

איך נייצג את מרכז ההתפלגות?¹: הנחיות למורה

מטרות הפעילות:

מטרות פעילות זו הן לפתח ולעודד יצירתיות בקרב התלמידים בעזרת בעיית חקר פתוחה עם אילוצים, עם מספר רב של פתרונות ואסטרטגיות שונות לפתרון. מוקד הפעילות הוא חקר נתונים דרך התנסות בשיקולי דעת לגבי מרכז התפלגות נתונים.

מילות מפתח: התפלגות, מרכז ההתפלגות, מדדי מרכז, ממוצע חשבוני, חציון, ייצוגיות.

התאמת הפעילות ואופן הפעלתה:

הפעילות מתאימה לתלמידים בכיתות ד-ו.

חלקה הראשון של הפעילות מאפשר לזהות כיצד התלמידים חושבים על ייצוגיות של מרכז ההתפלגות. תפיסות אלו מאפשרות למורים לקדם את התלמידים לעבר הבנה מלאה יותר של רעיון הייצוגיות. חלקה השני של הפעילות מעודד את התלמידים לבחון את תפיסותיהם ולקדם אותן.

מומלץ לאפשר לתלמידים לעבוד על החלק הראשון בזוגות או בקבוצות קטנות כדי לעורר שיח על השאלות המוצעות. עם זאת, ניתן לעבוד על הפעילות גם ביחידים. את חלקה השני של הפעילות מומלץ להדגים במליאה, לפני ההתנסות.

בסיום הפעילות מומלץ לסכם את התשובות השונות בדיון כיתתי.

¹ פעילויות חקר הנתונים מעוצבות על בסיס המאמר האמפירי (Mokros & Russell, 1995), והפרק (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 20-39.

Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2008). Learning to reason about center. In J.B. Garfield & D. Ben-Zvi, *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice* (pp. 247-265). Springer.

הדגשים חשובים ביחס לחשיבה על ייצוגיות של התפלגות נתונים

הבנה של הרעיון הסטטיסטי 'התפלגות' עומדת בבסיס חקר הנתונים. הבנה זו כוללת הסתכלות כוללת על קבוצת הנתונים. כלומר, בחינה של התמונה הכללית העולה מתוך קבוצת הנתונים, וזאת תוך התייחסות אל ההתפלגות כאל יישות אחידה בעלת מאפיינים שלא ניתן להבחין בהם כאשר בוחנים את הנתונים כבודדים. מרכז ההתפלגות (Center) הוא אחד מהמאפיינים הכוללניים הללו של התפלגות הנתונים, אשר ניתן למדידה בעזרת הממוצע (Average).² ההתייחסות למושג ממוצע כוללת התייחסות לכלל מדדי המרכז – ממוצע חשבוני (Mean), חציון (Median), שכיח (Mode), מרכז טווח (Mid-range). חשוב להדגיש בהזדמנות זו, כי השכיח איננו מדד המייצג הסתכלות כוללת על התפלגות הנתונים.

מדדי המרכז (סוגי ממוצעים שונים כגון ממוצע חשבוני, ממוצע משוקלל, חציון) נלמדים לרוב טרם גיבושה של הסתכלות כוללת על ההתפלגות ועל מאפייניה, בכללם מרכז ההתפלגות. התלמידים מסוגלים לחשב את מדדי המרכז, אך אינם מבינים אותם כערכים מייצגים אשר מאפיינים את התפלגות הנתונים. יתרה מזאת, הם לעיתים אינם מקשרים בין ערכם של אותם מדדי המרכז ובין התפלגות הנתונים ומאפייניה השונים. בעקבות כך, הם מתקשים לבחור את המדד המתאים ביותר כדי לייצג את התפלגות הנתונים, תוך שקילת יתרונותיו וחסרונותיו. בהמשך, היעדר תפיסת ייצוגיות המרכז מקשה על היכולת להשוות בין התפלגויות.

