إعتقادات خاطئة حول عمليتي الضرب والقسمة

Misconceptions about Multiplication and Division

تأليف: Anna O. Graeber

ظهر في: Arithmetic Teacher, Vol. 40 No. 7, March 1993

ترجمة: كميل ظاهر

يوحي العديد من التعابير باللغة الإنجليزية، مثل Multiply your options، Divide and conquer، أن عملية الضرب تكبّر دائمًا وأن عملية القسمة تصغّر دائمًا. وعمليًا، هاتان الفكرتان هما بديهيتان اخترقتا تفكير الناس بشكل واسع لدرجة انهما تُعتبران من بين أكثر الاعتقادات الخاطئة شهرة في الرياضيات. إن الاعتقادات الخاطئة أو الاعتقادات الساذجة هي معتقدات أو آراء منتشرة ومناقضة لما هو متفق عليه بأنه صحيح رسميًا. ويدرس معلمو الرياضيات الاعتقادات الخاطئة لأنه إذا تمكنا من فهم كيف يميل الطلاب لرؤية الأفكار الرياضية، قد نكون أكثر استعدادًا لتوفير خبرات تدريسية تساعدهم على تطوير مفاهيم مقبولة. وخضع الاعتقادان الخاطئان اللذان تم وصفهما أعلاه للعديد من البحوث (أنظر على سبيل المثال Bell, Fischbein, and Greer [1984]; Fischbein, Deri, Nello, and Marino [1985] Greer [1987]).

عادة ما تتم ملاحظة المعتقدين الخاطئين "الضرب يكبّر" و "القسمة تصغّر" فقط عندما يحاول الطلاب حل المسائل الكلامية في الضرب أو القسمة التي تتضمن أعدادًا نسبية أصغر من واحد. ويدرك الطلاب من التلميحات التي تظهر من خلال السياق، عندما يواجهون مسألة كلامية، أن الجواب يجب أن يكون أكبر أو أصغر من أحد الأعداد الواردة في المسألة. ويقوم الطلاب بالضرب إذا كانوا يبحثون عن عدد أكبر. مثلاً، أنظر إلى المسألة "إذا كانت سيارة تقطع 30 ميل بغالون من البنزين، ما هي المسافة التي تقطعها السيارة بـ 1/2 غالون؟" وسيعتقد الطلاب المتأثرون بالمعتقدات الخاطئة أنه بما أن لديهم أقل من غالون واحد، ستقطع السيارة مسافة أقل من 30 ميل، لذلك ستكون الإجابة 30 تقسيم 1/2 بدلاً من 30 ضرب 1/2. ومن الممكن استعمال تفسير مشابه لمسألة مثل "تتم تعبئة قطع من الحلوى بوزن 0.65 باوند للعلبة. ما هو عدد العلب الذي يمكن تعبئته بـ 5 باوندات من قطع الحلوى؟" ويقدم الطلاب هنا تفسرًا بديلاً: بما أنهم يقومون بوضع أقل من باوند واحد في كل علبة، فسيتم الحصول على أكثر من 5 علب، لذلك يجب أن يكون الجواب 5 ضرب 0.65 بدلاً من 5 على (تقسيم) 0.65.

لماذا يعتقد الطلاب أن "عملية الضرب تكبّر"؟

أولاً، اللغة المستخدمة يوميًا توحي بذلك. فكّروا بتعابير مثل:

"I`m going to multiply my option" أو "Rabbits multiply quickly" ". سبب آخر للاعتقاد الخاطئ هو دوام الانطباعات الأولى. يتضمن لقاء الطلاب الأول مع عملية الضرب مسائل تُستخدم فيها أعداد صحيحة،(ما عدا المسائل التي تحتوي على العددين 1 وَ 0)، بحيث يكون الناتج أكبر من كل واحد من العوامل. بالإضافة إلى ذلك، عادة ما يتم تعريف عملية الضرب على أنها جمع متكرر. وعلى الرغم من كون تعريف الجمع المتكرر مفيدًا للربط بين الضرب والجمع، إلا أنه يشكل تحديدًا إذا كان هو مفهوم الطلاب الوحيد للضرب. وليس من السهل تفسير عملية الضرب مع أعداد مخلوطة، كسور عادية، أو كسور عشرية بواسطة نموذج الجمع المتكرر. لماذا؟ أولاً، لأن إجراء الجمع مع الكسور هو أمر صعب. من ناحية مصطلحات نموذج الجمع المتكرر،

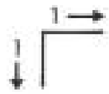
4/5 + 4/5 + 4/5 = 4/5 × 3. ولكن، إجراء عملية جمع 4/5 + 4/5 + 4/5 ليست بالأمر البسيط. ثانيًا، ماذ يعني الجمع المتكرر إذا كان كلا العاملين كسورًا عادية أو عشرية؟ فكّر، مثلاً، في 3/4 1 × 2/3. ماذا يعني بالنسبة للطالب جمع 3/4 1 إلى ذاته 2/3 مرة؟ أو ماذا يعني في 0.5 × 0.5 جمع 0.5 إلى ذاته ½ المرّة؟ هنالك منطق في تردد الطلاب في قبول 0.25 كنتيجة لحاصل ضرب 0.5 × 0.5 على ضوء الحقيقة أن عملية الضرب (بعوامل لا تساوي 0 وَ 1) كانت تكبّر دائمًا حتى ظهور الكسور العادية أو العشرية.

مساعدة الطلاب في فهم المنطق في "عملية الضرب التي تصغّر".

يُتوقع من معلمي الصفوف الإبتدائية العليا والصفوف الإعدادية التوسع في عملية الضرب إلى الإعداد النسبية بطريقة ذات معنى. إن نموذج المساحة للضرب هو أداة مفيدة للاستخدام مع الأعداد النسبية، ولكن يجب على الطلاب، أولاً، فهم هذا التفسير لعملية الضرب بالأعداد الصحيحة. وبعد ذلك يمكن استخدام نموذج المساحة لجعل تعابير مثل 2/3 × 9 ،

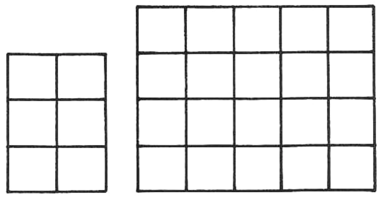
1/10 × 1/2 ، أو 0.5 × 0.5 مفهومة (أنظر **الشكل 1**). ولكن، من أجل زيادة احتمالات استخدام الطلاب لنموذج المساحة كوسيلة مساعدة لرؤية أن حاصل ضرب عددين أصغر من واحد هو عدد أصغر من كلا العددين، يجب أولاً التأكد من أن نموذج المساحة هو طريقة مألوفة للطلاب لتفسير عملية ضرب الاعداد الصحيحة.

الشكل 1

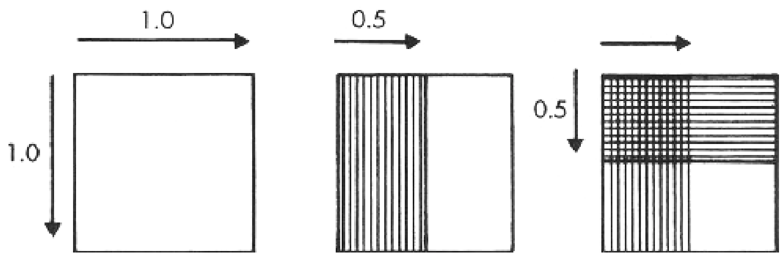


في نموذج المساحة، يصف أحد العاملين عرض مستطيل ما، ويصف العامل الثاني طول المستطيل. ويتم عرض النتيجة بواسطة المساحة.

أ) نموذج مساحة لـ 2 × 3 وَ 5 × 4



ب) نموذج مساحة لـ 0.5 × 0.5 يساوي 0.25



يمكن للفعاليات الأخرى أن تساعد، أيضًا، في وضع أسس لقبول كون عملية الضرب لا "تكبّر" دائمًا. مثلاً، استكشاف النتائج بواسطةالأنماط التالية، مثلاً:

$5 \times 20 = \square$

$4 \times 20 = \square$

$1\times 20 = \square$

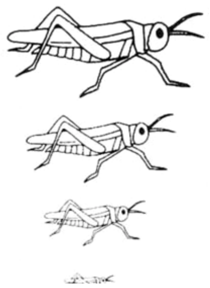
$0 \times 20 = \square$

من شأنه أن ينشئ لدى الطالب تقديرًا لنتيجة عملية ضرب 20 × ½ على أنها تتراوح بين 20 × 0 وبين 20 × 1، أي عدد أصغر من 20. إذا تم إجراء هذا العمل في مسائل تتضمن تغييرات في الكبر أو أشياء تتمدد وتتقلص، تكون معقولية نتائج الحساب واضحة بشكل أكبر (أنظر الشكل 2). بعد أن يطور الطلاب القليل من الإحساس العددي بالنسبة للكسور العشرية، يمكنهم ربط معرفتهم بالكبر النسبي للكسور العشرية، الكسور العادية، أو الأعداد المخلوطة والتشكيلات التي اكتسبوها من مجموعة النتائج 20 × 4, 20 × 5 ، وهلم جرا، من أجل تقدير حدود حواصل الضرب، مثل 3.5 × 20، 2.4 × 20، 1.7 × 20 وأخيرًا 0.6 × 20. كذلك يمكن الوصول إلى حواصل الضرب التي تتضمن الكسور العشرية عن طريق استخدام الحاسبة (حاسبات مثل TI Explorer المتوفرة الآن وتتيح للطلاب إدخال الكسور العادية والأعداد المخلوطة). ويجب أن يتمحور التباحث في الصف في أنماط كبر العوامل وكبر

حاصل الضرب. ومن الممكن، أيضًا، تشجيع الطلاب على الكتابة عن الأنماط. مثلاً، يمكن الطلب منهم وصفها لطالب آخر، ملاحظين وجود أي شيء يعتبرونه غريبًا أو غير متوقع وتفسير لماذا يعتبرون هذه النتيجة غريبة.

الشكل 2:حساب طول القفزات التي تقوم بها جنادب ذوو أطوال مختلفة*

تقفز الجنادب، احيانًا، مسافة قد تصل إلى 20 ضعفًا من طول أجسامها. في الصورة أدناه تُعطى أطوال عدد من الجنادب بالسنتيمترات. جد المسافة التي يمكن للجندب قفزها إذا كان يقفز مسافة تقارب الـ 20 ضعفًا من طول جسمه.



جندب طوله 4 سم يمكنه أن يقفز مسافة 4 × 20، أو ☐

جندب طوله 3 سم يمكنه أن يقفز مسافة 3 × 20، أو ☐

جندب طوله 2 سم يمكنه أن يقفز مسافة 2 × 20، أو ☐

جندب طوله 1 سم يمكنه أن يقفز مسافة 1 × 20، أو ☐

ما هي المسافة التي يمكن لجندب طوله 3.5 سم قفزها؟_______________________

ما هي المسافة التي يمكن لجندب طوله 2.5 سم قفزها؟_______________________

ما هي المسافة التي يمكن لجندب طوله 0.6 سم قفزها؟_______________________

* إن استعمال عوامل الضرب بأعداد صحيحة، من أجل تقدير حاصل ضرب عدد صحيح بعدد كسري، يساعد على فحص مدى صحة الجواب.

لماذا يعتقد التلاميذ أن القسمة "تُصغّر"؟

تقتصر تجارب الطلاب المبكرة مع عملية القسمة، أيضًا، على الأعداد الصحيحة ونتائج صحيحة لخارج القسمة. ويؤدي هذا التحديد إلى أن يقوم التلاميذ بوضع تقييدات ليست صحيحة بالضرورة على عملية القسمة عندما يكون المقسوم عليه وخارج القسمة عددين نسبيين. فمثلاً، عادة ما يعتقد الطلاب أن المقسوم عليه يجب أن يكون أصغر من المقسوم (أنظر Graeber and Baker [1992])؛ سيدّعي الكثير من الطلاب أن حاصل قسمة

0.25 ÷ 2 لا يمكنه أن يكون أبدًا 8 لأن "القسمة تصغّر دائمًا." بالاضافة إلى ذلك، تعزز اللغة المستخدمة يوميًا فكرة أن القسمة تجزء إلى أقسام، أي أنها تصغّر.

لا توفر الأمثلة العددية المنفردة، مثل 0.25 ÷ 2، سياقًا يمكن للطلاب استخدامه لفهم التعبير.

ويواجه العديد من الطلاب صعوبة في فهم هذه التعابير، مثل 0.25 ÷ 2 لأنه ليس لديهم تفسيرًا للقسمة عدا عن كونها عملية معاكسة للضرب. وإذا حاول الطلاب إعطاء معنى لمثل هذا المثال، سيحاولون عندها، على الأرجح، استخدام تفسير التقسيم إلى أقسام بدلاً من التفسير الاحتوائي للقسمة (أنظر **الشكل 3**). ولسوء الحظ يكون التفسير الاحتوائي، في مثل هذا النوع من المسائل، مفيدًا بشكل أكبر. ويقوم تفسير التقسيم إلى أقسام، من ناحية، بطرح السؤال "كم يوجد في

مجموعة واحدة إذا كان لدينا 2 في 0.25 من المجموعة؟" وليس من السهل تخيّل هذا الوضع أو رسمه. ومن الناحية الثانية، يطرح التفسير الاحتوائي السؤال "كم 0.25 يوجد في الـ 2؟" ويكون هذا الوضع، من ناحية مفهومية، أسهل للتفسير والفهم. ويمكن تمثيله بواسطة قطع الكسور أويمكن رسمه. كذلك يمكن إعادة صياغته كسؤال يتعلق بالنقود – "ما هو عدد الأرباع الموجودة في دولارين؟"

تعرض معظم كتب التعليم في المدارس الإبتدائية عملية القسمة على أنها عملية طرح متكررة: 3 ÷ 12 يعني "ما هو عدد المرات الذي يمكن طرح العدد 3 من العدد 12؟" ولكن، عندما يتم عرض تفسير التقسيم لعملية القسمة، عادة ما تهبط نسبة استخدام المسائل الكلامية بالتقسيم الاحتوائي في الكتب المدرسية، الأمر الذي يعزز من مكانة نموذج التقسيم لأقسام. وبالرغم من كون نموذج التقسيم هذا هامًا، غير أنه ليس النموذج الأكثر إفادة لإعطاء معنى لعملية القسمة بواسطة الأعداد المخلوطة أو الكسور.

الشكل 3: مقارنة نموذج التقسيم لأقسام بنموذج التقسيم الاحتوائي

يتقاسم شخصان ست كعكات.

ما هو عدد الكعكات الذي يحصل عليه كل شخص إذا كانت القسمة متساوية؟

نموذج التقسيم بالنسبة لـ 2 ÷ 6

في أوضاع التقسيم، معلوم كل من المجموع الكلي وعدد المجموعات التي يجب تحضيرها. ويكون السؤال كم سيكون كبر كل واحدة من هذه المجموعات، أو كم سيكون عدد العناصر في كل واحدة من هذه المجموعات.

في هذا المثال، المجموع الكلي هو 6 ونحن نعرف أن علينا تحضير مجموعتين متساويتين. ونحن نحاول أن نجد عدد الكعكات الذي سيكون في كل واحدة من هاتين المجموعتين.

تُعطى كعكتان لكل شخص. هنالك 6 كعكات. ما هو عدد الأشخاص الذين سيحصلون على كعكات؟

نموذج التقسيم الاحتوائي بالنسبة لـ 2 ÷ 6

معلوم كل من المجموع الكلي وكبر كل مجموعة. ويكون السؤال ما هو عدد المجموعات كهذه التي يمكن تحضيرها.

في هذا المثال، المجموع هو 6، كبر المجموعة هو 2، ونحن نحاول أن نجد كم هو عدد المجموعات المكونة من كعكتين التي يمكن تحضيرها.

مساعدة الطلاب على فهم منطق أن "القسمة تكبّر".

قبل البدء في تعليم نظام الحلول الحسابية الرسمية لعملية القسمة على الكسور العشرية أو على الكسور العادية، يمكن أن يستخدم الطلاب تفسير التقسيم الاحتوائي لعملية القسمة مع قطع الكسور، الرسومات، أو معرفتهم بالنظام النقدي لحل مسائل قسمة بسيطة تتضمن مقسومًا عليه أصغر من 1. وتمكّن معرفة نموذج التقسيم الاحتوائي من مساعدة الطلاب على الادراك بأن العملية التي يتم إجراؤها هي عملية القسمة. ويعرض **الشكل 4** أمثلة على المسائل التي يمكن استكشافها بواسطة استخدام قطع الكسور.

الشكل 4: أمثلة على مسائل قسمة على كسور (عملية القسمة التي تكبّر) التي يمكن تمثيلها بواسطة قطع الكسور

ما هو عدد الأكياس التي يمكن ملؤها بـ 1/4 باوند من الفستق إذا كنت قد اشتريت 2 1/2 باونداً من الفستق غير المعبأ؟ (2 1/2 ÷ 1/4)

ما هو عدد القطع النقدية النيكيلية (خمس سنتات) الموجود في ربع الدولار؟ (1/4 ÷ 1/20)

نحن نخطط للخروج لنزهة في مسار محدد.، ونقدّر أنه يمكننا قطع 3/4 الميل في كل ساعة. إذا كان طول هذا المسار ميلين، كم من الوقت سيستغرق انهاء هذه الرحلة؟ (2 ÷ 3/4)

من الممكن أيضًا استكشاف الأنماط الناتجة عن قسمة عدد ثابت على أعداد تصغر بشكل تدريجي، على سبيل المثال:

$$24 \div 24 = \square$$
$$24 \div 12 = \square$$
$$24 \div 8 = \square$$
$$24 \div 6 = \square$$
$$\vdots$$
$$24 \div 1 = \square$$
$$24 \div 1/2 = \square$$

ومرة ثانية، هذه الأمثلة يجب ان تنبع من السياق ذاته. إذا كان لدي 24 باوند من الحلوى، وقمت برزمها في أكياس ذات 24 باوند (أو ذات 12, 8, 6, 4 , 3 , 2 , 1 , 1/2 , أو 1/4 باوند)، ما هو عدد أكياس الحلوى التي سأحصل عليها؟ مناقشة النتائج: إن إلقاء نظرة على المقسوم عليهم الذين

"يصغّرون، لا يغيّرون، يكبّرون"؛ والتباحث في الأسباب الكامنة وراء الاعتقاد الشائع بأن القسمة تصغّر هما جزءان هامان من هذه التجربة.

الاستنتاجات

- يجب علينا، كمعلمين، ألا نعزز ميول الطلاب إلى التفكير بأنه عندما تتطلب المسألة جوابًا كبيرًا، هذا يعني أنه يجب إجراء عملية جمع أو عملية ضرب؛ أو عند الاعتقاد بأن المسألة تحتاج إلى جواب أصغر، هذا يعني أنه يجب إجراء عملية طرح أو قسمة (أنظر [1989] Sowder). وبالرغم من أن هذه الاستراتيجية "تعمل" في الصفوف الدنيا، فإنها لا تساعد الطلاب على فهم التفسيرات المختلفة للعمليات ويمكنها أن تُدخل الطلاب في مشاكل عند مواجهتهم مسائل مثل المسائل التالية:

  ثمن باوند من الجبن 5.59 دولار. إذا كُتب على رزمة أنها تحتوي على 0.33 باوند من الجبن، فكم يكون ثمن هذه الرزمة من الجبن؟

  أريد أن أبلّط حيطان الحمام حتى ارتفاع 4 أقدام. إذا كان البلاط على شكل مربع بمقاييس 1/3 قدم × 1/3 قدم، ما هو عدد صفوف البلاط التي أحتاجها لتبليط الحيطان؟

- قم بتطوير واستخدام نموذج المساحة لعملية الضرب ونموذج القياس لعملية القسمة. ويجب أن يشمل هذا بعض المسائل الكلامية كأمثلة على نموذج التقسيم لعملية القسمة وبعض الأمثلة على نموذج الاحتواء لعملية القسمة.
- قم بعرض لإفكار مناقضة للتفكير الفطري (intuition) بالسرعة الممكنة. إن المسائل الكلامية التي تؤدي إلى حسابات مثل $1/2 \times 4$ ، $1/2 \times 1/2$ ، $1/4 \div 2$ ، أو $1/4 \div 1\ 1/2$ يمكن حلّها بفهم إبتداءً من الصف الرابع أو الخامس. إن استخدام وسائل الأيضاح أو الرسم، وليس نظم الحساب العادية، ستسهل الفهم. وستكون هنالك حاجة لفهم عميق لمعنى الكسور والكثير من التباحث حول النتائج التي تبدو "غريبة". لماذا كانت هذه الإجابات غير متوقعة؟ لماذا من المنطق التفكير أن عملية الضرب تكبّر وعملية القسمة تصغّر؟ في أي حالات تكبّر عملية الضرب وتصغّر عملية القسمة؟ في أي حالات تصغّر عملية الضرب وتكبّر عملية القسمة؟
- لا يتخلص طلاب المدارس الإبتدائية ولا البالغون من الاعتقادات الخاطئة بسهولة. ويدّعي بعض الباحثين أن البالغين ، في الحقيقة، لا يتغلبون أبدًا على اعتقاداتهم الخاطئة. ويضيفون أننا، في أحسن الأحوال، ندرك أن لدينا هذه الاعتقادات الخاطئة ونتعلم كيفية الحذر من التفكير الخاطئ التي تدعمه بعض الأفكار الفطرية. لذلك، من المهم أن يساعد المعلم الطلاب على الإدراك بأن فحص الإجابات هو ليس مجرد فحص العملية الحسابية. وأن "فحص عمل الفرد" يتضمن النظر في معقولية الجواب بالاستناد إلى السياق التي نبعت منه العملية الحسابية. قبل البدء في حل المسألة، يلعب التفكير الفطري، عادة، دورًا هامًا في تقدير كبر الجواب. ولكن يمكن لعملية "فحص الجواب" أن تساعدنا جميعًا على تحديد تلك المرات التي قادنا تفكيرنا الفطري المتعلق بكبر الجواب إلى فرضية غير صحيحة لتخطيط كيفية حل المسألة.

ملاحظة: تم استعمال وحدات القياس المستعملة في أمريكا، كما وردت في المقال.

1 باوند = 0.454 كغم، 1 غالون = 4.546 لتر، 1 ميل = 1.609 كم، 1 قدم = 30.48 سم

1 سنت = 1/100 من الدولار.

ביבליוגרפיה

Bell, Alan, Efraim Fischbein, and Brain Greer. "Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: The Effects of Number Size, Problem Structure and Content." *Educational Studies in Mathematics* 15 (February 1984): 129-47.

Fischbein, Efraim, Maria Deri, Maria Nello, and Maria S. Marino. "The Role of Implicit Models in Solving Problems in Multiplication and Division." *Journal for Research in Mathematics Education* 16 (January 1985): 3-17.

Graeber, Anna, and Kay Baker. "Little into Big Is the Way It Always Is." *Arithmetic Teacher* 39 (April 1992): 19-21

Graeber, Anna, and Elaine Tanenhaus. " Multiplication and Division: From Whole Numbers to Rational Numbers." In *Interpreting Research for the Mathematics Classroom: Middle Grades,* edited by Douglas Owens. New York: Macmillan, in press.

Greer, Brian. "Nonconservation of Multiplication and Division Involving Decimals." *Journal for Research in Mathematics Education* 18 (January 1987): 37-45.

Kouba, Vicky, and Kathy Franklin. "Multiplication and Division." In *Interpreting Research for the Mathematics Classroom: Early Childhood,* edited by Robert Jensen. New York: Macmillan, in press.

Sowder, Larry. "Story Problems and Students' Strategies." *Arithmetic Teacher* 36 (May 1989) : 25-26.