

שאריות הקסם: הנחיות למורה

מטרות הפעילות:

מטרות פעילות זו הן לפתח ולעודד יצירתיות בקרב התלמידים בעזרת בעיה פתוחה (Open-start ו-Open-end) עם מספר רב של פתרונות. מוקדי הפעילות הם: המספרים הטבעיים, חילוק ושארית בחלוקה במספר מסוים.

מילות מפתח: חילוק, הכרת המספרים, שארית, חוש למספרים.¹

התאמת הפעילות ואופן הפעלתה:

הפעילות מיועדת לתלמידים בכיתות ג-ד.

מומלץ לאפשר לתלמידים לעבוד על פעילות זו בזוגות או בקבוצות קטנות כדי לעורר שיח על השאלות המוצעות. עם זאת, ניתן לעבוד על הפעילות גם ביחידים. בסיום הפעילות מומלץ לסכם את התשובות השונות בדיון כיתתי.

הפעילות יכולה לשמש לפתיחת שיעור בנושא המספרים הטבעיים ופעולות החשבון אשר מוקדו בחלוקה עם שארית, או כשיעור העומד בפני עצמו.

מהלך הפתרון

פתרון סעיפים 1 ו-2:

מהי שארית החלוקה ב-5 של המספר הדו־ספרתי שבו בחרתם? מהי שארית החלוקה ב-8 של המספר הדו־ספרתי שבו בחרתם?

ניתן לבחור בשאלה זו מספרים רבים. נבחר לדוגמה את המספר 29.

שארית החלוקה ב-5 של 29 שווה ל-4:

$$29:5=5 \text{ (4)}$$

שארית החלוקה ב-8 של 29 שווה ל-5:

$$29:8=3 \text{ (5)}$$

¹ "חוש למספרים" מתבטא ביכולת להבין את הקשרים בין המספרים לבין הפעולות, להשתמש במספרים בצורה גמישה, להשתמש באומדן ולשפוט סדרי גודל של מספרים, לשפוט את ההגיון של התשובות, לעבור בין הצגות שונות של מספרים, לקשר בין תשובות שמקבלים ובין המציאות. בעצם – להשתמש במספרים בצורה חכמה (מתוך: "חוש למספרים", סדרה בת שתי חוברות המיועדת לכתות ד-ז לפיתוח תובנה מספרית, מאת ד"ר צביה מרקוביץ).

פתרון סעיף 3:

נסו למצוא מספר דו-ספרתי שונה מהמספר הראשון שבו בחרתם, אשר מותיר אותה שארית בחלוקה ב-5 ואותה שארית בחלוקה ב-8.

נבחן שאלה זו בעזרת המספר שבחרנו: 29.

בסעיף 1 ראינו כי שארית החלוקה ב-5 של 29 שווה ל-4:

$$29:5=5 \text{ (4)}$$

נבדוק אילו מספרים טבעיים, דו-ספרתיים, מותירים שארית חלוקה ב-5 השווה ל-4. נוכל להיווכח על ידי בחינת לוח המאה וצביעת המספרים הללו **בצבע צהוב**:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

נשים לב לחוקיות שבטבלה, המאפשרת לאפיין את המספרים המותירים שארית חלוקה ב-5 השווה ל-4. נוכל לתאר אותם כמספרים טבעיים, דו-ספרתיים השווים ל-4 ועוד כפולה כלשהי של 5.

בהתבוננות בלוח המאה נוכל לראות שאם שני מספרים שווים ל-4 ועוד כפולה של 5, ההפרש ביניהם יהיה כפולה של 5 (לדוגמה, $74-44=30$, 30 הוא כפולה של 5).

נתייחס עתה אל שארית החלוקה ב-8 של 29. בסעיף 2 ראינו ששארית החלוקה ב-8 של 29 שווה ל-5:

$$29:8=3 \text{ (5)}$$

נבחן אילו מספרים טבעיים, דו־ספרתיים, מותרים שארית חלוקה ב-8 השווה ל-5.

ניעזר שוב בלוח המאה: אם המספר מופיע בלוח המאה ללא צבע, נצבע את המשבצת של המספר בכחול; אם משבצת המספר צבועה בצבע צהוב, כלומר מספר המותר שארית חלוקה ב-5 השווה ל-4, אזי נצבע את המשבצת של המספר בירוק. (נוכל להציע לתלמידים להקיף את המספרים בעיגול במקום לצבוע בצבעים כחול וירוק).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

מהתבוננות בטבלה נוכל לתאר את המספרים שמותרים שארית חלוקה ב-8 השווה ל-5, כמספרים טבעיים, דו־ספרתיים, השווים ל-5 ועוד כפולה כלשהי של 8.

בסעיף זה התבקשנו למצוא מספר דו־ספרתי שונה מהמספר הראשון שבו בחרנו, אשר מותר אותה שארית בחלוקה ב-5, ואותה שארית בחלוקה ב-8. התבוננות בטבלה מאפשרת לנו לזהות שני מספרים המקיימים את דרישות השאלה והם: 29 (המספר שבחרנו) ו-69, אשר צבועים בירוק.

ננסה עתה להגיע להכללה לגבי מספרים העומדים בדרישות השאלה (ללא תלות במספר 29 בו בחרנו). נוכל לתאר את שני המספרים העומדים בדרישות השאלה כ-5 ועוד כפולה כלשהי של 8:

- מספר א' שווה ל-5 ועוד כפולה כלשהי של 8.

- מספר ב' שווה ל-5 ועוד כפולה כלשהי (שונה מזו של מספר א') של 8.

נניח שהמספר הגדול מבין המספרים א' ו-ב' יהיה המחוּסָר, והקטן מבין השניים יהיה המְחֻסָר. ההפרש בין מספר א' ומספר ב' שווה לכפולה של 8 במספר טבעי כלשהו.

לדוגמה: 85 ו-13 מותרים שארית חלוקה ב-8 השווה ל-5.

ההפרש ביניהם הוא:

$$85-13=(8\times 10+5)-(8\times 1+5)=8\times 10+5-8\times 1-5=8\times(10-1)=8\times 9=72$$

72 הוא כפולה של 8.

על פי השאלה, ניתן לתאר את שני המספרים הדרושים, כסכום של 4 ועוד כפולה כלשהי של 5. לפיכך, נוכל לערוך תהליך דומה לתהליך הקודם, ולכתוב את ההפרש ביניהם ככפולה כלשהי של 5. לסיכום, המספרים העומדים בדרישות השאלה הם מספרים שאפשר לתאר את ההפרש ביניהם בזמנית ככפולה של 5 וגם ככפולה של 8.

המספרים 5 ו-8 הם זרים (אין להם גורם משותף הקטן מהם). לפיכך, נוכל לומר שההפרש בין שני מספרים אשר מותרים את אותה שארית בחלוקה ב-5, ואותה שארית בחלוקה ב-8 הוא כפולה של 5 וגם כפולה של 8, ללא תלות בשאריות. כלומר, ההפרש הוא כפולה של מכפלת שני גורמים אלו. מכיוון שמדובר במספרים דו-ספרתיים, הכפולות האפשריות הן:

$$1\times 8\times 5=40$$

$$2\times 8\times 5=80$$

במילים אחרות, אם נרצה לחפש שני מספרים טבעיים, דו־ספרתיים, אשר מותרים אותה שארית בחלוקה ב-5, ואותה שארית בחלוקה ב-8, יהיה עלינו לחפש שני מספרים, שההפרש בין המספר שבו בחרנו לבין המספר החדש (או להפך) הוא כפולה של 40 (או 80).

מאחר שמדובר במספרים טבעיים, דו־ספרתיים, יהיה עלינו לבדוק לכל היותר ארבע אפשרויות, לפי המספר הראשון שבו בחרנו:

- המספר שבו בחרנו פחות 40
- המספר שבו בחרנו פחות 80
- המספר שבו בחרנו ועוד 40
- המספר שבו בחרנו ועוד 80

נדגים זאת בעזרת המספר 29. מאחר שמדובר במספרים טבעיים, המספר החדש שאותו אנחנו מחפשים גדול מ-29 (אם לא כן, יש לחסר את המספר החדש מ-29). ההפרש בין המספר החדש לבין 29 מתחלק ללא שארית ב-5 וגם ב-8, ולכן גם בכפולה שלהם (40 או 80):

$$5 \times 8 = 40$$

$$29 + 40 = 69$$

$29 + 80 = 109$, שהוא איננו מספר דו־ספרתי כנדרש. לכן, **המספר המבוקש הוא 69.**

בדיקה:

$$69 : 5 = 13 \text{ (4)}$$

שארית החלוקה ב-5 של 69 שווה ל-4:

$$69 : 8 = 8 \text{ (5)}$$

שארית החלוקה ב-8 של 69 שווה ל-5:

פתרון סעיף 3א':

האם תמיד אפשר לפעול בדרך זאת?

התשובה היא כן. הסיבה לכך היא שלכל מספר דו־ספרתי נוכל להוסיף 40 או להחסיר ממנו 40, ולפחות באחד מהמקרים נקבל מספר דו־ספרתי.

פתרון סעיף 3ב':

כמה מספרים כאלה אפשר למצוא?

בכלליות, אם המספר הראשון שבו בחרנו הוא בטווח שבין 10-19 או בטווח שבין 90-99, נוכל למצוא עוד שני מספרים המקיימים את הדרישות שהוגדרו בשאלה. אם נבחר את המספר הראשון מן המספרים שבטווח 20-89 אז נוכל למצוא עוד מספר אחד בלבד.

במקרה של 29, המספר שבו בחרנו בדוגמה, אין מספרים כאלה מלבד 29 ו-69, כי המספר העוקב הבא אחריו הוא 109, שהוא מספר תלת־ספרתי.

פתרון סעיף 3 ג':

האם תשובותיכם לשאלות 1, 2, 3 ישתנו אם תבחרו מספר טבעי ודו־ספרתי אחר?
התשובה היא כן. אילו בחרנו למשל את המספר 15, היינו יכולים בסעיף 2 לבחור שני מספרים שונים: 55 או 95.

פתרון סעיף 4:

יעל בחרה מספר דו־ספרתי וחישבה את השאריות שהוא מותיר בחלוקה במספרים 3, 4, 5. לאחר מכן ניסתה למצוא מספר דו־ספרתי אחר שתוצאות חלוקתו באותם מספרים תותיר שאריות דומות, אך לא הצליחה. שערנו מהו המספר שבו בחרה יעל?

המספר 60 מתחלק בכל המספרים 3, 4, 5, ולכן לכל מספר דו־ספרתי שבו נבחר אפשר להוסיף 60 או להחסיר ממנו 60, כך ששאריות החלוקה במספרים אלו (3, 4, 5) לא ישתנו. מכאן נוכל להסיק, שהמספר שבו בחרה יעל הוא מספר שאם נוסיף לו 60, וגם אם נחסיר ממנו 60 לא נקבל מספר דו־ספרתי. לכן המספר חייב להיות קטן מ-70 (שאם לא כן נחסיר 60 ונקבל מספר דו־ספרתי), וגם גדול מ-39 (שאם לא כן נוסיף 60, ונקבל מספר דו־ספרתי).
לסיכום, המספר צריך להיות בתחום שבין 40 ל-69.

אסטרטגיות להתמודדות עם שאלות הפעילות השלישית

אם רוצים למצוא מספרים שתוצאתם היא שארית מסוימת בחלוקה ב-5, ושארית מסוימת בחלוקה ב-8, וכן אם רוצים למצוא מספר דו־ספרתי שתוצאותיו הן שאריות זהות למספר הנבחר, אפשר להיעזר באסטרטגיות הבאות:

- **אסטרטגיית ניסוי וטעייה** – מנסים לאתר מספרים המקיימים את הכללים דרך ניסוי וטעייה, עד שמקבלים אותן שאריות כמו של המספר הנבחר.
- **אסטרטגיה שיטתית** – מעיינים בכל המספרים הדו־ספרתיים מ-10 עד 99, ומחשבים את השארית בכל אחד מהם עד שמקבלים אותה שארית כמו של המספר הנבחר.
סביר שתלמידים יתחילו מהשיטות לעיל, ואז יחשפו שיטה יעילה יותר כמו השיטות להלן:
- **אסטרטגיה המתייחסת אל סדרה אחת** – מתחילים מהמספר שבחרנו בסעיף 1 ויוצרים סדרה בקפיצות של 8. למשל, עבור 29 נקבל 37, 45, 53, 61, 69, 77, 85, 93. לאחר מכן מעיינים בכל המספרים שבסדרה, ומחשבים שארית בחלוקה ב-5.
- **אסטרטגיה של חיתוך סדרות** – אם נבחר שתי סדרות אשר מתחילות מהמספר שבו בחרנו בתחילה, וניצור שתי סדרות של מספרים באופן הבא: סדרה אחת שהפרשה

הוא 5, וסדרה שנייה שהפרשה הוא 8, אזי נוכל למצוא את המספרים המופיעים בשתי הסדרות.

לדוגמה, עבור 29 נקבל את הסדרות הבאות:

סדרה של מספרים ששארית החלוקה ב-5 שווה ל-4:

39, 44, 49, 54, 59, 64, 69, 74, 79, 84, 89, 94, 99

סדרה של מספרים ששארית החלוקה ב-8 שווה ל-5:

29, 37, 45, 53, 61, 69, 77, 85, 93

לאחר מכן נוכל לחפש את המספר המופיע בשתי הסדרות. עם מציאת המספר 69 המופיע בשתי הסדרות אפשר לחפש מהי החוקיות אשר מובילה למציאת המספרים העוקבים.

שאלות לדין:

- האם יש לכל שאלה יותר מפתרון אחד?
 - איזו הכללה נוכל לנסח לגבי הפתרונות שהצעתם? מה מאפיין את המספרים המתאימים לדרישות השונות בפעילות זו? בעת עריכת ההכללה, ניתן להסב את תשומת לב התלמידים לכך שבפעילות זו המספרים 5 ו-8 הם זרים, ולכן הכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם היא 40. אם המספרים הנבחרים לא יהיו זרים, מרחב הפתרונות יהיה רחב יותר.
 - איזו אסטרטגיה כדאי לנקוט כדי לפתור את השאלה?
ייתכן שיהיו תלמידים אשר יציעו מגוון של פתרונות, וייתכן שאחרים יציעו הכללה ראשונית. חשוב לאפשר להם להציע את שני הסוגים כדי שיוכלו לחוש תחילה את השונות בין סוגי הפתרונות. באופן זה יוכלו ליצור את ההבנות שלהם ביחס להכללה. חשוב גם להגיע בסופו של דבר להכללה המאפשרת "לשתול את הזרעים" לחשיבה אלגברית בהמשך.
- השאלה לגבי האסטרטגיה מעודדת את התלמידים לחפש "דרכי קיצור". כלומר, לערוך ניתוח לשאלה ולמאפייניה, ולחשוב באופן ביקורתי על הכללים שיש לשמור עליהם.

דף עזר

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100