלי, מחקר עתידי יהפוך לאופרטיבי את תפקיד השפה והתרבות כך שניתן יהיה לבחון כיצד אלה קשורים להתפתחות הקוגניטיבית בנוגע למתמטיקה של נושא הזמן.

הערות מסכמות

נושא הזמן מהווה מרכיב מרכזי של תכנית הלימודים לכיתות הראשונות בבית הספר היסודי, והיה כזה לאורך זמן לפחות מאז שאוסף הסטנדרטים של תכנית הלימוד הוצג לראשונה (NCTM, 1989). ייתכן כי הסיבה לכך היא חשיבות שיוחסה בעיקר לרעיונות התואמים מוסכמות פרוצדורליות וחברתיות הנוגעות לנושא הזמן, ולא למתמטיקה של יחידות זמן והקשרים ביניהן. ואולם, החשיבות של הבנת נושא הזמן לא מתחילה ונגמרת ביכולת לקרוא שעון או לעקוב אחר לוח זמנים יומי.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

משום ששעונים דיגיטליים נפוצים בחיי היום-יום על המטרות ההוראתיות להתקדם מעבר לזיהוי השעה המוצגת בשעון בלבד; בעיקר מאחר שישנם מכשירים רבים שיכולים לעשות זאת עבורנו בקלות. במקום זאת, חקירה של ילדים את הרעיונות הקשורים לזמן צריכה לשרת הבנה של תפקיד יחידות הזמן בחקירה מדעית בתחומי ה-STEM. לפיכך, על מחקר עתידי לאסוף הוכחות בנוגע לשיטות הוראה מבוססות-חקר שמעודדות תלמידים לעסוק באופן פרודוקטיבי במתמטיקה של הזמן. בכך, תוכל הוראת נושא הזמן לספק גישה לרעיונות מתמטיים מדעיים חזקים הנסמכים על מודל קונספטואלי קוהרנטי של נושא הזמן.

רשימת מקורות

- Barnett, J. E. (1998). *Time's pendulum: From sundials to atomic clocks, the fascinating history of timekeeping and how our discoveries changed the world*. New York, NY: Plenum Press.
- Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderma, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 28–54. doi:10.1080/10986065.2012.625075
- Breyfogle, M. L., & Williams, L. E. (2008). Designing and implementing worthwhile tasks. *Teaching Children Mathematics, 15*(5), 276–280.

