תפיסות שגויות אודות כפל וחילוק

Misconceptions about Multiplication and Division

מאת: Anna O. Graeber

הופיע ב: Arithmetic Teacher, Vol. 40 No. 7, March 1993

תרגום: ברכה סגליס

מביטויים באנגלית כמו Divide and conquer, Multiply your options ורבים אחרים משתמע שכפל תמיד מגדיל וחילוק תמיד מקטין. למעשה, שני רעיונות אלו כל כך מובנים מאליהם וכל כך חדרו לחשיבה של אנשים רבים עד שהם נכללים בין התפיסות השגויות הכי מפורסמות במתמטיקה. תפיסות שגויות או תפיסות נאיביות (naïve concepts) הינם רעיונות שכיחים או אמונות מקובלות המנוגדים למה שבאופן פורמלי מוכר כנכון. אנשי חינוך מתמטי חוקרים תפיסות שגויות משום שאם נבין כיצד תלמידים תופסים את הרעיונות המתמטיים, נוכל להיות מוכנים יותר להציע התנסויות הוראה שיעזרו להם לפתח את התפיסות המקובלות. שתי התפיסות השגויות שתוארו כאן היו נושא למחקרים רבים (ראה לדוגמה, Fischbein, Deri, Nello, and Marino [1985]; Bell, Fischbein, and Greer [1984] Greer [1987]).

שתי התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו- "חילוק מקטין" מתגלות לעיתים קרובות רק כאשר תלמידים מנסים לפתור בעיות מילוליות של כפל או חילוק העוסקות במספרים רציונאליים קטנים מאחד. כאשר מוצגת לפניהם בעיה מילולית, תלמידים מבינים מתוך רמזי ההקשר שבבעיה, שהתשובה צריכה להיות גדולה יותר או קטנה יותר מאחד המספרים שבבעיה. אם הם מחפשים מספר גדול יותר הם כופלים ואם הם מחפשים מספר קטן יותר הם מחלקים. לדוגמה, בבעיה "אם מכונית שנוסעת 30 מייל צורכת גלון אחד של בנזין, לאיזה מרחק היא תיסע אם תצרוך 1/2 גלון?" תלמידים המושפעים מהתפיסות השגויות יחשבו שמאחר שיש להם פחות מגלון אחד, המכונית תיסע **פחות** מ- 30 מייל, לכן התשובה צריכה להיות 30 **לחלק** ל- 1/2, במקום 30 כפול 1/2. הגיון דומה עשוי להופיע בבעיה כמו "אם אורזים עוגיות בקופסאות במשקל של 0.65 פאונד לקופסה, כמה קופסאות ניתן למלא עם 5 פאונד של עוגיות?" כאן התלמידים מציעים את הטיעון ההפוך: מאחר ששמים פחות מפאונד אחד בכל קופסה, יהיו **יותר** קופסאות, אז התשובה צריכה להיות 5 **כפול** 0.65, במקום 5 לחלק ל- 0.65.

מדוע תלמידים מאמינים ש"כפל מגדיל"?

ראשית, שפת היומיום מרמזת על כך. חישבו על ביטויים כמו "I`m going to multiply my option" או "Rabbits multiply quickly". סיבה נוספת לתפיסה השגויה היא הקביעות של רשמים ראשונים. פרט לתרגילים עם 0 ו- 1, המפגש הראשון של תלמידים עם כפל כרוך בתרגילים עם מספרים שלמים שבהם המכפלה גדולה יותר מכל אחד מן הגורמים. נוסף על כך, הכפל מוגדר על פי רוב כחיבור חוזר. ההגדרה של חיבור חוזר, למרות היותה חוליה מקשרת שימושית בין הכפל לחיבור, יוצרת מגבלה אם היא משמשת כתפיסה **הבלעדית** של התלמיד על הכפל. בעזרת המודל של חיבור חוזר קשה לפרש כפל במספרים מעורבים, בשברים פשוטים ובשברים עשרוניים. מדוע? ראשית, משום שקשה לחבר שברים. במושגים של מודל החיבור החוזר, $3 \times 4/5 = 4/5 + 4/5 + 4/5$. אך אין זה פשוט לחשב $4/5 + 4/5 +$

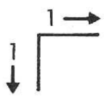
Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1993 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

4/5. שנית, מה המשמעות של חיבור חוזר כאשר שני הגורמים הם שברים פשוטים או עשרוניים? למשל, $2/3 \times 1\ 3/4$. מה זה אומר לתלמיד להוסיף את $1\ 3/4$ לעצמו $2/3$ פעמים? או ב- 0.5×0.5 , מה המשמעות של להוסיף 0.5 לעצמו $1/2$ פעם? יש היגיון בהיסוס של תלמידים להסכים לכך ש 0.25 הוא המכפלה של 0.5×0.5 , לאור העובדה שעד שנתקלו בשברים פשוטים ועשרוניים, כפל (של גורמים השונים מ- 0 או מ- 1) תמיד "הגדיל".

