

פירוק והרכבה – ממשולשים לטרפזים: הנחיות למורה

מטרות הפעילות:

מטרות פעילות זו הן לפתח ולעודד יצירתיות בקרב התלמידים בעזרת בעיית חקר פתוחה עם אילוצים, וכן מספר רב של פתרונות.

מוקדי הפעילות הם: תכונות טרפזים, בניית טרפזים שונים המורכבים ממשולשים חופפים שווה שוקיים וישרי זווית, וחשיבה אלגברית ראשונית תוך עריכת חיבורים ביניהם.

הפעילות יכולה לשמש כפתיחת שיעור או כשיעור העומד בפני עצמו.

מילות מפתח: משולשים, תכונות מרובעים, טרפז, חשיבה אלגברית.

התאמת הפעילות ואופן הפעלתה:

הפעילות המוצעת מתאימה לתלמידים בכיתות ג-ו.

עבור הכיתות הנמוכות ניתן להפוך את המשימה למונחית יותר. מומלץ לאפשר לתלמידים לעבוד על הפעילות בזוגות או בקבוצות קטנות כדי לעורר שיח על השאלות המוצעות. את הפעילות כדאי לסכם בדיון כיתתי.

במידה והדבר אפשרי, אנו ממליצים להציע לתלמידים להשתמש ב**יישומון** שבקישור. לחלופין, ניתן להיעזר בדף גזירה של המשולשים אשר מופיע בסוף הפעילות.

הצעות לפתרון ולהכללות:

- 1. מטרת השאלה הראשונה** היא לפגוש לראשונה יצירה של טרפזים רבים ובעלי תכונות שונות מתוך משולשים קטנים, ללא הגבלות. יש דרכים רבות לבנות טרפזים חדשים ממספר כלשהו של משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים. נכיר את חלקן בהמשך, ולמעשה סביר שהתלמידים יציעו בניית דומות לדוגמאות אלו.
- 2. מטרת השאלה השנייה** היא לחדד את ההבנה לגבי תכונותיהם של הטרפזים. משני משולשים מתוך המשולשים הנתונים אי אפשר לבנות טרפזים.
- 3. מטרת השאלה השלישית** היא לאפשר התנסות הדרגתית בבניית הטרפזים, תוך כדי למידה כי ישנו יותר מטרפז אחד שאפשר לבנות. משלושה משולשים שווי שוקיים וישרי זווית אפשר לבנות טרפזים מסוגים שונים: טרפז שווה שוקיים וטרפז ישר זווית. לפי ההגדרה, טרפז הוא מרובע שבו רק זוג אחד של הצלעות הנגדיות מקבילות, ואילו הזוג האחר לא מקביל. בכיתות היסוד נוכל להדגים זאת באופן אינטואיטיבי בלבד תוך הישענות על המרכיבים הבאים:

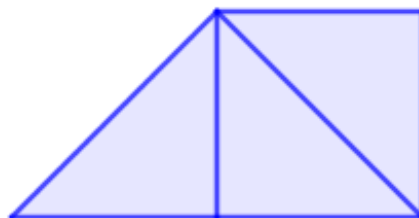
- הגדרת הישרים המקבילים: שני קווים ישרים במישור מקבילים זה לזה אם אין להם שום נקודה משותפת.
- ישרים הם אינסופיים. בהקשר הזה נשים לב לכך, שקטעים שאינם נפגשים אינם בהכרח מקבילים. על מנת שקטעים יהיו מקבילים צריך לחשוב על כך, שלא חשוב בכמה נאריך את הקטעים הללו, הם לעולם לא ייפגשו.
- המרחקים בין ישרים מקבילים הם קבועים (על כן הם אינם נפגשים).