- Burny, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2009). Towards an agenda for studying learning and instruction focusing on time-related competencies in children. *Educational Studies, 35*(5), 481–492. doi:10.1080/03055690902879093
- Burny, E., Valcke, M., Desoete, A., & Van Luit, J. E. H. (2013). Curriculum sequencing and the acquisition of clock-reading skills among Chinese and Flemish children. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(3), 761–785. doi:10.1007/s10763-012-9362-z
- Chi, M. T. H. (1997). Quantifying qualitative analyses of verbal data: A practical guide. *Journal of the Learning Sciences, 6*(3), 271–315. doi:10.1207/s15327809jls0603_1
- Chick, C., Tierney, C., & Storeygard, J. (2007). Seeing students' knowledge of fractions: Candace's inclusive classroom. *Teaching Children Mathematics, 14*(1), 52–57.
- Cipolla, C. M. (1967/1978). *Clocks and culture, 1300-1700*. New York, NY: Norton.
- Earnest, D. (2015a). From number lines to graphs in the coordinate plane: Investigating problem solving across mathematical representations. *Cognition and Instruction, 33*(1), 46–87. doi:10.1080/07370008.2014.994634
- Earnest, D. (2015b). When “half an hour” is not “thirty minutes”: Elementary students solving elapsed time problems. In T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, & H. Dominguez (Eds.), *Proceedings of the thirty-seventh annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 285–291). East Lansing, MI: Michigan State University.
- Fivush, R., & Mandler, J. M. (1985). Developmental changes in the understanding of temporal sequence. *Child Development, 56*(6), 1437–1446. doi:10.2307/1130463
- Friedman, W. J., & Laycock, F. (1989). Children's analog and digital clock knowledge. *Child Development, 60*(2), 357–371. doi:10.2307/1130982
- Geertz, C. (1973). *The interpretation of cultures: Selected essays by Clifford Geertz*. New York, NY: Basic Books.
- Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 538–563. doi:10.1016/j.jmathb.2013.06.007
- Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 1–18. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.004
- Harner, L. (1982). Talking about the past and the future. In W. J. Friedman (Ed.), *The developmental psychology of time* (pp. 141–169). New York, NY: Academic Press.
- Hatfield, M. M., Edwards, N. T., Bitter, G. G., & Morrow, J. (2000). *Mathematics methods for elementary and middle school teachers*. New York, NY: Wiley.
- Izsák, A., Jacobson, E., de Araujo, Z., & Orrill, C. H. (2012). Measuring mathematical knowledge for teaching fractions with drawn quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 391–427. doi:10.5951/jresmetheduc.43.4.0391
- Jones, D. L., & Arbaugh, F. (2004). Take time for action: What do students know about time? *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(2), 82–84.
- Kamii, C., & Long, K. (2003). The measurement of time: Transitivity, unit iteration, and conservation of speed. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 NCTM yearbook* (pp. 169–180). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kamii, C., & Russell, K. A. (2010). The older of two trees: Young children's development of operational time. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 6–13.
- Kamii, C., & Russell, K. A. (2012). Elapsed time: Why is it so difficult to teach? *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 296–315. doi:10.5951/jresmetheduc.43.3.0296
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, NY: Basic Books.
- Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. E. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 179–192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Levin, I. (1989). Principles underlying time measurement: The development of children's constraints on counting time. In I. Levin & D. Zakay (Eds.), *Time and human cognition* (pp. 145–183). North Holland, the Netherlands: Elsevier.

- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Governors Association (NGA) Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (CCSSO). (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Author.
- Piaget, J. (1969). *The child's conception of time*. New York, NY: Ballantine Books.
- Richards, D. D. (1982). Children's time concepts: Going the distance. In W. J. Friedman (Ed.), *The developmental psychology of time* (pp. 13–45). New York, NY: Academic Press.
- Russell, K. A., & Kamii, C. (2012). Children's judgments of durations: A modified replication of Piaget's study. *School Science and Mathematics, 112*(8), 476–482. doi:10.1111/j.1949-8594.2012.00166.x
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, NY: Routledge.
- Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J., Van Dine, D. W., & McDonel, J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM, 43*(5), 667–680. doi:10.1007/s11858-011-0326-5
- Saxe, G. B., & Esmonde, I. (2005). Studying cognition in flux: A historical treatment of *fu* in the shifting structure of Oksapmin mathematics. *Mind, Culture, and Activity, 12*(3–4), 171–225. doi:10.1207/s15327884mcal23&4_2
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565–613. doi:10.1080/10508400701525253
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511499944
- Siegler, R. S., & McGilly, K. (1989). Strategy choices in children's time-telling. In I. Levin & D. Zakay (Eds.), *Time and human cognition: A life-span perspective* (pp. 185–218). Amsterdam, the Netherlands: Elsevier Science. doi:10.1016/S0166-4115(08)61042-0
- Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences, 4*(3), 259–309. doi:10.1016/1041-6080(92)90005-Y
- Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3–39). Albany, NY: SUNY Press.
- Steffe, L. P. (2001). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 267–307. doi:10.1016/S0732-3123(02)00075-5
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (2nd ed.). Cambridge, MA: MIT Press.
- Williams, R. F. (2012). Image schemas in clock-reading: Latent errors and emerging expertise. *Journal of the Learning Sciences, 21*(2), 216–246. doi:10.1080/10508406.2011.553259
- Yerushalmy, M., & Shternberg, B. (2005). Chapter 3: Epistemological and cognitive aspects of time: A tool perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph XIII. Medium and meaning: Video papers in mathematics education research*.
- Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Translated and reprinted with permission from *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright © 2017 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation