פירוק והרכבה – ממשולשים למרובעים: הנחיות למורה

מטרות הפעילות:

מטרות פעילות זו הן לפתח ולעודד יצירתיות בקרב התלמידים בעזרת בעיית חקר פתוחה עם אילוצים, וכן עם מספר רב של פתרונות.
מוקדי הפעילות הם: תכונות מקביליות, בניית מקביליות שונות המורכבות ממשולשים חופפים שווה שוקיים וישרי זווית, יחסי הכלה בין מקביליות וחשיבה אלגברית ראשונית תוך כדי עריכת חיבורים ביניהם.
הפעילות מומלצת לשמש כפתיחת שיעור או כשיעור העומד בפני עצמו.

מילות מפתח: משולשים, מקביליות, תכונות מרובעים, ריבוע, מלבן, מקבילית, חשיבה אלגברית.

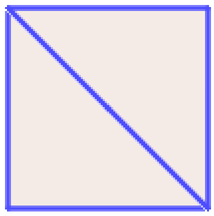
התאמת הפעילות ואופן הפעלתה:

הפעילות המוצעת מתאימה לתלמידים בכיתות ג-ו.
עבור הכיתות הנמוכות אפשר להפוך את המשימה למונחית יותר. מומלץ לאפשר לתלמידים לעבוד על הפעילות בזוגות או בקבוצות קטנות כדי לעורר שיח על השאלות המוצעות. את הפעילות כדאי לסכם בדיון כיתתי.

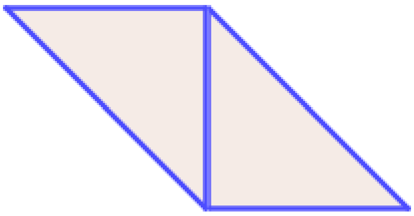
במידה והדבר אפשרי, אנו ממליצים להציע לתלמידים להשתמש ביישומון שבקישור. לחלופין, ניתן להיעזר בדף גזירה של המשולשים אשר מופיע בסוף הפעילות.

הצעות לפתרון ולהכללות:

1. **מטרת השאלה הראשונה** היא מפגש ראשוני עם הרעיון של יצירת מקביליות רבות ובעלות תכונות שונות מתוך משולשים קטנים, ללא הגבלות. יש דרכים רבות לבנות מקביליות חדשות ממספר כלשהו של משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים. את חלקן נכיר בהמשך, ולמעשה סביר שהתלמידים יציעו בניות דומות לדוגמאות אלו.
2. **מטרת השאלה השנייה** היא לאפשר התנסות הדרגתית בבניית המקביליות, תוך כדי למידה כי יש יותר ממקבילית אחת אשר אפשר לבנות. משני משולשים חופפים, שווי שוקיים וישרי זווית אפשר ליצור ריבוע וגם מקבילית:



איור 1: מקבילית מיוחדת: ריבוע



איור 2: מקבילית שאיננה ריבוע

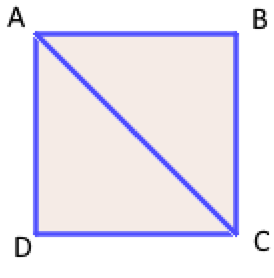
נסביר מדוע בשני המקרים מדובר במקביליות:

על פי ההגדרה, מקבילית היא מרובע שכל שתי צלעות נגדיות שבו שוות זו לזו.

בדוגמה השמאלית למעלה (איור 2: מקבילית שאיננה ריבוע), לפנינו מרובע שנוצר מהרכבת שני משולשים חופפים – זוג אחד של צלעות נגדיות מורכב משוקי המשולש הנתון. מכיוון שמשולש זה הוא שווה שוקיים הרי צלעות נגדיות אלו שוות. הזוג השני של הצלעות הנגדיות מורכב משני בסיסי המשולש הנתון (היתר), ועל כן גם צלעות אלו שוות זו לזו.

בדוגמה הימנית למעלה (איור 1, ריבוע) נוכל להסביר באותו אופן: כל אחד מזוגות הצלעות הנגדיות שווה לשוקי המשולש הנתון, ועל כן קיבלנו מקבילית שכל ארבע צלעותיה שוות.

