

## צורות הפלא – דגמים שווי שטח: הנחיות למורה

### מטרות הפעילות:

מטרות פעילות זו הן לפתח ולעודד יצירתיות בקרב התלמידים בעזרת בעיה פתוחה עם מספר רב של פתרונות. מוקד הפעילות הוא זיהוי צורות גיאומטריות, חשיבה על יחסי הכלה בין צורות, חוק שימור השטח.

**מילות מפתח:** מצולעים, תכונות מצולעים, שטח, הכלה.

מומלץ להציע את הפעילות כחקר בשיעור העומד בפני עצמו.

### התאמת הפעילות ואופן הפעלתה:

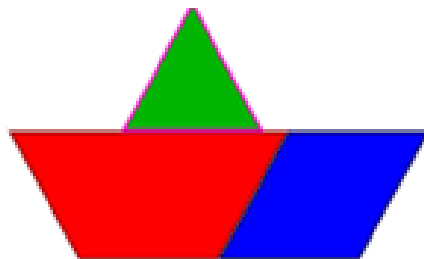
הפעילות המוצעת מתאימה לתלמידים בכיתה ד-ו.

מומלץ לאפשר לתלמידים לעבוד על הפעילות בזוגות או בקבוצות קטנות כדי לעורר שיח על השאלות המוצעות. את הפעילות כדאי לסכם בדיון כיתתי.

אפשר להתאים את הפעילות לתלמידים בכיתות מוקדמות יותר על ידי הפיכתה למונחית יותר. לחלופין, אפשר להתאים אותה לרמות שונות של חשיבה מתמטית על ידי היבטים המאפשרים את שינוי מרחב הפתרונות, או על ידי חשיבה על מקרים מורכבים (למשל, בחינת השאלה מאלו צירופים של צורות גיאומטריות אי אפשר ליצור מצולע שווה שטח לצורה הנתונה).

מרחב הפתרונות של משימה מסוג זה תלוי בבחירת המצולע לגביו נשאלות השאלות (המצולע המקורי שמוצע במשימה), בהתייחס להערות הבאות:

1. מספר סוגי הצורות שמהן מורכב המצולע, ומספר סוגי הצורות שבהן יש לרצף אותו – סרטוט הכולל מספר מצומצם של סוגי צורות גיאומטריות מצמצם את הקשרים שיש לבחון בין המצולעים השונים. אם מאפשרים להשתמש רק בצורות המופיעות במצולע המקורי, אזי מקטינים את מרחב הפתרונות האפשרי ליצירת מצולעים נוספים בעלי שטח שווה.
2. בחירה של מצולע התחלתי הכולל מספר קטן של מצולעים (3-4 מצולעים מסוגים שונים). לדוגמה:



איור 2

3. בחירה של מצולע התחלתי הכולל שילוב של מצולעים שהקשרים ביניהם פשוטים (הקשר בין משולש ומעוין, או הקשר בין משולש וטרפז פשוטים יותר להבנה מאשר הקשר בין טרפז ומעוין).

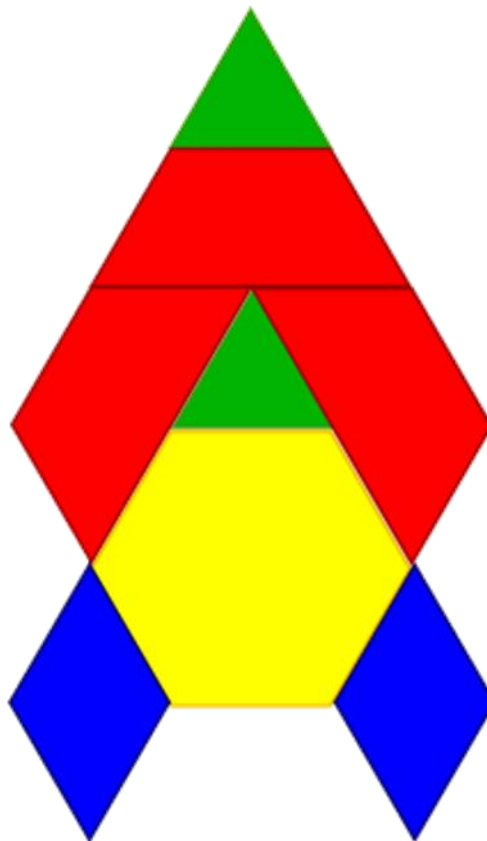
במידה והדבר אפשרי, אנו ממליצים להציע לתלמידים להשתמש ביישומנים מתאימים ליצירת הצורות. דוגמה ליישומנים מסוג זה:

- [יישומן א'](#)
- [יישומן ב'](#)

לחלופין, ניתן להיעזר בדף גזירה של המצולעים אשר מופיע בסוף הפעילות.

## מהלך הפתרון

נתייחס בתיאור מהלך הפתרון אל המצולע הנתון בשאלה ("חללית") כאל המצולע המקורי.

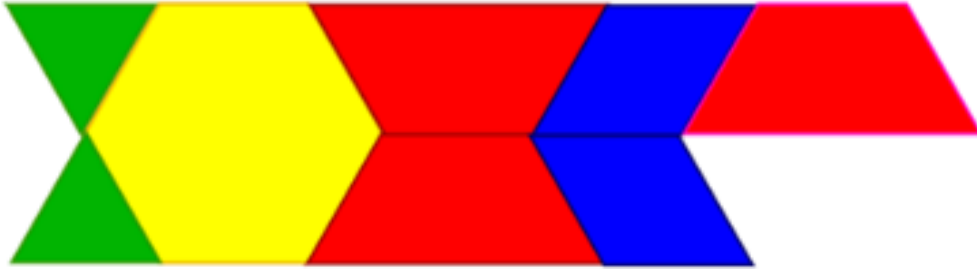


נשים לב לכך, שהאיורים המוצגים כדוגמאות לפתרון הם דגמים מוקטנים של המצולעים אשר אפשר להרכיב בעזרת מגוון המצולעים הנתונים.

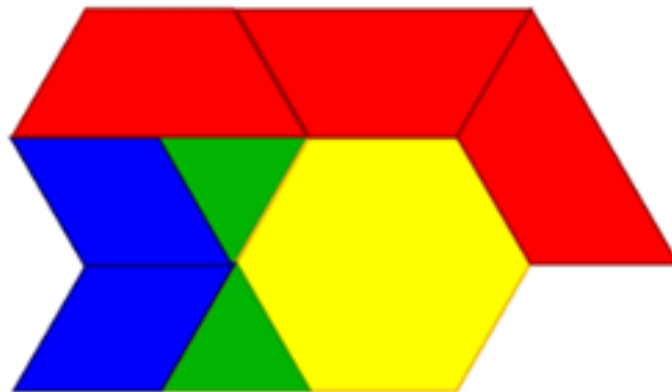
### שאלה 1:

השתמשו אך ורק במצולעים המופיעים באיור (2 משולשים, 3 טרפזים, 2 מעוינים ומשושה אחד) כדי להרכיב מספר רב ככל האפשר של מצולעים השווים בשטחם לשטח המצולע המקורי (החללית).

דוגמאות לפתרון:



איור 3



איור 4

מספר המצולעים בדוגמאות לפתרון (איורים 3 ו-4) זהה למספר המצולעים המרכיבים את המצולע המקורי, ולכן המצולעים האלה שווים בשטחם לשטח המצולע המקורי. הבנה זו היא הבסיס לחוק שימור השטח.

### שאלה 2:

השתמשו בסוג מצולע אחד בלבד מתוך מגוון המצולעים המופיעים באיור 1 (משולשים, טרפזים, מעוינים ומשושים).

**סעיף א':** הרכיבו בעזרת המצולע שבחרתם מצולעים רבים ושונים, השווים בשטחם לשטח המצולע המקורי (החללית).

דוגמאות לפתרון:



איור 5



איור 6

**סעיף ב':** האם קיימים מצולעים מהמגוון הנתון שאי אפשר להרכיב בעזרתם מצולע השווה בשטחו לשטח המצולע המקורי? הסבירו מדוע.

מבין המצולעים המרכיבים את המצולע המקורי לא נוכל להשתמש במעוין או במשושה להרכבת מצולע השווה בשטחו למצולע המקורי.

מדוע?

מפני שהמשושה והמעוין מכילים מספר זוגי של משולשים, בעוד ששטח המצולע המקורי מכיל מספר אי-זוגי של משולשים (21 משולשים).

מענה לשאלה זו כרוך בהבנה, כי אפשר לרצף את הצורה הגיאומטרית הנתונה בעזרת אחד מהמצולעים – והבחירה הפשוטה ביותר היא הבחירה במשולש. כפי שראינו, 21 משולשים מרכיבים את הצורה הנתונה. לכן צריך לבחון אילו מהמצולעים המרכיבים את המצולע המקורי

מאפשרים יצירת הרכב זהה. ההתמודדות עם היבט זה מאפשרת דיון בתכונות המצולעים, יחסי ההכלה, חשיבה על שימור שטח הצורה הגיאומטרית, וכן דיון העוסק בפעולות חשבון, מספרים זוגיים ואי-זוגיים.

## אסטרטגיות לפתרון שאלות 1 ו-2:

1. **אסטרטגיה לפתרון במקרה שבו יש להשתמש בכלל המצולעים המרכיבים את הצורה המקורית.** זו יכולה להיות בחירת מצולעים המרכיבים את הצורה המקורית ומיקומם באופנים שונים לצורך יצירת מצולעים חדשים שווי שטח. אסטרטגיה זו מובילה לבחינת המושגים הבסיסיים: מצולע וצורה גיאומטרית תוך בחינת המאפיינים שלהם הרלוונטיים ליצירת מצולע חדש (למשל, מספר צלעות, גודל הזוויות).
2. **בחירת מצולע אחד מבין המצולעים הנתונים וריצוף הצורה המקורית בעזרתו.** אסטרטגיה זו מתאפיינת בניסוי וטעייה, אך יכולה להוביל לחשיבה על הקשרים שבין שטחי המצולעים הנתונים לבין פיתוח של אסטרטגיה מתקדמת יותר (ראו סעיפים 3-5 להלן). נוסף לכך, אסטרטגיה זו מאפשרת בחינה של רעיון שמירת השטח של הצורה המקורית תוך שינוי אופן הארגון של הצורה. רעיון זה חיוני להמשך הנלמד.
3. **בחירת מצולע אחד מבין המצולעים הנתונים ובחינת הקשרים בינו ובין שטחי המצולעים האחרים.** אסטרטגיה זו היא מתקדמת יותר מאשר הקודמת מכיוון שהיא כרוכה בהבנה שהקשרים בין שטחי המצולעים מאפשרים להחליף מצולע אחד באחר בשיטתיות. אך בה בעת היא עלולה להיות נקודתית, כלומר – החלפת מצולע אחד באחרים ללא עריכת הכללה לגבי הקשרים בין שטחי המצולעים. למשל, אם משתמשים במספר מסוים של משולשים, אזי כדי לבנות צורה שוות שטח ממעוינים יש להשתמש במחצית מספר זה, כי שטח המעוין שווה לסכום שטח של שני משולשים.
4. **בחינת מרחב הקשרים בין שטחי המצולעים והחלפה מושכלת ביניהם.** אסטרטגיה זו מובילה לבחינת הקשרים בין שטחי זוגות של מצולעים, ובהמשך לבחינת הקשרים בין שטחי כלל המצולעים הנתונים ויחסי ההכלה ביניהם. באופן מפורט יותר, המצולע המקורי מורכב מ-2 משולשים, 3 טרפזים, 2 מעוינים ומשושה אחד. כל מצולע אפשר לכסות באופן מלא בעזרת משולשים החופפים למשולש הירוק (משולש שווה צלעות בעל שטח בן יחידה אחת) באופן הבא: מעוין בעזרת 2 משולשים, טרפז בעזרת 3 משולשים, ומשושה בעזרת 6 משולשים.
5. **הכללה לגבי הקשרים בין שטחי המצולעים ויצירת אלגוריתם לחישוב מספר המצולעים הדרושים.** בחינת המצולעים בעזרת האסטרטגיה הקודמת (מס' 4) יכולה להוביל להבנה כי היחידה הבסיסית להרכבת המצולע המקורי היא המשולש. הבנה זו מאפשרת לתרגם את שטח הצורה המקורית הנתונה לכזו המורכבת מ-21 משולשים.