בדיקה:

את הבדיקה נערוך בעזרת סרגל ושני שקפים שעליהם מצוירים ישרים: יש למקם את השקפים כך, שהישרים יוצבו על זוג צלעות נגדיות של הטרפז. הצבה זו מאפשרת לבחון את מגמת ההתרחקות והתקרבות של הישרים המוצבים על צלעות הטרפז. יש למקם את הסרגל כך שיאפשר לנו למדוד את המרחקים בין הקטעים בנקודות שבהן ממוקם הסרגל. בדיקה זו מאפשרת לבחון אם המרחק בין הקטעים הוא קבוע (או כמעט קבוע, במקרה של שגיאת מדידה), עבור כל אחד מזוגות הצלעות הנגדיות. לאחר שהסברנו מדוע שני המרובעים הם טרפזים, נראה כי מדובר בטרפזים מיוחדים. בטרפז שבאיור 1 נוכל להדגים בעזרת קיפול סביב ציר הסימטרייה, כי מדובר בטרפז ששתי הצלעות הנגדיות שלו, שאינן מקבילות, הן שוות. נוסף לכך, מדובר בצלעות מתאימות של משולשים חופפים (שוקי המשולשים שווי השוקיים), ועל כן גם הן שוות. הטרפז שבאיור 2 בנוי ממשולש הצמוד לריבוע (כפי שהראינו בסעיף 2). על כן בטרפז זה זווית אחת שווה ל- 90° .

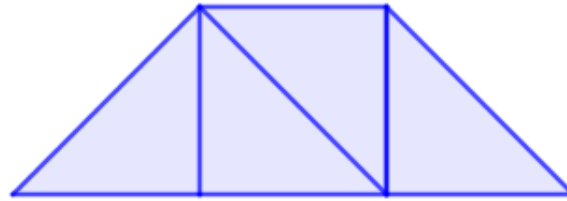


איור 1: טרפז שווה שוקיים



איור 2: טרפז ישר זווית

4. **מארבעה משולשים חופפים שווי שוקיים וישרי זווית** נוכל להרכיב טרפז שווה שוקיים (ראו איור 3) אך לא נוכל להרכיב טרפז ישר זווית.



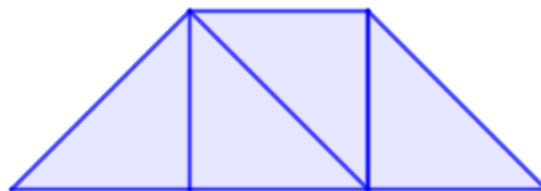
איור 3: טרפז שווה שוקיים

נוכל לבדוק כי הצורה שיצרנו היא אכן טרפז שווה שוקיים בדרך דומה לזו שבדקנו בסעיף 3.

5. **נסו להכליל – עבור אילו מספרים של משולשים מבין המשולשים הנתונים אפשר לבנות:**

א. **טרפז שווה שוקיים**

ניתן לבנות שני סוגים של טרפזים שווי שוקיים מינימליים:



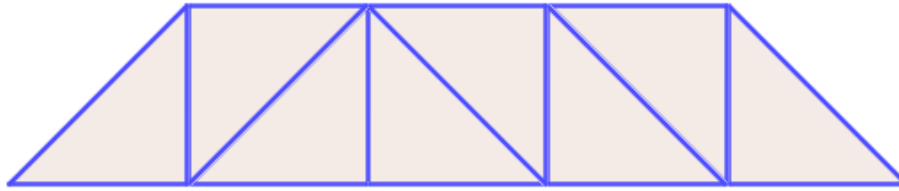
איור 4: טרפז שווה שוקיים



איור 5: טרפז שווה שוקיים

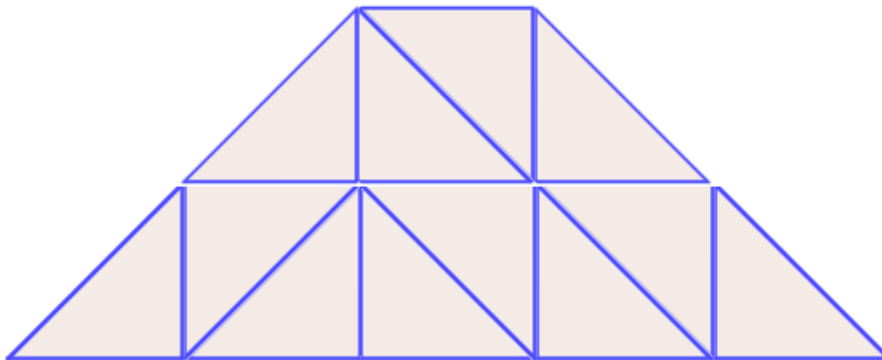
נתייחס תחילה לטרפז באיור 4. כדי ליצור טרפז זה יש להרכיב ריבוע המורכב משני משולשים בלבד, ולהצמיד אליו שני משולשים ישרי זווית (אחד מכל צד). כלומר, ארבעה משולשים בסך הכול, כפי שראינו בתחילת הפעילות.

אפשר להרכיב טרפזים גדולים על ידי שימוש בשני משולשים ישרי זווית אשר יוצבו בקצוות הטרפז, ובמספר כלשהו של ריבועים בני שני משולשים, אשר ימוקמו במרכז הצורה. ראו דוגמה (איור 6):



איור 6: טרפז שווה שוקיים רחב

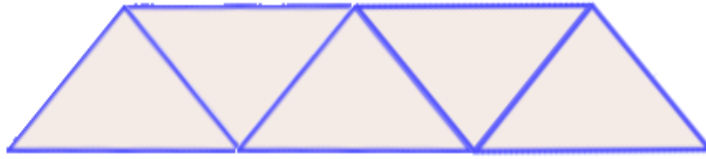
בנייה זו מורכבת ממספר זוגי של משולשים הגדול מ-4 או שווה ל-4. אפשר ליצור טרפזים הבנויים מהרכבה של מספר טרפזים. הרכבה כזו אפשר ליצור אם ממקמים טרפזים בגודל ההולך וגדל זה מתחת לזה, כך שבסיסו התחתון של הטרפז העליון יהיה שווה לבסיסו העליון של הטרפז שמתחתיו (ראו איור 7).



איור 7: טרפזים הבנויים מהרכבה

נשים לב לכך, שבנייה של טרפזים מהסוג הזה מצריכה מספר זוגי של משולשים נתונים הגדול מ-4 (מספר המשולשים המרכיבים את הטרפז המינימלי). הסיבה לכך נובעת מכך, שכל שורה בטרפז המורכב היא טרפז שווה שוקיים המורכב ממספר זוגי של משולשים.

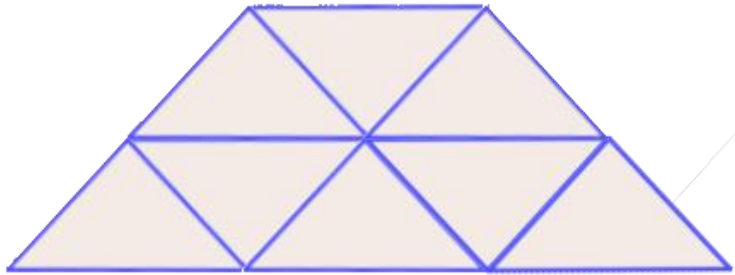
נתייחס עתה לטרפז באיור 5 למעלה. כדי ליצור אותו יש להרכיב שלושה משולשים בלבד. אפשר להרכיב טרפזים גדולים על ידי חיבור של מקבילית המורכבת משני משולשים ישרי זווית נוספים אל אחד מקצוות הטרפז. ראו דוגמה באיור 8.