מתן עזרה לתלמידים להבין את ההיגיון של "כפל שמקטין".

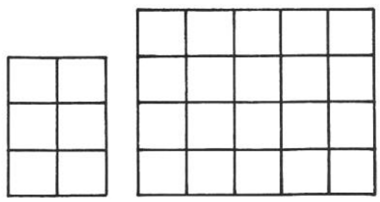
מצפים ממורים של כיתות היסוד הגבוהות ושל חטיבת הביניים להרחיב את הכפל למספרים הרציונאליים בדרך שיש בה משמעות. מודל השטח לכפל הוא אמצעי שימושי לכפל של מספרים רציונאליים, אבל התלמידים צריכים קודם להבין פירוש זה של הכפל ביחס למספרים שלמים. לאחר מכן ניתן להשתמש במודל השטח כדי למצוא היגיון בביטויים כמו $9 \times 2/3$, $1/2 \times 1/10$, או 0.5×0.5 (ראו **איור 1**). בכל אופן, כדי להגדיל את הסיכוי שהתלמידים ישתמשו במודל השטח כאמצעי עזר להבנה שהמכפלה של שני מספרים הקטנים מאחד הינה מספר הקטן מכל אחד משני הגורמים, יש לוודא תחילה שמודל השטח מוכר לתלמידים כדרך לפרש את הכפל במספרים שלמים.

איור 1

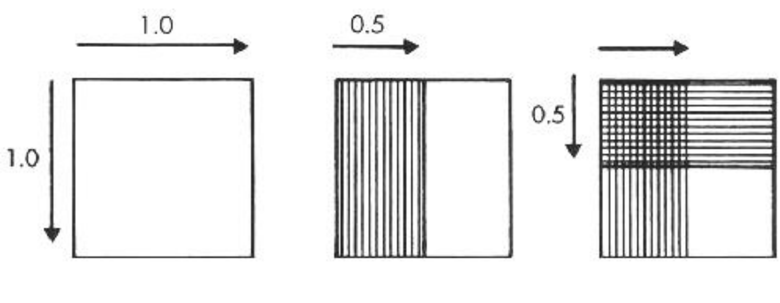


במודל שטח, גורם אחד מתאר את הרוחב של המלבן, הגורם השני מתאר את האורך של המלבן. המכפלה מיוצגת על ידי השטח.

א) מודל שטח עבור 2×3 ועבור 4×5



ב) מודל שטח עבור 0.5×0.5 שווה 0.25



Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1993 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

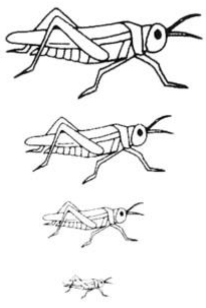
פעילויות אחרות עשויות גם הן לסייע לקבל את העובדה שכפל לא תמיד "מגדיל". למשל, חקירות של מכפלות בדגמים כמו

$$
\begin{array}{l}
5 \times 20 = \\
4 \times 20 = \\
. \\
. \\
. \\
1 \times 20 = \\
0 \times 20 =
\end{array}
$$

עשויים לבסס אצל התלמיד אומדן של המכפלה $1/2 \times 20$ כמספר הנמצא בין 0×20 לבין 1×20, כלומר, כמספר קטן מ- 20. אם עושים עבודה זו בהקשר לבעיות מחיי היומיום העוסקות בשינויי גודל או בהרחבה וכיווץ של עצמים, מידת ההיגיון של תוצאות החישובים תהיה עוד יותר ניכרת (ראו **איור 2**). כאשר התלמידים רוכשים מידה מסוימת של תובנת המספר לגבי שברים פשוטים, שברים עשרוניים ומספרים מעורבים, הם יכולים לקשר את הידע שלהם אודות הגודל היחסי של השבר למידע שרכשו מסדרת המכפלות 4×20, 5×20 וכן הלאה, כדי לאמוד את הגבולות של מכפלות כמו 3.5×20, 2.4×20, 1.7×20, ולבסוף 0.6×20. ניתן גם למצוא מכפלות של מספרים עשרוניים באמצעות מחשבון (ניתן כיום להשיג מחשבונים המאפשרים עבודה עם שברים פשוטים ומספרים מעורבים). הדיון בכיתה צריך להתמקד בדגם של גודל הגורמים וגודל המכפלה. ניתן גם לעודד את התלמידים לכתוב על הדגם שהם רואים. למשל, ניתן לבקש מהם לתאר זאת לתלמיד אחר ולציין כל מה שנראה להם מוזר או לא צפוי, תוך מתן הסבר מדוע זה נראה להם מוזר.

איור 2: מציאת אורך הקפיצות שעושים חגבים בעלי אורכים שונים *

חגבים קופצים לעיתים בקפיצות שהן כמעט פי עשרים מאורך גופם. בתמונה הבאה, אורך גופם של מספר חגבים נתון בס"מ. מצאו את המרחק שכל חגב יכול לקפוץ, אם הוא יקפוץ למרחק שהוא פי 20 מאורך גופו.



חגב באורך 4 ס"מ יכול לקפוץ למרחק של 4×20, או ____ ס"מ.

חגב באורך 3 ס"מ יכול לקפוץ למרחק של 3×20, או ____ ס"מ.

חגב באורך 2 ס"מ יכול לקפוץ למרחק של 2×20, או ____ ס"מ.

חגב באורך 1 ס"מ יכול לקפוץ למרחק של 1×20, או ____ ס"מ.

לאיזה מרחק יכול לקפוץ חגב באורך 3.5 ס"מ ?
לאיזה מרחק יכול לקפוץ חגב באורך 2.4 ס"מ ?
לאיזה מרחק יכול לקפוץ חגב באורך 0.6 ס"מ ?

* שימוש בגורמים שהם מספרים שלמים כדי לאמוד את המכפלה של מספר שלם במספר עשרוני, יכול לעזור לך לבדוק את מידת ההיגיון של תשובתך.

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1993 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

מדוע תלמידים מאמינים ש"חילוק מקטין"?

ההתנסויות הראשוניות של תלמידים עם חילוק גם הן מוגבלות למספרים שלמים כמחלקים ולמספרים שלמים כמנת החילוק. הגבלה זו מביאה את התלמידים לקביעת מגבלות על חילוק שאינן בהכרח נכונות כאשר המחלקים והמנה הם מספרים רציונאליים. לדוגמה, תלמידים מאמינים לעיתים קרובות שהמחלק צריך להיות קטן יותר מהמחולק (ראה Graeber and Baker [1992]); תלמידים רבים יטענו שהמנה של 0.25 : 2 בשום אופן לא יכולה להיות 8 משום ש"חילוק תמיד מקטין". יתר על כן, שפת היומיום מחזקת את הדעה שחילוק פירושו לחתוך לחלקים, כלומר, לעשות משהו קטן יותר.

דוגמאות מספריות מבודדות כמו 0.25 : 2 לא מספקות כל הקשר שבעזרתו יכול התלמיד למצוא היגיון ולהבין ביטוי זה. תלמידים רבים מתקשים לתת משמעות לדוגמאות כמו 0.25 : 2 , משום שהפירוש היחיד לחילוק שיש להם הוא כפעולה הפוכה לכפל. אם הם מנסים לתת משמעות לדוגמה כזו, הם קרוב לודאי מנסים להשתמש בפירוש של החילוק לחלקים במקום בפירוש של החילוק להכלה (ראו **איור 3**).

לרוע המזל בתרגילים מן הסוג הזה הפירוש של חילוק להכלה היה עשוי לעזור יותר. מצד אחד, בפירוש של חילוק לחלקים שואלים "כמה יש בקבוצה אחת אם יש 2 ב - 0.25 של קבוצה?" מצב זה אינו קל לדמיון או לציור. מצד שני, בפירוש של חילוק להכלה שואלים "כמה 0.25 יש ב- 2?" מבחינה מושגית מצב זה מעט קל יותר לפענות. ניתן להדגים אותו באמצעות גזרות שברים או בציור. ניתן גם לנסח אותו כשאלה על כסף – "כמה רבעי דולר יש בשני דולר?"

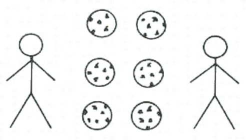
מרבית ספרי הלימוד לביה"ס היסודי מציגים את החילוק כחיסור חוזר: 3 : 12 פירושו "כמה פעמים ניתן לחסר 3 מ- 12?" פירוש זה מוביל ישירות לפירוש של החילוק כחילוק להכלה: "כמה 3 יש ב- 12?" עם זאת, מרגע שמציגים את הפירוש של החילוק כחילוק לחלקים, פוחת והולך השימוש בבעיות מילוליות של

חילוק להכלה, כך שהמודל של החילוק לחלקים הולך ומתחזק. למרות שהמודל של חילוק לחלקים הינו ללא ספק חשוב, אין הוא המודל הטוב ביותר למתן משמעות לחילוק במספרים מעורבים או בשברים.

איור 3: השוואת המודל של חילוק לחלקים למודל של חילוק להכלה

שני אנשים מתחלקים בשש עוגיות.

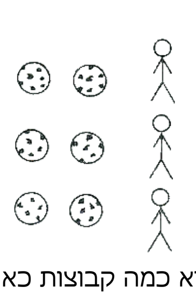
כמה עוגיות יקבל כל אחד אם הם מתחלקים שווה בשווה?



מודל החילוק לחלקים עבור 2 : 6

במצבי חילוק לחלקים, ידוע הסך-הכל וידוע מס' הקבוצות שיש להכין. השאלה היא מה יהיה הגודל של כל אחת מן הקבוצות, או כמה פריטים בודדים יהיו בכל אחת מן הקבוצות.

בדוגמה זו, הסך-הכל הוא שש ואנו יודעים שעלינו להכין שתי קבוצות שוות. אנו מנסים למצוא כמה עוגיות יהיו בכל אחת משתי הקבוצות.



נותנים שתי עוגיות לכל אחד. יש שש עוגיות. כמה אנשים יקבלו עוגיות?

מודל החילוק להכלה עבור 2 : 6

במצבי חילוק להכלה, ידוע הסך-הכל וידוע הגודל של כל קבוצה. השאלה היא כמה קבוצות כאלו ניתן לעשות. בדוגמה זו, הסך-הכל הוא שש, גודל הקבוצה הוא שתיים, ואנו מנסים למצוא כמה קבוצות של שתי עוגיות ניתן לעשות.

NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

מתן עזרה לתלמידים להבין את ההיגיון של "חילוק שמגדיל".

לפני שמלמדים את התלמידים את האלגוריתמים הפורמליים לחילוק שברים פשוטים או עשרוניים, הם יכולים להשתמש בפירוש של חילוק להכלה לחילוק שברים עם גזרות שברים, ציורים או הידע שלהם על כסף, כדי לפתור בעיות חילוק פשוטות הכוללות מחלקים קטנים מאחד. הכרות טובה עם המודל של חילוק להכלה יכולה לעזור לתלמידים להבין שהפעולה שמבצעים היא חילוק. דוגמאות לבעיות שניתן לחקור בעזרת גזרות שברים מופיעות ב**איור 4**.

איור 4: דוגמאות לבעיות של חילוק בשברים (חילוק שמגדיל) שניתן להמחיש באמצעות גזרות שברים

כמה שקיות אני יכול למלא עם 1/4 פאונד בוטנים, אם קניתי 2 1/2 פאונד בוטנים לא ארוזים? (2 1/2 : 1/4)

כמה מטבעות של ניקל (חמש אגורות) יש ברבע דולר ? (1/4 : 1/20)

אנו מתכננים לצאת למסע למסלול מסוים. אנו מעריכים שנכסה 3/4 מייל בכל שעה של הליכה. אם אורך המסלול הוא 2 מייל, כמה זמן יקח לנו להשלים את המסע? (2 : 3/4)

ניתן גם לחקור דגמים הנובעים מחלוקת מספר קבוע במחלק שהולך ופוחת, לדוגמה,

24 : 24
24 : 12
24 : 8
24 : 6
.
.
.
24 : 1
24 : 1/2

שוב, דוגמאות אלו צריכות לנבוע מתוך הקשר. אם יש לי 24 פאונד של ממתקים ואני אורז אותם בשקיות של 24 פאונד (או של 12, 8, 6, 4 , 3 , 2 , 1 , 1/2 , או 1/4 פאונד), כמה שקיות של ממתקים יהיו לי? דיון על התוצאות; התבוננות במחלקים ש"מקטינים, לא משנים , מגדילים"; ודיון על הסיבות לאמונה הרווחת שחילוק מקטין, הינם מרכיבים חשובים בהתנסויות כאלו.