היבט זה בשילוב עם ההכללה לגבי הקשרים בין שטחי המצולעים הנתונים מאפשרים ליצור מצולעים שווי שטח בעזרת מצולעים אחרים. לדוגמה, נוכל ליצור מצולע שווה שטח למצולע המקורי בעזרת 7 טרפזים, שכן כל טרפז מכיל 3 משולשים, ולכן  $21 \div 3 = 7$ . אסטרטגיה מעין זו מעודדת חשיבה אלגברית ראשונית.

### שאלה 3

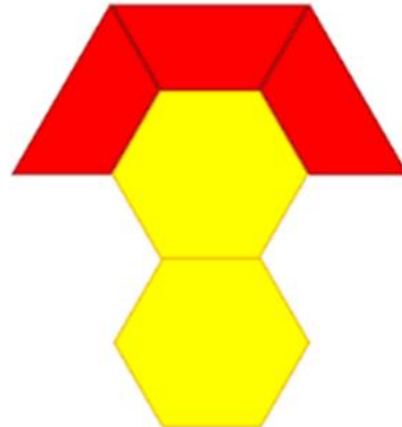
השתמשו בשני סוגי מצולעים מבין מגוון המצולעים המופיעים באיור 1 (משולשים, טרפזים, מעוינים ומשושים). עבור כל מצולע מורכב, הקפידו לבחור בהרכבים שונים של מצולעים מהמגוון המוצע.

**סעיף א':** בנו בעזרת המצולעים שבחרתם מצולעים רבים ושונים, השווים בשטחם לשטח המצולע המקורי (החללית).

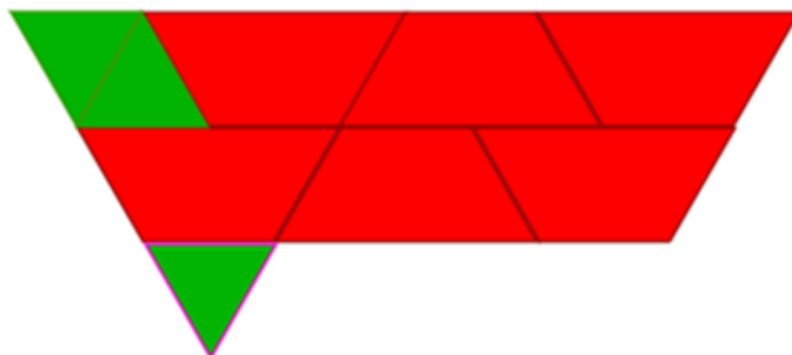
דוגמאות לפתרון:



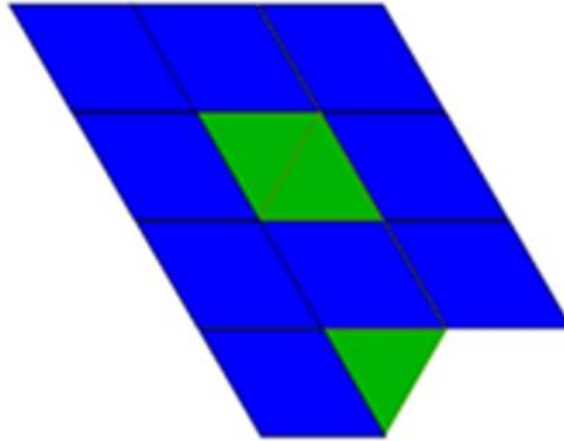
איור 8



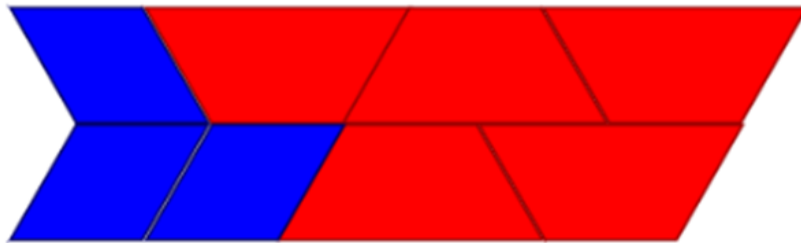
איור 7



איור 9



איור 10



איור 11

**סעיף ב':** האם קיים זוג של מצולעים מהמגוון הנתון שאי אפשר ליצור בעזרתו מצולע השווה בשטחו למצולע המקורי? הסבירו מדוע.

נשים לב לכך שלא נוכל ליצור מצולע חדש השווה בשטחו למצולע המקורי בעזרת משושים ומעויינים בלבד כיוון ששניהם מכילים מספר זוגי של משולשים, והחיבור ביניהם יוצר סכום זוגי בלבד.

**אסטרטגיות לפתרון:**

האסטרטגיות אשר פורטו בהצעה לפתרון שאלות 1 ו-2 רלוונטיות גם עבור שאלה 3 סעיף ב'. נתייחס לאסטרטגיה האחרונה שצויינה (הכללה לגבי הקשרים בין שטחי המצולעים ויצירת אלגוריתם לחישוב מספר המצולעים הדרושים). כפי שציינו קודם לכן, המצולע המקורי (החללית) בנוי מ-21 משולשים. כדי לקבל סכום של מספר אי-זוגי על ידי שני מחוברים, על אחד מהמחוברים להיות זוגי, ועל השני להיות אי-זוגי. לכן, על מנת ליצור מצולע השווה בשטחו למצולע המקורי ומורכב מ-2 סוגי מצולעים, יש לערוך שילוב בין מצולע אחד המורכב ממספר אי-זוגי של משולשים לבין מצולע שני המורכב ממספר זוגי של משולשים.

מרחב הפתרונות של בעיה זו מוצג בטבלה שלהלן:

מספר משולשים כולל	משולש	מעוין (2 משולשים)	טרפז (3 משולשים)	משושה (6 משולשים)
21	1	10	-	-
21	3	9	-	-
21	5	8	-	-
21	7	7	-	-
21	9	6	-	-
21	11	5	-	-
21	13	4	-	-
21	15	3	-	-
21	17	2	-	-
21	19	1	-	-
21	3	-	6	-
21	6	-	5	-
21	9	-	4	-
21	12	-	3	-
21	15	-	2	-
21	18	-	1	-
21	3	-	-	3
21	9	-	-	2
21	15	-	-	1

נשים לב לכך, שבכל שילוב של משולש עם מצולע נתון אחר (מעוין, טרפז ומשושה) נוכל להרכיב מצולע חדש השווה בשטחו למצולע המקורי (החללית). אולם יש להתייחס בבחירת המצולע למספר המשולשים שהוא מכיל (מספר זוגי/ אי-זוגי של משולשים).



**נתייחס לשתי אפשרויות:**

א. בבחירת מצולע המורכב ממספר זוגי של משולשים (לדוגמה מעוין ומשושה), יש להוסיף מספר אי-זוגי של משולשים לצורך יצירת המצולע המקורי (החללית) המורכב ממספר אי-זוגי של משולשים (21 משולשים). לדוגמה: 7 מעוינים מכילים 14 משולשים, ולכן כדי לקבל בסך הכול 21 משולשים יש להוסיף עוד 7 משולשים.

ב. בבחירת מצולע המורכב ממספר אי-זוגי של משולשים (לדוגמה: טרפז), יש להתייחס למספר המצולעים מסוג זה לצורך יצירת המצולע המקורי (החללית):

- **מספר זוגי של מצולעים מסוג זה** (עם מספר אי-זוגי של משולשים) יאפשר ליצור בסך הכול מספר זוגי של משולשים. לכן יש להוסיף מספר אי-זוגי של משולשים. לדוגמה: 6 טרפזים מכילים 18 משולשים, ולכן כדי ליצור בסך הכול 21 משולשים יש להוסיף עוד 3 משולשים.
- **מספר אי-זוגי של מצולעים מסוג זה** (עם מספר אי-זוגי של משולשים) יאפשר ליצור בסך הכול מספר אי-זוגי של משולשים. לכן, אם יש בכך צורך, יש להוסיף מספר זוגי של משולשים. לדוגמה: 5 טרפזים מכילים 15 משולשים, ולכן כדי להרכיב בסך הכול 21 משולשים יש להוסיף עוד 6 משולשים.

באותו אופן נתייחס לשילובים נוספים של מצולעים. נציג זאת בעזרת טבלה (הטבלה איננה כוללת את כלל הפתרונות):

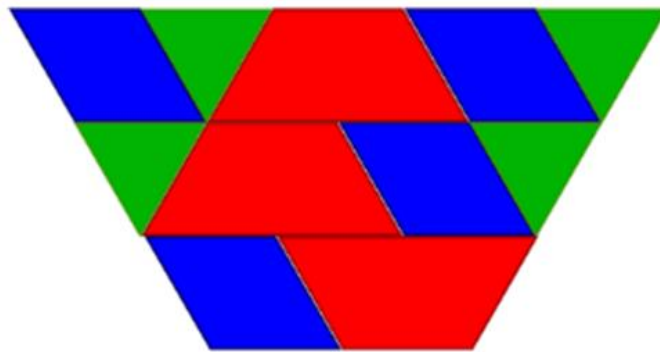
מספר משולשים כולל	משולש	מעוין (2 משולשים)	טרפז (3 משולשים)	משושה (6 משולשים)
21	-	-	1	3
21	-	-	3	2
21	-	-	5	1
21	-	9	1	-
21	-	6	3	-
21	-	3	5	-

**שאלה 4:**

השתמשו בשלושה סוגי מצולעים בלבד מתוך מגוון המצולעים המופיעים באיור 1 (משולשים, טרפזים, מעוינים ומשושים). עבור כל מצולע מורכב, הקפידו לבחור בהרכבים שונים של מצולעים מהמגוון המוצע.

**סעיף א':** הרכיבו בעזרת המצולעים שבחרתם מצולעים רבים ושונים, השווים בשטחם לשטח המצולע המקורי (החללית).

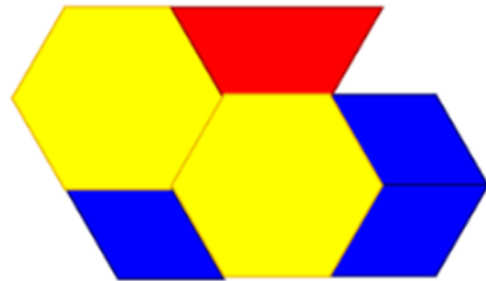
דוגמאות לפתרון:



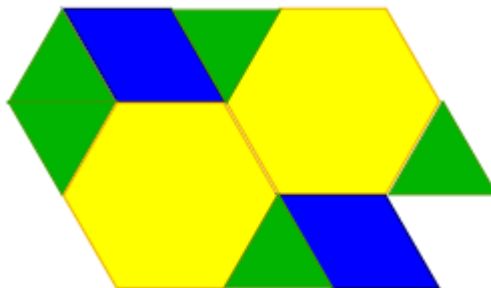
איור 12



איור 14



איור 13



איור 15

**סעיף ב':** האם קיימים צירופים של מצולעים מהמגוון הנתון שאי אפשר להרכיב בעזרתם מצולע השווה בשטחו לשטח המצולע המקורי (החללית)? הסבירו מדוע.

נציין שבהתייחס למגוון המצולעים המרכיבים את המצולע המקורי, מכל שלושה מצולעים נוכל להרכיב מצולע חדש השווה בשטחו למצולע המקורי. ניווכח כי מבין כלל המצולעים המרכיבים את המצולע המקורי, 2 מצולעים מכילים מספר זוגי של משולשים (משושה ומעוין), ושני מצולעים אחרים מכילים מספר אי-זוגי של משולשים (משולש וטרפז). לכן בכל שילוב של שלושה מצולעים ייווצרו אחד משני תרגילי החיבור:

- 2 מספרים זוגיים ומספר אי-זוגי שסכומם יהיה מספר אי-זוגי.
- 2 מספרים אי-זוגיים ומספר זוגי שסכומם יהיה מספר זוגי.

### אסטרטגיות לפתרון:

האסטרטגיות אשר פורטו בהצעה לפתרון שאלה 1 רלוונטיות גם עבור שאלה 4 סעיף ב'. נדגים בעזרת טבלה כיצד אפשר להתמודד עם שאלה זו. כאמור, המצולע המקורי בנוי מ-21 משולשים. כדי לקבל סכום של מספר אי-זוגי מתוך שלושה מחוברים יש לחבר שני מחוברים זוגיים (מעוין, משושה) ומחובר שלישי שהוא אי-זוגי (טרפז או משולש).

נשתמש בטבלה לבדיקת אפשרויות לשילוב בין שלושה מצולעים (הטבלה כוללת את כלל הפתרונות):

מספר משולשים כולל	משולש	מעוין (2 משולשים)	טרפז (3 משולשים)	משושה (6 משולשים)
21	1	1	6	-
21	4	1	5	-
21	2	2	5	-
21	3	-	4	1
21	7	1	4	-
21	5	2	4	-
21	3	3	4	-
21	1	4	4	-
21	6	-	3	1

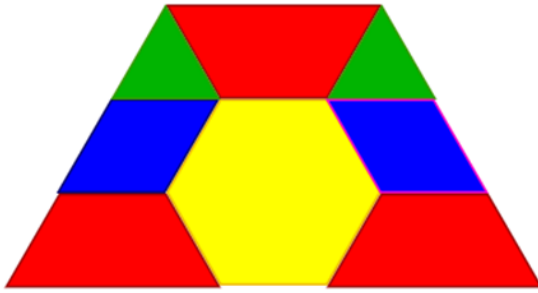
מספר משולשים כולל	משולש	מעוין (2 משולשים)	טרפז (3 משולשים)	משושה (6 משולשים)
21	10	1	3	-
21	8	2	3	-
21	-	3	3	1
21	6	3	3	-
21	4	4	3	-
21	2	5	3	-
21	3	-	2	2
21	9	-	2	1
21	13	1	2	-
21	11	2	2	-
21	9	3	2	-
21	7	4	2	-
21	5	5	2	-
21	3	6	2	-
21	1	7	2	-
21	6	-	1	2
21	12	-	1	1
21	16	1	1	-
21	14	2	1	-
21	12	3	1	-
21	10	4	1	-
21	8	5	1	-
21	6	6	1	-
21	4	7	1	-
21	2	8	1	-

מספר משולשים כולל	משולש	מעוין (2 משולשים)	טרפז (3 משולשים)	משושה (6 משולשים)
21	-	3	1	2
21	-	6	1	1
21	13	1	-	1
21	11	2	-	1
21	9	3	-	1
21	7	4	-	1
21	5	5	-	1
21	3	6	-	1
21	1	7	-	1
21	7	1	-	2
21	5	2	-	2
21	3	3	-	2
21	1	4	-	2

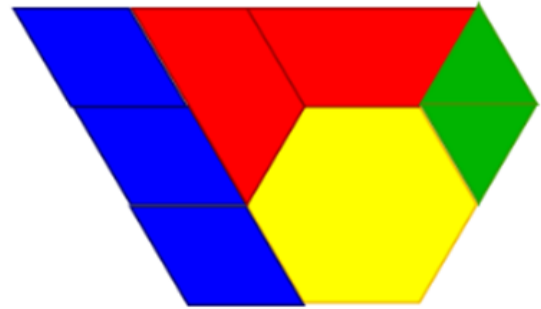
### שאלה 5:

השתמשו בארבעת המצולעים המופיעים באיור 1 (משולשים, טרפזים, מעוינים ומשושים). הרכיבו בעזרת המצולעים הללו מצולעים רבים ושונים, השווים בשטחם לשטח המצולע המקורי (החללית). עבור כל מצולע מורכב, הקפידו לבחור בהרכבים שונים של מצולעים מהמגוון המוצע.

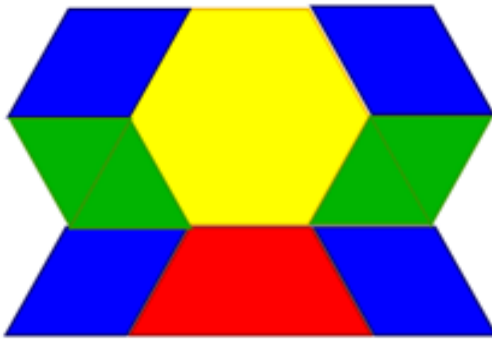
**דוגמאות לפתרון:**



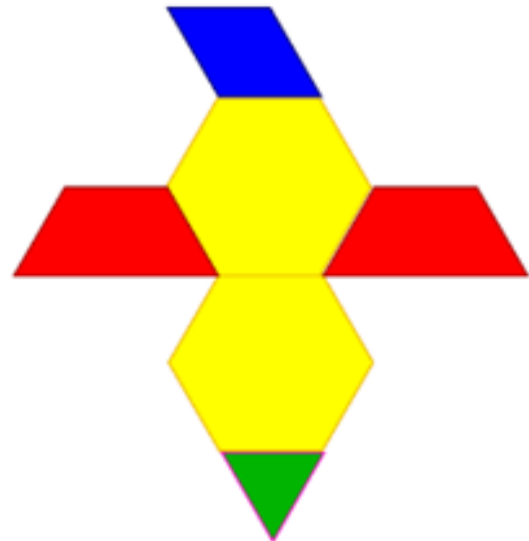
איור 17



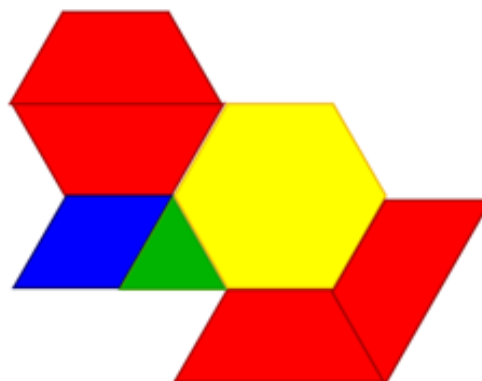
איור 16



איור 19



איור 18



איור 20

אסטרטגיות לפתרון שאלה זו דומות לאסטרטגיות שפורטו קודם לכן.

## שאלות לדין ולהרחבה

בדין מומלץ לאסוף את התשובות המוצעות לשאלות השונות, ולדון בהסברים של התלמידים. הסברים אלו יכולים להעלות אסטרטגיות שונות לפתרון.

**נשים לב לכך, כי שאלות העוסקות בשימוש במספר קטן של מצולעים (שניים או שלושה מבין המצולעים) תוך שמירה על שטח הצורה המקורית, דומות לשאלות הבוחנות מקרי קצה (לדוגמה, מאילו שילובים של סוגי צורות גיאומטריות אי אפשר להרכיב מצולע ששטחו שווה לשטח המצולע המקורי). המאפיין הדומה הוא שהן שאלות שההתמודדות איתן מעודדת חשיבה על אסטרטגיות מתוחכמות יותר להתמודדות עם המשימה, וכן שיש בהן עריכת הכללה בהמשך. על כן כדאי להעמיק בהן.**

במקרה שאסטרטגיות אלו אינן מתעוררות כדאי לעודד את צמיחתן על ידי שאלות מתאימות.