על פי ההגדרה, ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו ישרות. לכן, נותר להראות כי זוויות המרובע שקיבלנו הן ישרות (די להראות כי אחת מהן ישרה). מבין ארבע הזוויות (ראו איור 3 להלן), שתיים הן הזוויות הישרות שבמשולשים הנתונים (זויות B ו-D). שתי הזויות האחרות (A ו-C) מורכבות משתי זוויות המשולשים הנתונים. כל אחת מהן שווה אם כן ל-$45° + 45° = 90°$, ולכן מדובר בריבוע.

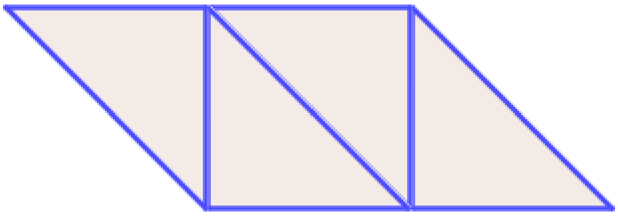


איור 3: ריבוע

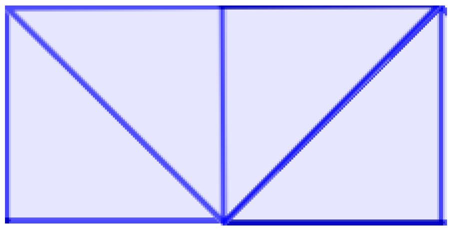
מטרת שאלה זו היא לחדד את ההתייחסות אל תכונותיהן של המקביליות השונות.

משלושה משולשים מבין המשולשים הנתונים אי אפשר לבנות מקביליות.

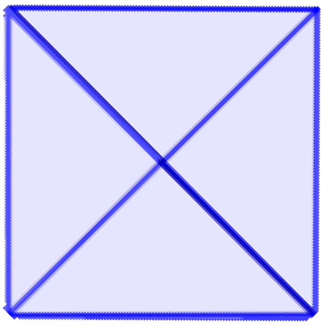
3. **מארבעה משולשים חופפים שווי שוקיים וישרי זווית** אפשר לבנות מקביליות גדולות יותר, ריבוע וגם מלבן (שאינו ריבוע) (ראו איורים 4, 5, ו-6).



איור 4: מקבילית



איור 5: מלבן



איור 6: ריבוע

נסביר מדוע שלוש הצורות (איור 4, איור 5, איור 6) הן מקביליות באופן דומה להסבר בסעיף 2. בכל אחד משלושת המקרים נראה כי כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו, כלומר, הצורות הן מקביליות, ונתייחס לייחודיות שבהן לפי הצורך.

המקבילית (איור 4): כל צלע מבין הצלעות הנגדיות של הזוג האחד מורכבת משתי צלעות שהן שוקי המשולשים שווי השוקיים החופפים, ועל כן צלעות נגדיות אלו שוות. כל צלע מבין זוג הצלעות הנגדיות השני מורכבת מבסיסי המשולשים שווי השוקיים החופפים, ועל כן הן שוות. לפיכך, מרובע זה הוא מקבילית.

המלבן (איור 5): כל צלע מבין זוג הצלעות הארוכות במרובע שווה לשתי שוקיים של משולשים שווי שוקיים חופפים, ועל כן הצלעות הן שוות. כל צלע מבין הצלעות הנגדיות של הזוג השני (הקצרות) במרובע מורכבת משוק אחת של משולשים שווי שוקיים חופפים, ועל כן צלעות נגדיות אלו גם הן שוות. כדי להוכיח שמדובר במלבן, עלינו לוודא כי אחת מזוויות המרובע היא ישרה. נוכל לעשות זאת על ידי שנבדוק אם המלבן מורכב משני ריבועים חופפים (על פי סעיף 2). או לחלופין אם נבדוק ישירות את הזוויות: כל

זווית מבין זוויות המרובע שווה לזוג זוויות בנות $45°$ של המשולשים החופפים שווי השוקיים וישרי הזווית. על כן, כל אחת מזוויות המרובע שווה $45°+45°$ כלומר, ל-$90°$, ולפיכך, מרובע זה הוא מלבן.

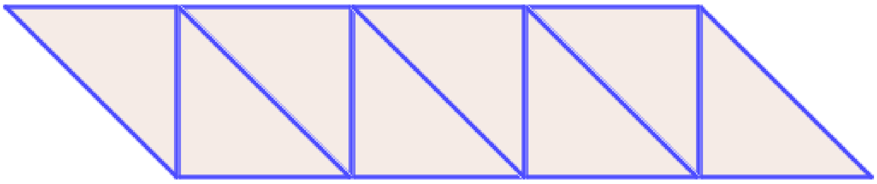
הריבוע (איור 6): כל אחד מזוגות הצלעות הנגדיות במרובע זה שווה לבסיס נתון של המשולש שווה השוקיים וישר הזווית. על כן, קיבלנו מקבילית שכל ארבע צלעותיה שוות. זוויות המרובע שקיבלנו הן ישרות (די להראות כי אחת מהן ישרה), שכן, בדומה למלבן, כל אחת מזוויות אלה מורכבת מזוג זוויות הבסיס של המשולש הנתון. לפיכך, כל אחת מהן שווה $45° +45° =90°$, ולכן מדובר בריבוע.

4. **נסו להכליל – עבור אילו מספרים של משולשים מבין המשולשים הנתונים אפשר לבנות:**

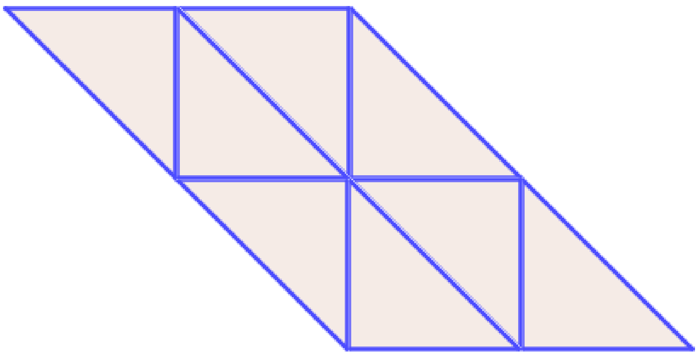
א. מקבילית

כל זוג משולשים שנצרף ייצרו מקבילית.

נוכל להגדיל את המקבילית על ידי צירוף של מקביליות זהות. לכן נוכל ליצור מקבילית מכל מספר זוגי של משולשים.



איור 7: מקבילית



איור 8: מקבילית

ב. ריבוע

כדי ליצור ריבועים גדולים, עלינו לבנות טבלה שבה מספר שווה של עמודות ושורות, ובכל תא לסרטט ריבוע המורכב ממשולשים. כלומר, מספר הריבועים בריבוע גדול יהיה שווה למספר טבעי כפול עצמו. מספר המשולשים שנזדקק להם תלוי בריבוע ההתחלתי. כפי שראינו, אפשר להרכיב ריבוע משניים או מארבעה משולשים (ראו איור 10 בהמשך).

סדרת המספרים המתארת את מספר המשולשים המרכיבים ריבועים מהצורה של הריבוע (איור 9, ריבוע המורכב משני משולשים) היא:

$2, 2\times2\times2, 2\times3\times3, 2\times4\times4, \dots$

כלומר,

$2, 8, 18, 32, \dots$

משמע, מספר המשולשים שנזדקק להם עבור ריבועים המורכבים מהצורה של הריבוע הימני (איור 9, ריבוע המורכב משני משולשים) הוא מהצורה:

$n\times n\times2$, עבור n טבעי כלשהו.

סדרת המספרים המתארת את מספר המשולשים המרכיבים ריבועים מהצורה של הריבוע באיור 10 (ריבוע המורכב מארבעה משולשים) היא:

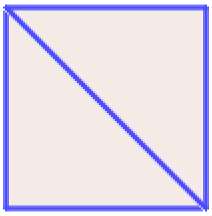
$4, 4\times2\times2, 4\times3\times3, 4\times4\times4, \dots$

מכיוון ש: $2\times2=4$, ועל פי חוק החילוף, סדרה זו שווה לסדרה להלן:

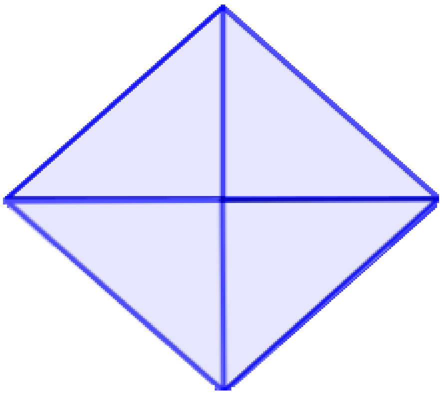
$4, 16, 36, 64, \dots$

כלומר, מספר המשולשים שנזדקק להם עבור ריבועים המורכבים מהצורה של הריבוע באיור 10 הוא מהצורה:

$n\times2\times n\times2$, עבור n טבעי כלשהו.



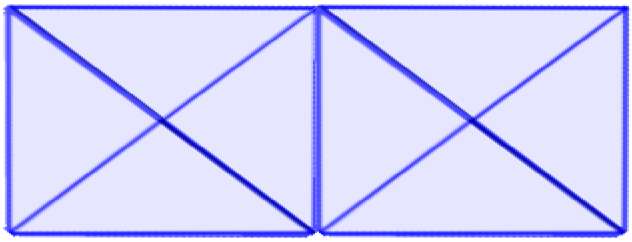
איור 9



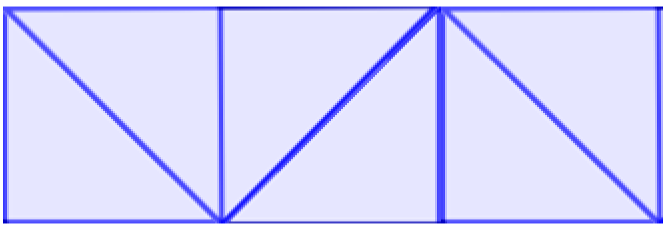
איור 10

ג. מלבן

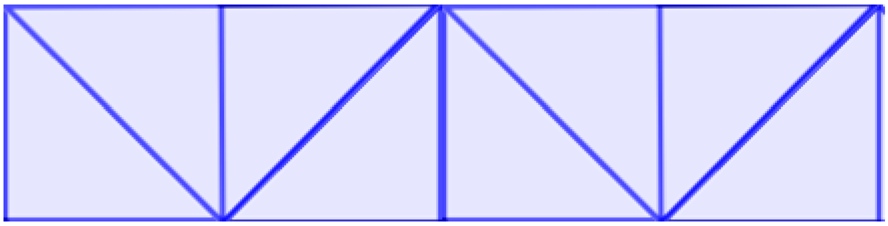
מלבן אפשר ליצור מריבועים שאורך הצלעות שלהם שווה. ריבוע אפשר ליצור מזוג משולשים שווי שוקיים וישרי זווית, אשר צלע הבסיס שלהם (היתר) משותפת, או מארבעה משולשים הצמודים זה לשוק של זה. אפשר להגדיל את המלבנים לאורך שורה אחת אורכית, או לגובה (ראו איורים 11, 12 ו-13). לכן, מלבן יהיה כפולה של זוג משולשים, או של ארבעה משולשים. מכל מקום, מספר המשולשים שנזדקק להם יהיה כל מספר זוגי (שכן ריבוע הוא מקרה פרטי של מלבן).



איור 11



איור 12



איור 13

שאלות להרחבה ודיון

בדיון מומלץ לאפשר לתלמידים להציג את פתרונותיהם ולתאר כיצד הגיעו לפתרון.

נוסף לכך, אפשר לדון בשאלות ההרחבה הבאות:

- האם הייתם משיבים תשובה שונה אילו היינו משתמשים במשולשים שווי שוקיים חדי־ זוויות?
- מה נוכל ללמוד על משפחת המקביליות ויחסי ההכלה ביניהן?
- מה נוכל ללמוד על הקשרים בין המשולשים ישרי הזווית ושווי השוקיים ובין המקביליות השונות שיצרנו?