הבעיות המוצגות בפעילות

חלקה הראשון של פעילות זו מדמה מצב מחיי היומיום, שבו נתון לנו ערך הממוצע החשבוני, ועלינו לנסות לדמיין אילו ערכים יכולים להיות בעלי ממוצע חשבוני זה, או מהי ההתפלגות המיוצגת בערך זה. התמודדות עם בעיה מסוג זה מאפשרת לזהות כיצד התלמידים חושבים על מרכז ההתפלגות ועל האופן שבו ניתן לייצג אותו באמצעות מדד מרכז.

חלקה השני של הפעילות מציג בעיה המתחילה בערך הממוצע של התפלגות הנתונים, ומנסה לשחזר את התפלגות הנתונים צעד אחר צעד. ההתמודדות עם הבעיה מאפשרת לתלמידים לבחון את תפיסותיהם, ולקדם את ההבנה שלהם ביחס לייצוגיות הממוצע.

התייחסויות שונות של תלמידים ביחס למרכז ההתפלגות

אנו סבורים כי נוכל לראות בקרב התלמידים תפיסות המתועדות גם בספרות המחקרית. בחרנו אם כן לפרט את ממצאי המחקר שערכו Mokros ו-Russell בשנת 1995, בקרב ילדים

² הסתכלות כוללת מתוארת בספרות המחקרית בתחום החינוך הסטטיסטי בהרחבה. למשל: Bakker, A., & Gravemeijer, K. P.E. (2004). Learning to reason about distributions. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 147–168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

בכיתות ד-ח. החוקרים הללו זיהו חמש התייחסויות שונות של תלמידים לאופן שבו הממוצע מייצג את מרכז התפלגות הנתונים:

1. **התייחסות לממוצע כאל שכיח.** התלמידים המחזיקים בתפיסה זו, ינטו ליצור בחלקה הראשון של הפעילות קבוצת נתונים שכולם או רובם בקבוצה יהיו זהים לערך הממוצע. כלומר, הממוצע מבחינתם הוא הנתון המופיע בשכיחות הגבוהה ביותר. תלמידים אלו יתקשו לבחור אסטרטגיות אחרות להתמודדות עם הפעילות. כמו כן יתקשו להתמודד עם סעיפים שיש בהם אילוצים המגבילים את השימוש בערך הממוצע. ייתכן ובעלי גישה זו יבחרו לעשות שימוש באלגוריתם לחישוב הממוצע החשבוני לעיתים רחוקות בלבד, ולרוב יעשו זאת באופן שגוי.

2. **התייחסות לממוצע כאל פרוצדורה.** תלמידים המחזיקים בתפיסה זו, לרוב יתייחסו אל הממוצע כאל האלגוריתם לחישוב הממוצע החשבוני. אך הם יתקשו בחיבור הערך המתקבל ובהבנת הרעיון העומד מאחוריו. הם עלולים להציג מגוון של שיטות מעגליות לחישוב, כאלה המבלבלות בין הנתונים והממוצע החשבוני, והם יתקשו בהערכת סבירות או נכונות הפתרונות שיציעו.

3. **התייחסות לממוצע כאל סביר.** תלמידים המחזיקים בתפיסה זו, יתייחסו לממוצע כאל כלי שיכול לספק היגיון וגם לניתוח הנתונים. הממוצע מבחינתם נקבע על ידי שיקולי דעת מתמטיים לצד שיקולי דעת הנובעים מההיגיון. לכן הם ישלבו שיקולים מחיי היומיום לצורך הקביעה אם סביר שערך כלשהו יהיה הממוצע, או ייצג קבוצת נתונים. במקרה שיעשו שימוש באלגוריתם לחישוב הממוצע החשבוני, הם עשויים לשפוט את התוצאה על פי מידת הסבירות שלה מנקודת ראותם. תלמידים המחזיקים בתפיסה זו, עשויים להסביר את בחירותיהם כבחירה בערכים ההגיוניים או הסבירים, תוך התייחסות לשונות טבעית ולעולם ההקשר, אולם ללא הסבר מתמטי נוסף.

4. **התייחסות לממוצע כאל נקודת האמצע של ההתפלגות.** התלמידים המחזיקים בתפיסה זו, יתייחסו לממוצע כאל כלי היכול לספק היגיון וגם לניתוח הנתונים. הממוצע מבחינתם הוא מייצג של קבוצת הנתונים מנקודת מבט מתמטית ותלוית הקשר. תלמידים אלו יבחרו ב"אמצע" כמייצג קבוצת הנתונים, וה"אמצע" הזה יכול להיות החציון, אמצע טווח הנתונים המנותחים, או אמצע ציר ה-X המוגדר לפניהם. בהתמודדות עם הפעילות הם עשויים להשתמש בסימטריה בבניית התפלגות הנתונים סביב המרכז. כלומר, ליצור התפלגות שבה ערכים גבוהים יאזנו על ידי ערכים נמוכים. תלמידים אלו יתקשו להתמודד עם בניית התפלגות נתונים שאיננה מכילה את ערך הממוצע, או עם התפלגות שאיננה סימטרית.

5. **התייחסות לממוצע כאל נקודת איזון.** תלמידים המחזיקים בתפיסה זו, יתייחסו לממוצע כאל כלי שיכול לספק היגיון וגם לניתוח הנתונים. הם יתייחסו אל הממוצע כאל נקודת איזון המייצגת את כלל הנתונים. השימוש בממוצע החשבוני ייעשה לרוב מתוך הבנה התחלתית של היחסים הכמותיים בין הנתונים ומרכז ההתפלגות שלהם. כך יוכלו ליצור באופן גמיש קבוצת נתונים העומדת מאחורי ערך ממוצע מסוים ולהפך. שלוש הגישות האחרונות יכולות להוביל תלמידים להסתכלות כוללת יותר על התפלגות הנתונים, ולעשות שימוש מושכל באסטרטגיות שונות לחשיבה על מרכז ההתפלגות והמדדים המייצגים מרכז התפלגות זה. זיהוי תפיסות אלו של התלמידים מאפשר בחירה מושכלת של דרכים לקידום לקראת הסתכלות כוללת על הנתונים וראיית המרכז כמייצג את קבוצת הנתונים.

מהלך הפתרון

נתייחס בסעיף זה לתרומה האפשרית של הסעיפים השונים לקידום תפיסות התלמידים.

חלק ראשון

אורך כף הרגל של אחד או יותר מתשעת התלמידים הוא 15 ס"מ. סעיף זה מאפשר לזהות את התפיסות הבסיסיות של התלמידים. תפיסות אלו יעלו מעצם בחירת התפלגות הנתונים, וכן במרחב ההתפלגויות האפשריות שהתלמידים יציעו.

אורכי כפות הרגליים של כל אחד מתשעת התלמידים שונה מ-15 ס"מ. מטרת סעיף זה היא לעמת את בעלי תפיסת הממוצע כשכיח עם תפיסתם. נוסף לכך, מכיוון שמספרם של התלמידים הוא אי-זוגי, לא ניתן במקרה זה ליצור התפלגות סימטרית, ועל כן גם בעלי תפיסת הממוצע כאמצע יקבלו הזדמנות לבחון את תפיסתם. כך ייתכן שהם יתקדמו לעבר תפיסות מתקדמות יותר ביחס לייצוגיות מרכז ההתפלגות.

ידוע כי אורך כפות הרגליים של שניים מבין התלמידות שהשתתפו בסקר הוא 17 ס"מ ו-13 ס"מ. מטרת סעיף זה היא לקדם את תפיסות התלמידים לעבר הסתכלות על הערך הממוצע כנקודת איזון. אחת השיטות התומכת בפיתוח של חשיבה מעין זו היא מיקום ערכים במרחקים שווים ביחס לערך הממוצע. לדוגמה, 17 ו-13 ממוקמים במרחק של 2 ס"מ מהערך הממוצע. תלמידים המתקדמים לעבר תפיסה זו, יבחרו בפיזור כמו: 12, 12, 13, 13, 15, 17, 17, 18, 18. נשים לב, כי הפתרון המוצע בדוגמה מחייב מיקום של מספר זהה של נתונים בשני צידי הערך הממוצע, או מיקום של נתון אחד כמאזן של נתון אחר ביחס לממוצע. למרות

שזו תפיסה מתקדמת ביחס לייצוגיות קבוצת הנתונים, נרצה לפתח גמישות גם לגביה, כפי שנראה בהמשך.

ידוע כי אורך כפות הרגליים של שניים מבין תלמידים שהשתתפו בסקר הוא 12 ס"מ ו-10 ס"מ.

ידוע כי אורך כפות הרגליים של שניים מבין התלמידות שהשתתפו בסקר הוא 17 ס"מ ו-20 ס"מ. תפקידן של שתי שאלות אלו הוא לבסס את תפיסת הממוצע כנקודת איזון, ולהרחיב אותה לתפיסה אשר רואה בממוצע נקודת שיווי משקל של כלל הנתונים בהתפלגות הנתונים. כלומר, מטרתן לעודד את ההתייחסות הכוללנית לנתונים, תוך חשיבה על המרחקים של כלל הנתונים מהממוצע. בהתייחסות זו תלמידים יציעו פיזור רחב יותר של הנתונים, ויבחנו את מרחקיהם של מקבצי נתונים ביחס לממוצע, זאת כדי לשקול את מיקומו של נתון נוסף.

חלק שני

בחלק זה ההנחיות או האילוצים המוצעים מעודדים את התלמידים לבחון את תפיסותיהם ולקדם אותן. אם מדגימים חלק זה במליאה, כדאי להתחיל מהמצב ההתחלתי הנתון בשאלה, ולעבור בין הסעיפים, כשבכל פעם המצב ההתחלתי הוא זה שסיימנו בו בסעיף הקודם.

כדאי לתת לתלמידים להתמודד תחילה עם מספרים קטנים, כדי להקל עליהם את החישוב ולמקד אותם בנושא הייצוגיות. בהינתן המצב ההתחלתי ובו 9 הפתקיות ממוקמות על הערך הממוצע (הממוצע החשבוני במקרה הזה), יש להנחות את התלמידים להזיז פתקית אחת. ההבנה כי לא ניתן לאזן את הנתונים סביב הממוצע החשבוני בעזרת דרישה זו חשובה, והיא מעודדת את תפיסת הממוצע כנקודת איזון. בהתנסות במליאה כדאי לבקש מהתלמידים להזיז פתקית אחר פתקית, כאשר בכל פעם יש לבחון אם הממוצע החשבוני אכן מייצג את קבוצת הנתונים.

בשלב זה התלמידים ינטו להציע התפלגות סימטרית, שבה כל נתון מותאם לנתון הממוקם במרחק שווה מהממוצע החשבוני. זהו שלב המתאים לשאלות "מה אילו?" "מה היה קורה אילו אחד הנתונים היה בעל ערך מסוים?" את הערכים המסוימים הללו כדאי לבחור כך, שיהיה על התלמידים להזיז יותר מפתקית אחת כדי לאזן את האחרות. מצב זה אפשרי אם למשל, תזוזה מערך אחד לאחר בצד ימין של הערך הממוצע, אינה יכולה להיות מאוזנת על ידי תזוזה תואמת בצידו השמאלי. חשוב למשל, להציע להזיז את ערך אחת הפתקיות לערך אפס, ולבחון אם יש לערוך שינוי בערך הנתונים האחרים כדי לשמור על ערכו של הערך הממוצע של הקבוצה.

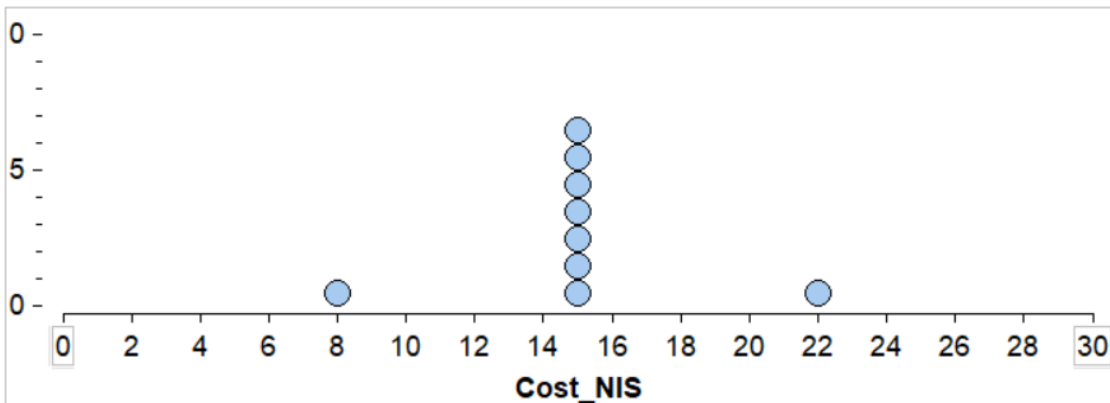
דוגמאות לאופן ההתמודדות עם השאלות השונות

הזיזו פתקית אחת בלבד מבין הפתקיות, כך שהמוצע החשבוני של מחירי החוברות יישאר 15 ₪. האם הדבר אפשרי?

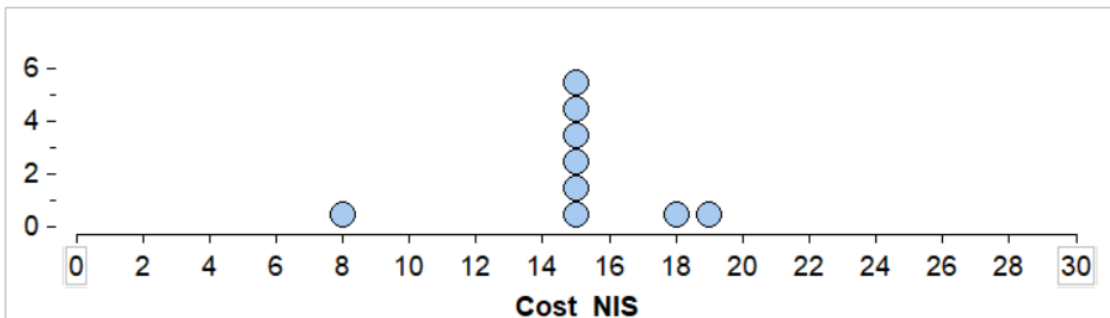
כזכור, 9 הפתקיות מונחות בשלב הזה על הערך הממוצע – כלומר על 15 ₪. לא ניתן להזיז פתקית אחת בלבד ולשמור על ערך הממוצע החשבוני.

אחת החוברות נמכרת בהנחה. מחירה הורד ל- 8 ₪. מה צריך לעשות כדי שהממוצע החשבוני של מחירי החוברות יישאר 15 ₪?

מצב זה מאפשר לחוש את התזוזה בממוצע החשבוני מ-15 לערך נמוך יותר בעקבות ההעברה של פתקית אחת לערך 8 ₪. אפשר להחזיר את הממוצע החשבוני ל-15 ₪ על ידי העברת פתקית אחת שערכה 15 ₪ לעבר ערך אשר "יאזן" את הערך הנמוך יותר של החוברת (8 ₪). המרחק של אותו הערך (22 ₪) מהממוצע צריך להיות שווה למרחק של 8 ₪ מהממוצע.



אפשרות מתקדמת יותר היא להזיז שתי פתקיות. בחירה זו נובעת מן ההבנה, שערכים הממוקמים במרחקים שווים משני צידי הממוצע, משפיעים על הממוצע באותו אופן, ועל כן מאזנים זה את זה. אם 8 מרוחק מהערך 15 מרחק של 7 יחידות, נוכל לבחור לשנות את ערכן של שתי פתקיות מ-15 לערכים שיהיו מרוחקים מרחק זהה בסך הכול, בצידו השני של הממוצע (למשל, 18 ו-19).



הזיזו שתי פתקיות (שנו את מחירי החוברות), כך שהממוצע החשבוני של מחירי החוברות יישאר 15 ₪. האם הדבר אפשרי? אם כן, הציעו מספר דרכים לפתרון.

אם נחזור למצב ההתחלתי שבו כל הפתקיות ממוקמות על הערך 15 ₪, אזי נוכל להעביר שתי פתקיות מ-15, כך שאחת תמוקם מימין לממוצע החשבוני, והשנייה לשמאלו, וזאת במרחקים זהים זה לזה מן הממוצע החשבוני. קיימות אפשרויות רבות לעשות זאת. לדוגמה, בחירה באחד מהזוגות הבאים: 14 ו-16; 13 ו-17; 11 ו-19, ועוד.

הנחה ניתנת על שתיים מבין החוברות. מחירן הוא 8 ₪. מה צריך לעשות כדי לשמור על כך שהממוצע החשבוני של מחירי החוברות יהיה 15 ₪? הציעו מספר דרכים לפתרון.

במקרה זה, ישנם שני ערכים אשר מקטינים את הממוצע, על כן יש לשנות את ערכן של שתי חוברות מ-15 ₪ ל-22 ₪. או לחלופין לבדוק מהם המרחקים של שתי החוברות שמחירן 8 ₪ מהממוצע, ולחשוב איך לאזן את מחירן. כל חוברת בעלת מחיר זה מרוחקת מרחק של 7 יחידות מהממוצע החשבוני, לכן אפשר להזיז פתקית אחת מ-15 ₪ לעבר $15+7+7=29$ ₪. לחלופין, יש להעביר פתקיות מהערך 15 לעבר ערכים הגדולים מ-15, אשר סך כל המרחקים שלהם מ-15 יהיה שווה ל-14 (מרחקן של שתי החוברות שמחירן הוא 8 ₪ מערך הממוצע החשבוני).

דוגמאות לאפשרויות אלו הן למשל, העברת פתקיות מ-15 אל הערכים: 16, 17, 18, 19, 19. אפשרות נוספת היא העברת פתקיות מ-15 אל הערכים: 17, 17, 17, 23.

הנחה ניתנת על שתיים מבין החוברות. מחירן הוא 8 ₪ ו-7 ₪. מה צריך לעשות כדי לשמור על כך, שהממוצע החשבוני של מחירי החוברות יהיה 15 ₪? הציעו מספר דרכים לפתרון.

גם במקרה זה ניתן לאזן על ידי העברת 2 פתקיות המאזנות את הפתקיות שהועברו אל 7, 8 ₪. כלומר, לעבר 22, 23 ₪. אפשר גם לאזן בעזרת פתקית אחת – שמרחקה שווה למרחקם של 7 ו-8 מהממוצע, או בעזרת מספר פתקיות שמרחקן הכולל שווה לזה של הפתקיות הממוקמות על 7 ו-8 ₪.

מחירן של שתיים מבין החוברות השתנה. מחירן הוא 8 ₪ ו-17 ₪. מה צריך לעשות כדי לשמור על כך, שהממוצע החשבוני של מחירי החוברות יהיה 15 ₪? הציעו מספר דרכים לפתרון.

בשאלה זו ניתן להציע להזיז 2 פתקיות אשר כל אחת מהן תאזן את הערכים 8 ו-17. לחלופין, ניתן לבדוק מה מידת השפעתם של שני ערכים אלו על הממוצע החשבוני: 8 מרוחק מ-15 ב-7 יחידות. 17 מרוחק ב-2 יחידות. 8 רחוק מהממוצע החשבוני יותר מ-17, לכן, משפיע עליו יותר מאשר 17. כדי לאזן את מידת ההשפעה הזו, אפשר לשנות את ערכה של אחת הפתקיות

מ-15 ל-20. 20 הוא ערך הגדול מהמוצע החשבוני, והמרחק שלו מהמוצע החשבוני שווה להפרש בין המרחקים 8 ו-17 מהמוצע החשבוני (כלומר $2=7-5$). דרך אחרת לעשות זאת היא להעביר מספר פתקיות מהערך הממוצע לימינו, כך שסכום המרחקים הכולל שלהן מ-15 יהיה שווה ל-5.

שתיים מבין החוברות היו פגומות, ולכן נמכרו במחיר מוזל של 2 ₪ ו-3 ₪. מה צריך לעשות כדי לשמור על כך, שהמוצע החשבוני של מחירי החוברות יהיה 15 ₪? הציעו מספר דרכים לפתרון.

שאלה זו מאפשרת לנו לחוש את ההשפעה של ערכים קיצוניים על הממוצע. כדי לשמור על ערך הממוצע החשבוני, יש להזיז מספר פתקיות מהערך 15 ₪, כך שהסכום הכולל של המרחקים שלהם מהמוצע יהיה שווה לסכום הכולל של 3 ו-2 מהמוצע. ניתן לעשות זאת למשל, על ידי הזזת פתקית אחת, כך שתמוקם בערך 40 ₪, או על ידי הזזת 5 פתקיות מהמוצע, כך שימוקמו בערך 20 ₪.

שתיים מבין החוברות הוחלפו לחוברות מיוחדות שמחירן 70 ₪. מה צריך לעשות כדי לשמור על כך, שהמוצע החשבוני של מחירי החוברות יהיה 15 ₪?

מצב זה איננו אפשרי מכיוון שלא ניתן לאזן את הערכים כך שהמוצע החשבוני של מחירי החוברות יישאר 15. זוהי הזדמנות לשאול את התלמידים על ערכי הקצה הסבירים של הנתונים, ולהפנות את תשומת ליבם לרגישות הממוצע החשבוני לערכים קיצוניים.

דיון:

את הפעילות כדאי לסכם בהצגת התוצרים ובדיון כיתתי.

במהלך הצגת התוצרים יש לעודד את התלמידים לדברים שלהלן:

1. להציע ולבחון אסטרטגיות שונות ומרובות ככל האפשר. דיון באסטרטגיות אלו יאפשר לתלמידים לבחון את תפיסותיהם, ולבסס תפיסות מתקדמות יותר.
2. להתייחס אל הרעיונות מרכז ופיזור הנתונים כמאפייני התפלגות הנתונים. התייחסות זו יכולה להוביל לדיון בצורך ובדרכים לייצג את מרכז ההתפלגות.
3. לדון במצבים המציאותיים, לבחון באופן ביקורתי אם נתונים מסוימים הם סבירים או לא. לדוגמה, האם סביר שאורך כף רגל של ילד הוא 50 ס"מ? מידה זו איננה סבירה גם בקרב מבוגרים, אך הדיון בקרב ילדים מדגיש זאת יותר.

4. לחשוב כיצד היו משתנות תשובותיהם בחלק שני של המשימה, אילו היה עליהם להקפיד על כך, שערך החציון היה נשמר ושווה ל-15 ס"מ? או אילו היה עליהם להקפיד על כך, שערך השכיח היה נשמר ושווה ל-15 ס"מ?
5. לדון ביתרונות ובחסרונות של מדדי מרכז שונים. האם לדוגמה השכיח מייצג את כלל הנתונים בהתפלגות? מאפשר לספר סיפור המתייחס לכלל הנתונים? מי מבין מדדי המרכז, הממוצע החשבוני או החציון רגישים יותר לערכים קיצוניים בקבוצת הנתונים? שאלות אלו יכולות להוביל לעבר הסתכלות ביקורתית יותר על נושא הייצוגיות של קבוצת הנתונים בעזרת מדדי המרכז.