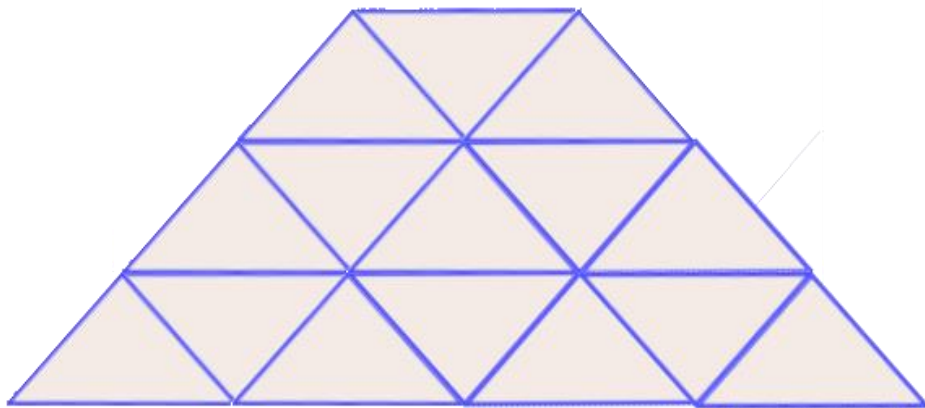
איור 8: טרפז שווה שוקים רחב יותר

בנייה זו מורכבת ממספר אי-זוגי של משולשים הגדול מ-3: כלומר, אוסף של מקביליות שמורכבות משני משולשים, ועוד משולש אחד.

ניתן גם ליצור טרפזים הבנויים מהרכבה של מספר טרפזים. הרכבה כזו אפשרית אם ממקמים טרפזים בגודל ההולך וגדל זה מתחת לזה, כך שבסיסו התחתון של הטרפז העליון צריך להיות שווה לבסיסו העליון של הטרפז שמתחתיו (איור 9 ואיור 10).



איור 9: טרפז מורכב ממספר זוגי של שורות טרפזים



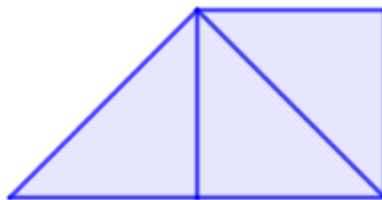
איור 10: טרפז מורכב ממספר אי-זוגי של שורות טרפזים

טרפזים המורכבים באופן כזה, נבנים משורות של טרפזים מסוג הטרפז באיור 5 למעלה, אשר בנויים ממספר אי-זוגי של משולשים הגדול מ-3. לכן, טרפז מורכב שיש בו מספר

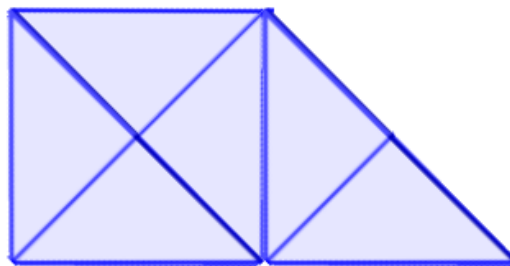
זוגי של שורות טרפזים (כמו הטרפז באיור 9 למעלה), יכול מספר זוגי של משולשים נתונים. הסיבה לכך היא, שסכום של מספר זוגי של מספרים איזוגיים הוא זוגי. טרפז מורכב שיש בו מספר איזוגי של שורות טרפזים (כמו הטרפז באיור 10 למעלה), יכול מספר איזוגי של משולשים נתונים. הסיבה לכך היא, שסכום של מספר איזוגי של מספרים איזוגיים הוא איזוגי. לסיכום אפשרויות אלו נוכל לומר, שאפשר לבנות סוגים שונים של טרפזים שווים שוקיים ממספר טבעי של משולשים נתונים הגדול מ-3. קיימים אילוצים שונים לגבי מספרם של המשולשים הנתונים שבהם יש להשתמש כדי לבנות טרפזים שווים שוקיים מסוגים שונים.

ב. טרפז ישר זווית

אפשר לבנות שני סוגים של טרפזים ישרי זווית מינימליים:



איור 11: טרפז ישר זווית (סוג 1)

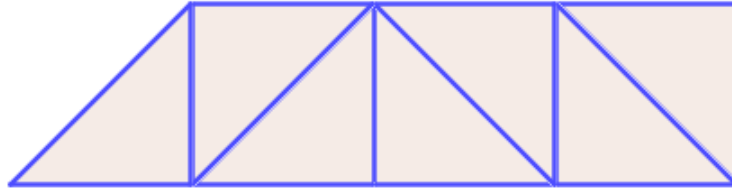


איור 12: טרפז ישר זווית (סוג 2)

נתבונן באיור 11, טרפז ישר זווית מסוג 1:

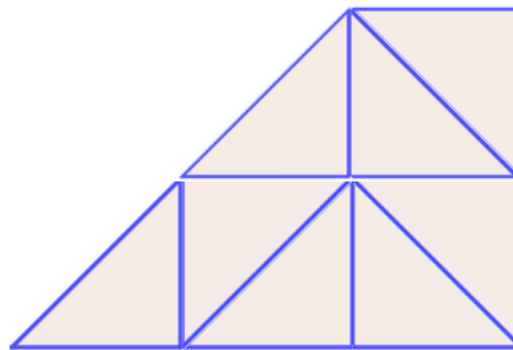
כדי להרכיב טרפז ישר זווית מינימלי מסוג זה, יש להרכיב ריבוע הבנוי משני משולשים בלבד, ולהצמיד אליו משולש ישר זווית. כלומר, שלושה משולשים בסך הכול, כפי שראינו בתחילת הפעילות.

אפשר להרכיב טרפזים גדולים על ידי שימוש במשולש ישר זווית אשר יוצב בקצהו של הטרפז, ועל ידי מספר כלשהו של ריבועים בני שני משולשים אשר ימוקמו לצידו. ראו דוגמה באיור 13 להלן:

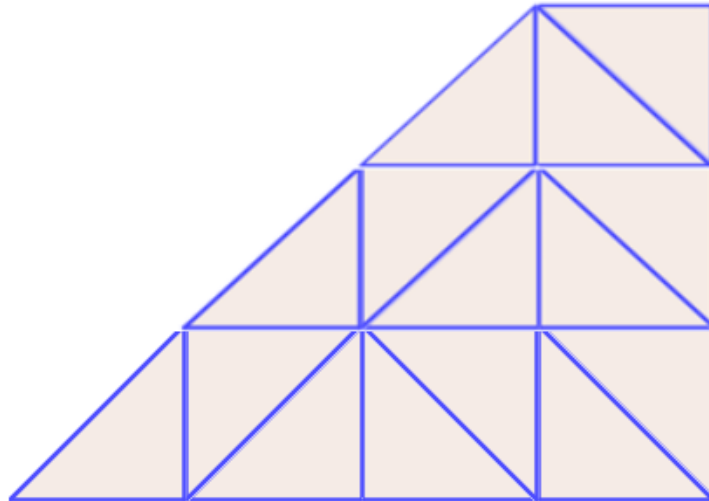


איור 13: טרפז שווה שוקיים רחב

בנייה זו מורכבת ממספר איזוגי של משולשים הגדול מ-3 או שווה ל-3. אפשר ליצור טרפזים הבנויים מהרכבה של מספר טרפזים. הרכבה כזו אפשרית אם ממקמים טרפזים בגודל ההולך וגדל זה מתחת לזה, כך שבסיסו התחתון של הטרפז העליון צריך להיות שווה לבסיסו העליון של הטרפז שמתחתיו (איור 14).



איור 14: טרפז ישר זווית המורכב משתי שורות טרפזים



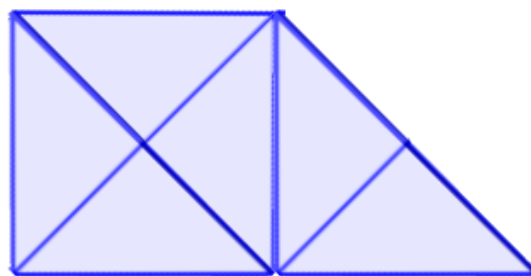
איור 15: טרפז ישר זווית המורכב משלוש שורות טרפזים

טרפזים המורכבים באופן כזה מכילים שורות של טרפזים מסוג א', אשר בנויים ממספר איזוגי של משולשים הגדול מ-3. לכן, טרפז המורכב ממספר זוגי של שורות טרפזים (כמו הטרפז באיור 14), יכול מספר זוגי של משולשים נתונים. הדבר נובע מכך, שסכום של מספר זוגי של מספרים איזוגיים הוא זוגי. טרפז מורכב ממספר איזוגי של שורות טרפזים (כמו הטרפז באיור 15), יכול מספר איזוגי של משולשים נתונים. הסיבה לכך היא שסכום של מספר איזוגי של מספרים איזוגיים הוא איזוגי.

לסיכום אפשרויות אלו נוכל לומר, שבנייה של טרפזים מסוג זה מצריכה מספר טבעי של משולשים נתונים הגדול או שווה ל-3, ושונה מ-4 ו-6. קיימים אילוצים שונים לגבי מספרם של המשולשים הנתונים שבהם יש להשתמש כדי להרכיב טרפזים שווים שוקיים מסוגים שונים.

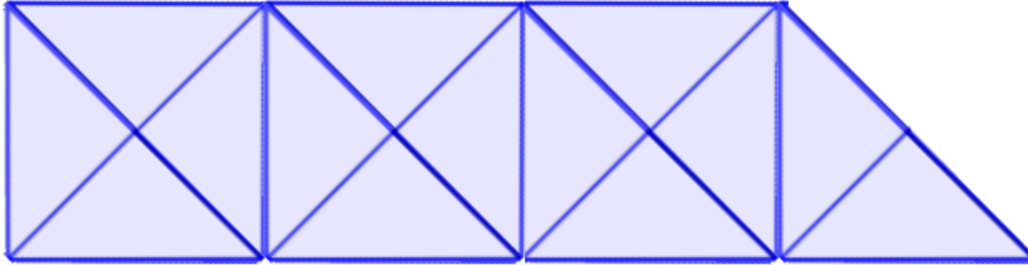
נתבונן בטרפז ישר הזוות שבאיור 15:

כדי להרכיב טרפז ישר זווית מינימלי מסוג זה, יש להרכיב ריבוע הבנוי מארבעה משולשים, ולהצמיד אליו משולש ישר זווית המורכב משני משולשים. כלומר, 6 משולשים בסך הכול (ראו איור 16):



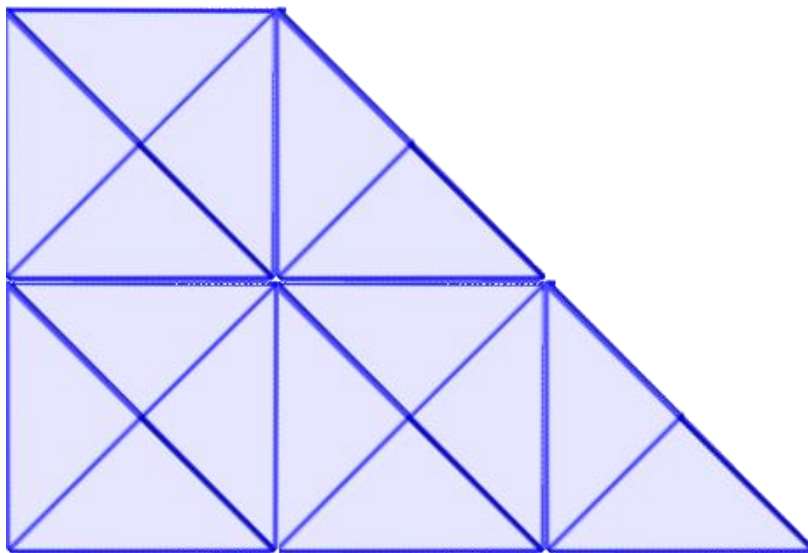
איור 16: טרפז ישר זווית מינימלי

אפשר להרכיב טרפזים גדולים על ידי שימוש במשולש ישר זווית המורכב מזוג המשולשים הנתונים, אשר יוצב בקצהו של הטרפז, ועל ידי מספר כלשהו של ריבועים בני ארבעה משולשים אשר ימוקמו לצידו. ראו דוגמה באיור 17:



איור 17: טרפז ישר זווית טרפז שווה שוקים רחב

בנייה זו מורכבת ממספר זוגי של משולשים ומכפולה של ארבע במספר טבעי. כלומר, מספר המשולשים הנתונים הדרושים הוא מספר זוגי הגדול מ-6 ומתחלק ב-4 בשארית 2. אפשר להרכיב טרפזים הבנויים מהרכב של מספר טרפזים. הרכבה כזו אפשרית אם ממקמים טרפזים בגודל ההולך וגדל זה מתחת לזה, כך שבסיסו התחתון של הטרפז העליון צריך להיות שווה לבסיסו העליון של הטרפז שמתחתיו (איור 18).



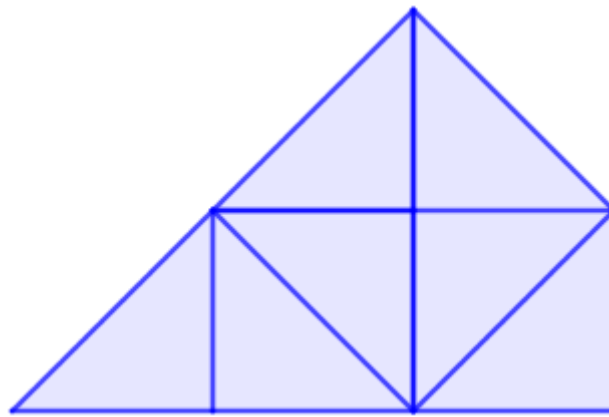
איור 18: טרפז הבנויים מהרכבה של טרפזים

נשים לב לכך, שבנייה של טרפזים מסוג זה מצריכה מספר זוגי של משולשים נתונים הגדול מ-6 (מספר המשולשים המרכיבים את הטרפז המינימלי). הסיבה לכך היא, שכל שורה בטרפז הבנוי היא טרפז ישר זווית, המורכב ממספר זוגי של משולשים.

אפשר אם כן לבנות טרפזים ישרי זווית שונים מכל מספר טבעי של משולשים שאיננו 1, 2 או 4.

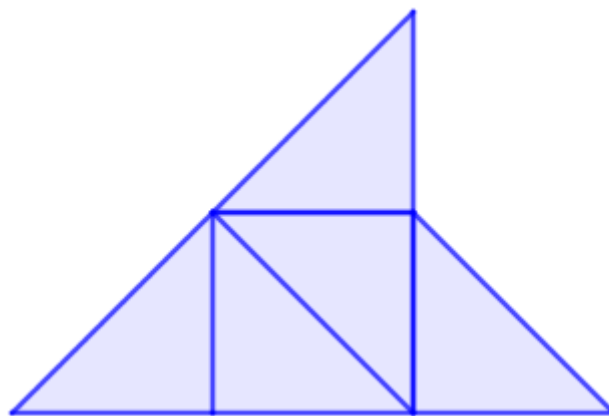
6. האם ניתן לבנות מהמשולשים הנתונים מרובע שאיננו טרפז ואיננו מקבילית?

בהקשר זה כדאי לציין כי מקבילית היא איננה מקרה פרטי של טרפז. אפשר להרכיב מרובע קמור שאיננו טרפז ואיננו מקבילית באופן הבא (ראו איור 19).



איור 19: מרובע קמור

לחלופין, אפשר להרכיב מרובע קעור:



איור 20: מרובע קעור

שאלות להרחבה ולדין

בדין מומלץ לאפשר לתלמידים להציג את פתרונותיהם ולהסביר כיצד הגיעו לפתרון.

נוסף לכך, אפשר לדון בשאלות ההרחבה הבאות:

- האם נוכל לבנות מהמשולשים הנתונים טרפזים שאינם שווי צלעות או ישרי זווית?
- האם הייתם משיבים תשובה שונה אילו השתמשנו במשולשים שווי שוקיים חדי-זווית?
- מה נוכל ללמוד על משפחת הטרפזים ויחסי ההכלה ביניהם?
- מה נוכל ללמוד על הקשרים בין המשולשים ישרי הזווית ושווי השוקיים ובין הטרפזים השונים שיצרנו?