מסקנות

- כמורים עלינו להימנע מחיזוק הנטייה של התלמידים לחשוב שכאשר התשובה לבעיה היא מספר גדול יותר, פרוש הדבר שצריך לחבר או לכפול; או שכאשר נראה שהתשובה לבעיה תהיה מספר קטן יותר, פרוש הדבר שצריך לחסר או לחלק (ראה Sowder [1989]). למרות שאסטרטגיה זו "עובדת" בכיתות הנמוכות, היא לא עוזרת לתלמידים להבין את הפירושים השונים של הפעולות, ויכולה להפריע ללומדים כאשר הם צריכים להתעמת עם בעיות כמו הדוגמאות הבאות:

- גבינה במשקל פאונד אחד עולה 5.59 דולר. אם על חבילת גבינה כתוב שמשקלה 0.33 פאונד, מה יהיה המחיר שלה?

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1993 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

- אני רוצה לרצף את קירות חדר האמבטיה שלי עד לגובה 4 רגל מן הרצפה. אם המרצפות הן ריבועים בגודל 1/3 רגל × 1/3 רגל, כמה שורות של מרצפות אני צריך לרצף?

- פתחו והשתמשו במודל השטח לכפל ובמודל החילוק להכלה לחילוק. כללו כמה בעיות מילוליות היכולות לשמש כדוגמאות למודל החילוק לחלקים, וכמה בעיות שהן דוגמאות למודל החילוק להכלה.
- הציגו בפני התלמידים רעיונות המנוגדים לאינטואיציה מוקדם ככל האפשר. בעיות מילוליות המובילות לחישובים כמו 1/2 × 4 , 1/2 × 1/2 , 1/4 : 2 , או 1/4 : 1 1/2 יכולות להיפתר עם הבנה כבר בכיתה ד' או ה'. שימוש באמצעי המחשה או בציורים, לא באלגוריתמים סטנדרטיים, יקדם הבנה. נדרשת הבנה מוצקה של משמעות השברים ודיונים רבים על התוצאות שנראות "מוזרות". מדוע התשובות מפתיעות? מדוע זה נראה הגיוני לחשוב שכפל מגדיל וחילוק מקטין? מתי כפל מגדיל וחילוק מקטין? מתי כפל מקטין וחילוק מגדיל?
- הן תלמידי בית ספר והן מבוגרים לא "נפטרים" בקלות מתפיסות שגויות. ישנם חוקרים הטוענים אפילו, שהמבוגרים לעולם אינם מתגברים באמת על התפיסות השגויות שלהם. הם טוענים שבמקרה הטוב, אנו מכירים בכך שיש לנו תפיסות שגויות אלו, ולומדים לעמוד על המשמר כנגד החשיבה השגויה שנתמכת על-ידי כמה רעיונות אינטואיטיביים. לכן, חשוב שהמורה תעזור לתלמידים להבין שבדיקת תשובות היא יותר מאשר בדיקת חישובים. "בדיקת העבודה שלך" כרוכה גם בהתבוננות במידת ההיגיון של התשובה לאור ההקשר שממנו נבע החישוב. לפני שניגשים לפתרון בעיה, יש לעיתים קרובות לאינטואיציה תפקיד חשוב בהערכת גודל התשובה. אבל, "בדיקת העבודה" יכולה לעזור לכולנו לאתר את אותם פעמים בהם האינטואיציה שלנו אודות גודל התשובה מובילה אותנו להניח הנחות מוטעות בשעה שאנו מתכננים כיצד לפתור את הבעיה.

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1993 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

ביבליוגרפיה

Bell, Alan, Efraim Fischbein, and Brain Greer. "Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: The Effects of Number Size, Problem Structure and Content." *Educational Studies in Mathematics* 15 (February 1984): 129-47.

Fischbein, Efraim, Maria Deri, Maria Nello, and Maria S. Marino. "The Role of Implicit Models in Solving Problems in Multiplication and Division." *Journal for Research in Mathematics Education* 16 (January 1985): 3-17.

Graeber, Anna, and Kay Baker. "Little into Big Is the Way It Always Is." *Arithmetic Teacher* 39 (April 1992): 19-21

Graeber, Anna, and Elaine Tanenhaus. "Multiplication and Division: From Whole Numbers to Rational Numbers." In *Interpreting Research for the Mathematics Classroom: Middle Grades,* edited by Douglas Owens. New York: Macmillan, in press.

Greer, Brian. "Nonconservation of Multiplication and Division Involving Decimals." *Journal for Research in Mathematics Education* 18 (January 1987): 37-45.

Kouba, Vicky, and Kathy Franklin. "Multiplication and Division." In *Interpreting Research for the Mathematics Classroom: Early Childhood*, edited by Robert Jensen. New York: Macmillan, in press.

Sowder, Larry. "Story Problems and Students' Strategies." *Arithmetic Teacher* 36 (May 1989) : 25-26

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1993 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation