

## צורות הפלא - מציאת השלם על פי חלקיו: הנחיות למורה

### מטרות הפעילות:

מטרות פעילות זו הן לפתח ולעודד יצירתיות בקרב התלמידים בעזרת בעיה פתוחה עם מספר רב של פתרונות. מוקדי הפעילות הם זיהוי צורות גיאומטריות, חשיבה על יחסי הכלה בין צורות, ייצוג שברים ומציאת השלם בעזרת החלק הנתון.

**מילות מפתח:** מצולעים, תכונות מצולעים, שטח, הכלה, שבר פשוט, משמעויות השבר הפשוט.

הפעילות מומלצת כהמשך לפעילות מספר 7 - "צורות הפלא - דגמים שווי שטח" או כפעילות חקר בודדת בשיעור העומד בפני עצמו.

### התאמת הפעילות ואופן הפעלתה:

הפעילות המוצעת מתאימה לתלמידים בכיתה ד-ו.

מומלץ לאפשר לתלמידים לעבוד על הפעילות בזוגות או בקבוצות קטנות כדי לעורר שיח על השאלות המוצעות. כדאי לסכם את הפעילות בדיון כיתתי.

אפשר להתאים את הפעילות לתלמידים בכיתות מוקדמות יותר על ידי הפיכתה למונחית יותר. לחלופין, אפשר להתאים אותה לרמות שונות של חשיבה מתמטית על ידי היבטים המאפשרים את שינוי מרחב הפתרונות, או על ידי חשיבה על מקרים מורכבים (למשל, בחינת השאלה מאילו צירופים של צורות גיאומטריות אי אפשר להרכיב את המצולע המבוקש).

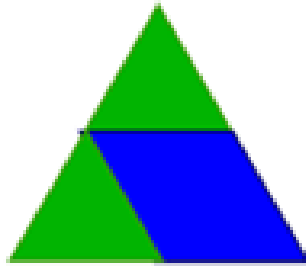
מרחב הפתרונות של משימה מסוג זה תלוי בבחירת המצולע לגביו נשאלות השאלות (המצולע המקורי שמוצע במשימה), בהתייחס להערות הבאות:

#### 1. מספר סוגי הצורות שמהן מורכב המצולע, ומספר סוגי הצורות שבהן יש לרצף

**אותו** – סרטוט הכולל מספר מצומצם של סוגי צורות גיאומטריות מצמצם את הקשרים שיש לבחון בין המצולעים השונים. במקרה שמאפשרים להשתמש רק בצורות המופיעות במצולע המקורי מקטינים את מרחב הפתרונות האפשרי ליצירת מצולעים נוספים, על פי האילוץ המתאים לגבי שטח המצולע החדש.

#### 2. בחירה של מצולע התחלתי הכולל מספר קטן של מצולעים (2 מצולעים מסוגים

שונים). לדוגמה (דגם מוקטן של מצולע אפשרי):



איור 2

נשים לב כי שאלה 4 לעיל (הרכיבו מספר רב ככל האפשר של מצולעים כך שהמצולע הנתון מהווה תשע עשיריות משטחו), איננה אפשרית במקרה זה. זו הבנה שהיא רלוונטית וחשובה, אך במקרה שמעוניינים לערוך שינוי המתאים לכל שאלות הפעילות, אזי חשוב להתייחס להרכב המצולע גם מבחינה זו.

3. בחירה של מצולע התחלתי הכולל שילוב של מצולעים שהקשרים ביניהם פשוטים (הקשר בין משולש ומעוין, או הקשר בין משולש וטרפז פשוטים יותר להבנה מאשר הקשר בין טרפז ומעוין).

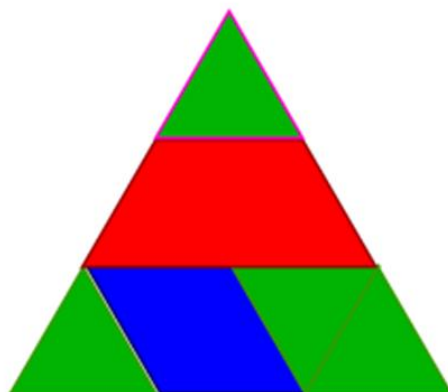
במידה והדבר אפשרי, אנו ממליצים להציע לתלמידים להשתמש ביישומנים מתאימים ליצירת הצורות. דוגמה ליישומנים מסוג זה:

- [יישומן א'](#)
- [יישומן ב'](#)

לחלופין, ניתן להיעזר בדף גזירה של המצולעים אשר מופיע בסוף הפעילות.

## מהלך הפתרון

נתייחס בתיאור מהלך הפתרון אל המצולע הנתון בשאלה כאל המצולע המקורי (איור 1).



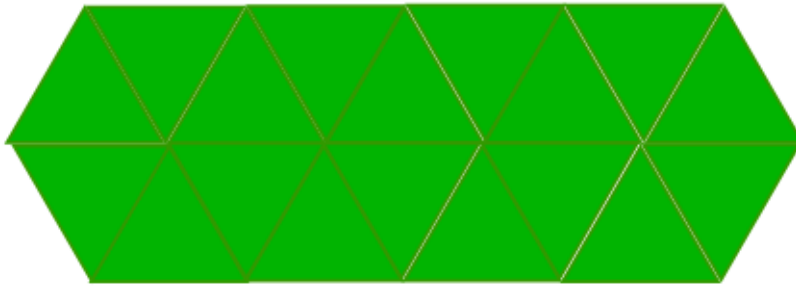
נשים לב לכך, שהאיורים המוצגים כדוגמאות לפתרון הם דגמים מוקטנים של המצולעים אשר אפשר ליצור בעזרת מגוון המצולעים הנתונים.

### שאלה 1:

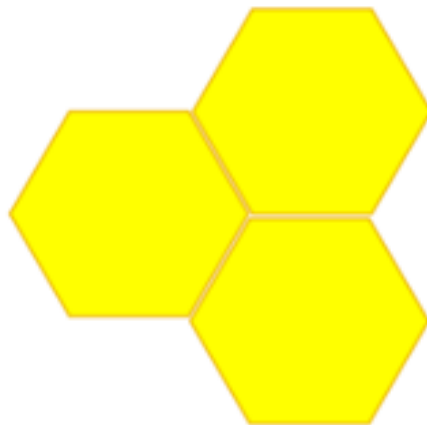
הרכיבו מספר רב ככל האפשר של מצולעים שונים כך שהמצולע המקורי (איור 1) מהווה חצי משטחו של כל מצולע שהרכבתם.

**סעיף א':** השתמשו בסוג מצולע אחד בלבד מתוך מגוון המצולעים (משולש, טרפז, מעוין ומשושה).

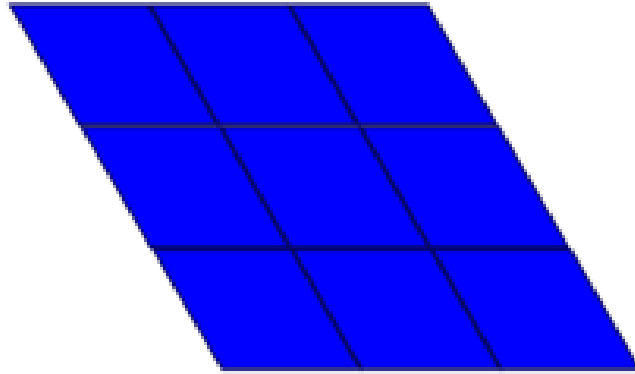
דוגמאות לפתרון:



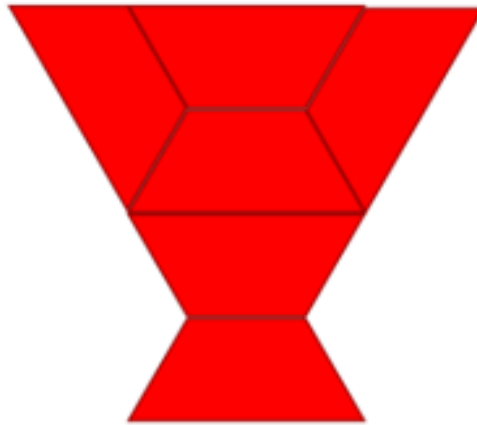
איור 3



איור 4



איור 5



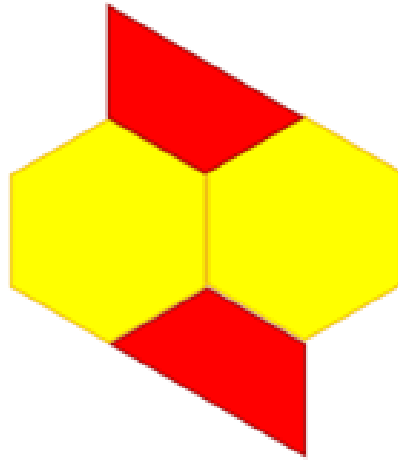
איור 6

**האם קיימים מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע.**

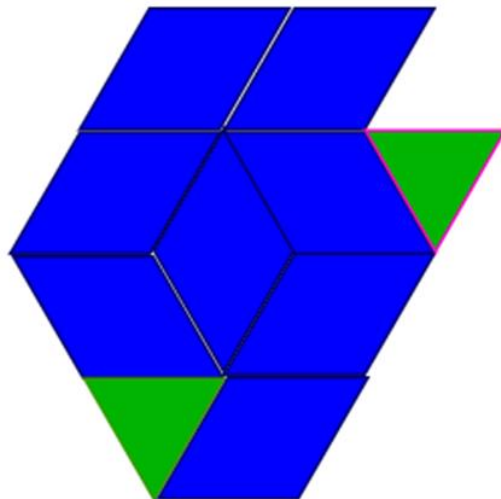
המצולע המקורי מורכב מ-9 משולשים החופפים למשולש הנתון. על המצולע החדש להכיל 18 משולשים החופפים למשולש הנתון כיוון ששטחו גדול פי 2 משטח המצולע המקורי (איור 1). מספר המשולשים המוכלים בכל אחד מן המצולעים הנתונים הוא אחד מן הגורמים של 18: המעוין מורכב מ-2 משולשים נתונים; הטרפז מורכב מ-3 משולשים נתונים והמשושה מורכב מ-6 משולשים נתונים. לכן נוכל להרכיב מצולע חדש מכל אחד מן המצולעים הנתונים. לדוגמה: טרפז מכיל 3 משולשים שווי צלעות. 3 הוא אחד הגורמים של 18 ( $18:3=6$ ). לפיכך נוכל להרכיב מצולע חדש המורכב מ-6 טרפזים.

**סעיף ב':** השתמשו **בשני מצולעים בלבד** מתוך מגוון המצולעים הנתונים. הציעו מצולעים שבהם מספר המופעים של כל אחד מהמצולעים יהיה שונה ממספרם במצולעים האחרים שהרכבתם.

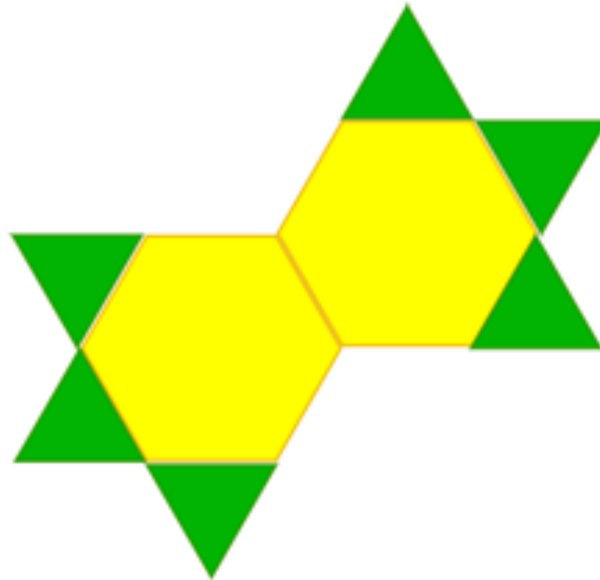
**דוגמאות לפתרון:**



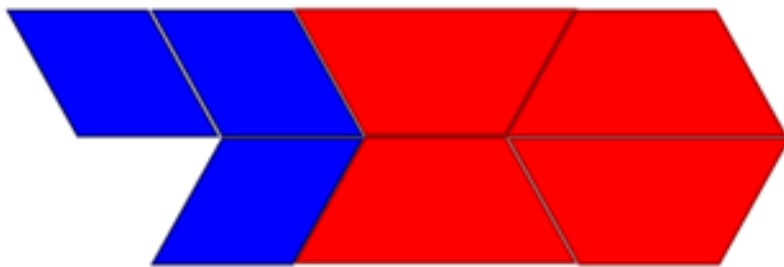
איור 7



איור 8



איור 9



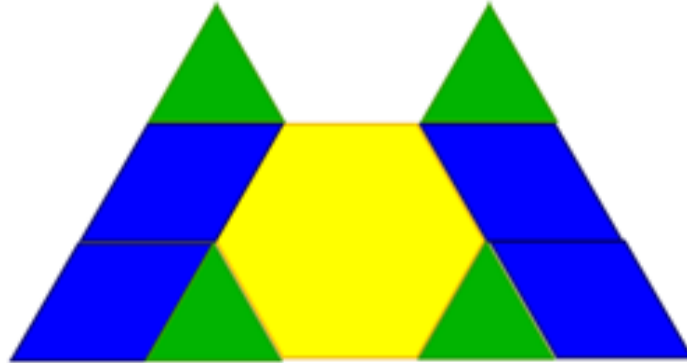
איור 10

**האם קיים זוג מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע.**  
 כאמור, המצולע החדש מכיל 18 משולשים. עוד ידוע לנו מסעיף א' (שאלה 1), שאפשר להרכיב מצולע כזה על ידי שימוש בכל מצולע מתוך מגוון המצולעים הנתונים (מעוין, טרפז ומשושה). לכן, כדי לענות על השאלה שלפנינו, נבדוק האם אפשר להמיר מצולע (או כפולה של אותו מצולע) במצולע אחר. המשולש, בהיותו יחידת המנייה שלנו, מרכיב כל אחד מהמצולעים הנתונים. לכן נוכל להרכיב את המצולע החדש משילוב של משולש עם כל אחד מהמצולעים הנתונים. המשושה הוא כפולה שלמה של כל אחד מהמצולעים האחרים (המשולש, הטרפז, והמעוין). לכן נוכל להרכיב מצולע חדש בעל 18 משולשים המורכב ממשושים ומכל אחד מהמצולעים מהמגוון הנתון. לדוגמה: 2 משושים ו-6 משולשים, או 2 משושים ו-3 מעוינים, או 2 משושים ו-2 טרפזים.

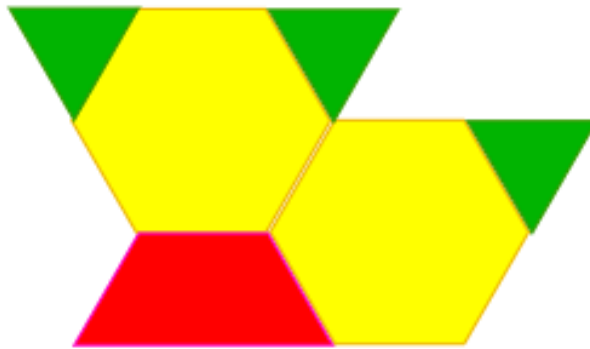
נותר לבדוק האם אפשר להרכיב מצולע בעל 18 משולשים המורכב רק ממעוינים ומטרפזים. טרפז מכיל 3 משולשים, ואילו מעוין מכיל 2 משולשים. כדי להרכיב מצולע המכיל 18 משולשים יש לבחור במספר זוגי של טרפזים. כך נוכל להרכיב מצולע חדש המורכב משני מצולעים אלו.

**סעיף ג':** השתמשו בשלושה מצולעים בלבד מתוך מגוון המצולעים המוצעים.

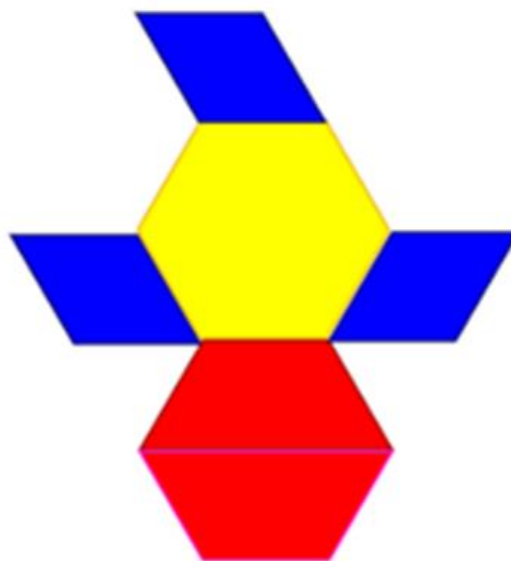
**דוגמאות לפתרון:**



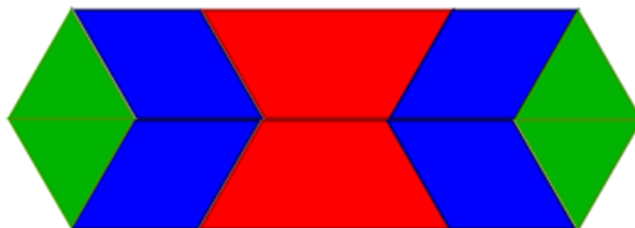
איור 11



איור 12



איור 13



איור 14

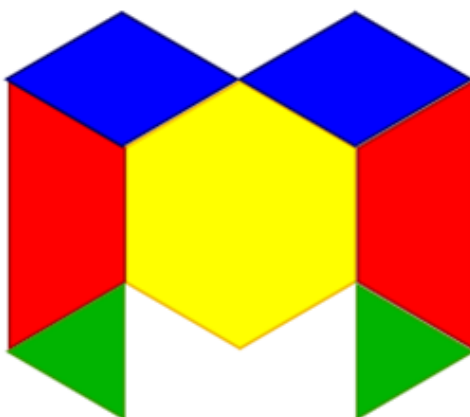
**האם קיימת שלישיית מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע.**

על פי סעיף ב', נוכל להרכיב מצולע המורכב מ-18 משולשים מכל זוג מצולעים שבמבחר הנתון. כאמור, המשולש הוא יחידת המנייה שלנו, ולכן כל זוג מצולעים שנצרף אליו את המשולש יאפשר הרכבה כזו, שכן נוכל להמיר חלק מהמצולעים האחרים במשולש.

לפיכך נבדוק אם ניתן להרכיב את המצולע הדרוש מהשלישייה הנותרת: משושה, טרפז ומעוין. איור הוא 13 היא רגליה לכך שהדבר אפשרי. אחת הסיבות לדבר היא ששניים מבין המצולעים מרכיבים את המצולע השלישי (המשושה ניתן להרכבה משני טרפזים או משלושה מעוינים).

**סעיף ד':** השתמשו בארבעת המצולעים הנתונים להרכבת המצולע המבוקש. הציעו מצולעים שבהם מספר המופעים של כל אחד מהם יהיה שונה ממספרם במצולעים האחרים.

**דוגמה לפתרון:**



איור 15



## אסטרטגיות לפתרון:

1. **בחינת מרחב הקשרים בין שטחי המצולעים והחלפה מושכלת ביניהם.** אסטרטגיה זו מובילה לבחינת הקשרים בין שטחי זוגות של מצולעים, ובהמשך לבחינת הקשרים בין כלל שטחי המצולעים הנתונים ויחסי ההכלה ביניהם. באופן מפורט יותר, המצולע המקורי מורכב מארבעה משולשים, טרפז ומעוין. כל מצולע ניתן לכסות באופן מלא בעזרת משולשים החופפים למשולש הנתון, באופן הבא: המעוין מורכב משני משולשים, והטרפז מורכב משלושה משולשים.

2. **הכללה לגבי הקשרים בין שטחי המצולעים ויצירת אלגוריתם לחישוב מספר המצולעים הדרושים.** בחינת המצולעים בעזרת האסטרטגיה הקודמת יכולה להוביל להבנה, כי היחידה הבסיסית להרכבת מגוון המצולעים הנתונים, וכן הרכבת המצולע המקורי – היא המשולש. הבנה זו מאפשרת לתרגם את שטח המצולע המקורי הנתון ל-9 משולשים. אפשר לחשב כמה מצולעים מהמגוון הנתון נחוצים להרכבת המצולע החדש על פי כמות המשולשים הדרושה להרכבתו. לדוגמה, נוכל להרכיב מצולע הגדול פי 2 משטחו של המצולע המקורי בעזרת 6 טרפזים, כיוון שכל טרפז מכיל 3 משולשים ( $6 = 3 \div 18$ ). אסטרטגיה מעין זו מעודדת חשיבה אלגברית ראשונית.

3. **השבר כחלק מכמות ומציאת המלאה.** באסטרטגיה זו יש לחשב מהו "שבר היחידה" ובעזרתו לחשב את השלם. אסטרטגיה זו מסתמכת על האסטרטגיה הקודמת שבה יש למצוא תחילה את כמות המשולשים המוכלים במצולע המקורי. לדוגמה: המצולע המקורי מורכב מ-4 משולשים, טרפז אחד ומעוין אחד, ולכן נוכל לומר כי המצולע המקורי מורכב מ-9 משולשים. שטחו של המצולע המקורי מהווה חצי מן המצולע המבוקש, על כן מציאת הכמות השלמה תיעשה על ידי פעולת כפל:  
 $18 = 9 \times 2$  ובהתאם לכך נוכל לקבוע מאילו מצולעים אפשר להרכיב את המצולע המבוקש, וכן צירופים של סוגים שונים של מצולעים אשר מהם אפשר להרכיב את המצולע המקורי.

4. **שימוש ביחס כאסטרטגיית בסיס.** אסטרטגיה זו מסתמכת על האסטרטגיה הקודמת שבה יש למצוא תחילה את כמות המשולשים המוכלים במצולע המקורי. כאמור, המצולע המקורי מורכב מ-9 משולשים חופפים. היחס בין המשולש הנתון ובין המצולע המקורי הוא 1:9. לכן, כדי לחשב את הכמות הכוללת (מספר המשולשים במצולע החדש) יש לכפול את יחס שטחי המצולעים פי 9. בהתאם לכך, נוכל לקבוע מאילו צירופי מצולעים אפשר להרכיב את המצולע המורכב החדש. זאת בהתבסס על התבונה, כי כל מצולע ממגוון המצולעים המוצעים אפשר לכסות באופן מלא על ידי משולשים. לדוגמה, כאשר נרצה להרכיב מצולע המורכב מ-18 משולשים בעזרת שני מצולעים נתונים: משולש ומעוין נשתמש ביחס הבא:



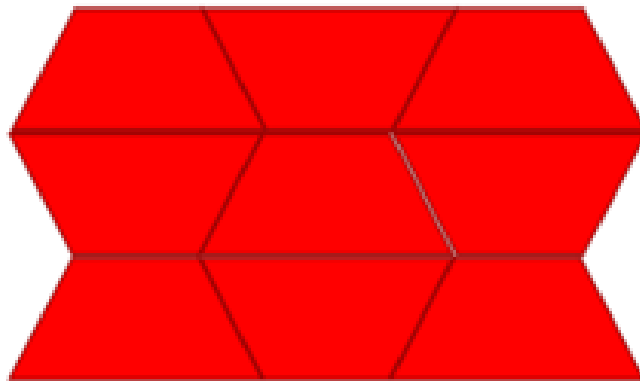
בהתבסס על יחס זה, אפשר להמיר 2 משולשים למעוין אחד, ולהרכיב את המצולע המבוקש בעזרת 4 משולשים ו-7 מעויינים.

### שאלה 2:

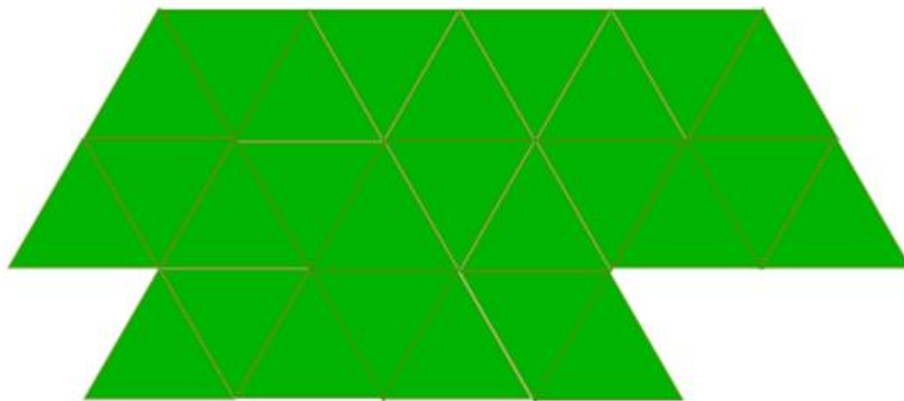
הרכיבו מספר רב ככל האפשר של מצולעים שונים כך שהמצולע המקורי מהווה שלישי משטחו של כל מצולע חדש שהרכבתם.

דוגמאות אפשריות לפתרון שאלה 2:

שימוש בסוג מצולע אחד בלבד:

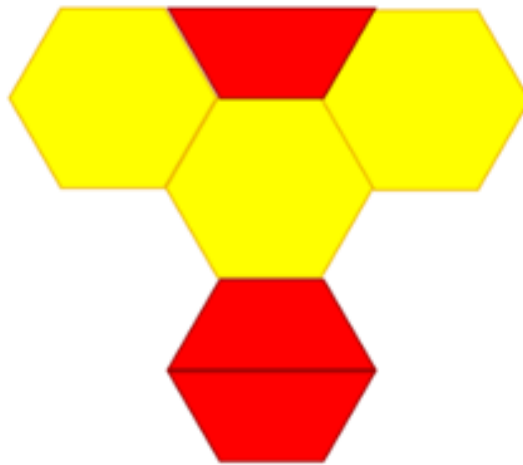


איור 16

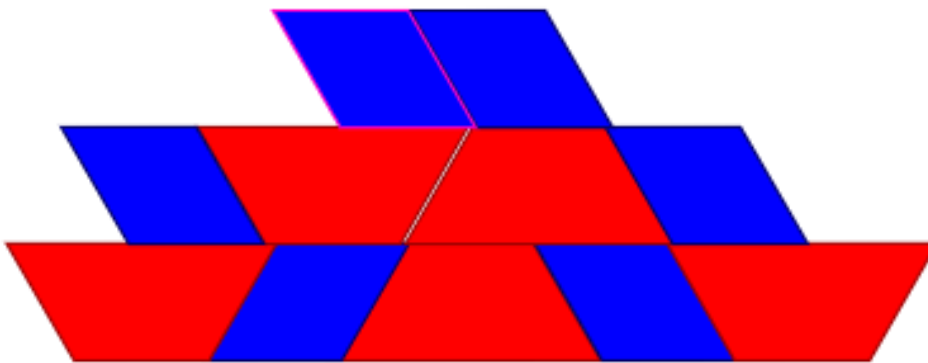


איור 17

**שימוש בשני סוגי מצולעים בלבד:**

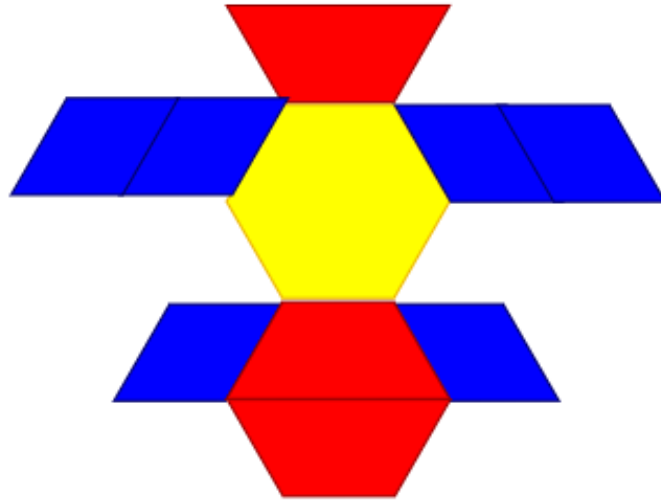


איור 18

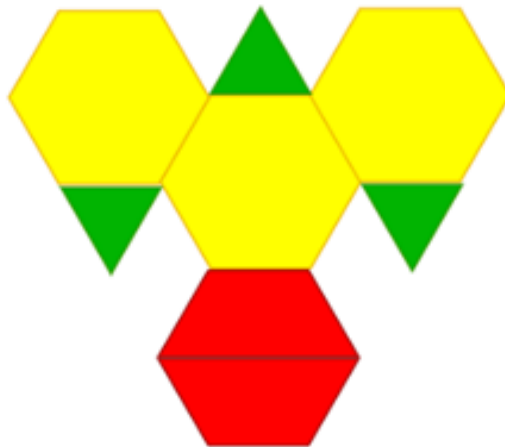


איור 19

שימוש בשלושה סוגי מצולעים בלבד:

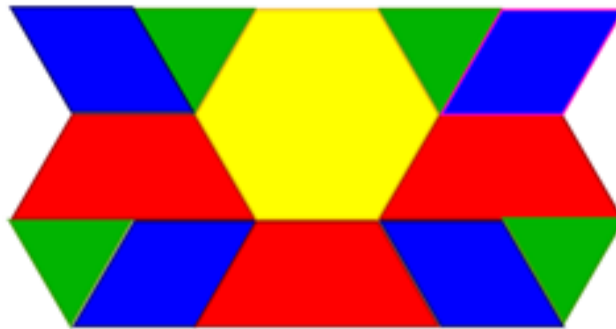


איור 20



איור 21

**שימוש בארבעה מצולעים בלבד:**



איור 22



איור 23

**אסטרטגיות לפתרון:**

האסטרטגיות אשר פורטו בפתרון שאלה 1 רלוונטיות גם עבור שאלה 2. נדגים כיצד אפשר להתמודד עם שאלה זו בעזרת האסטרטגיות המפורטות מעלה.

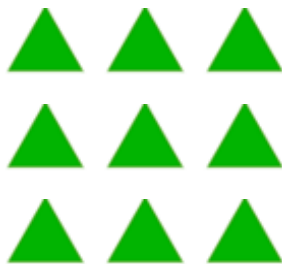
על מנת להרכיב מצולע חדש, כך שהמצולע המקורי מהווה שליש משטחו, נבדוק תחילה כמה משולשים מוכלים במצולע החדש. לשם כך נבצע פעולת כפל:  $27 = 3 \times 9$ . כלומר, המצולע החדש צריך להיות מורכב מ-27 משולשים, או ממגוון **מצולעים** המכילים בסך הכול 27 משולשים.

לבניית מצולע המורכב מ-2 מצולעים שונים **נוכל להיעזר ביחס בין הגורמים.**

לדוגמה: נבחר משולש אחד ומעוין אחד. היחס בין משולש לבין מספר המשולשים החופפים במעוין הוא: 2:1.



שני המצולעים (המשולש והמעוין) מורכבים מ-3 משולשים חופפים. המצולע "החדש" מורכב מ-27 משולשים. בעזרת התרגיל:  $27 \div 3 = 9$  נוכל לקבוע כי אפשר להרכיב מצולע "חדש" המכיל 27 משולשים מהרכבת 9 משולשים ו-9 מעוינים.



9 משולשים



9 מעוינים = 18 משולשים

בעזרת אסטרטגיה זו אפשר להמיר בכל פעם 2 משולשים במעוין, ובכך להרכיב צירופים שונים.

### סעיף 2א:

**האם ישנם מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע.**  
המצולע המבוקש מורכב ממספר אי-זוגי של משולשים (27 משולשים). המעוין והמשושה הנתונים מכילים מספר זוגי של משולשים, כך ששימוש באחד מהם תמיד יוביל למספר זוגי של משולשים. לכן אי אפשר להשתמש רק במעוין, או רק במשושה להרכבת המצולע החדש.

### סעיף 2ב:

**האם ישנם צירופים של מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע.**

בדומה להסבר בשאלה הראשונה, סכום של שני מספרים זוגיים יהיה גם הוא מספר זוגי. סכום המשולשים המתקבל מחיבור המשולשים המרכיבים כל אחד מהמצולעים – מעוין ומשושה יהיה גם הוא מספר זוגי. לכן אי אפשר להשתמש בשניהם יחדיו כדי להרכיב את המצולע החדש.

### שאלה 3

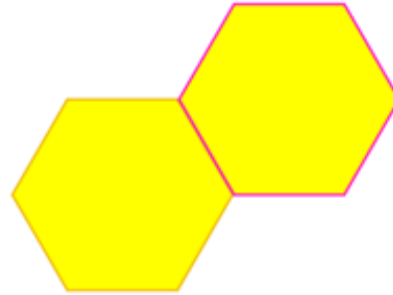
הרכיבו מספר רב ככל האפשר של מצולעים כך שהמצולע הנתון מהווה שלושה רבעים משטחו.

דוגמאות לפתרון:

שימוש בסוג מצולע אחד בלבד:



איור 25

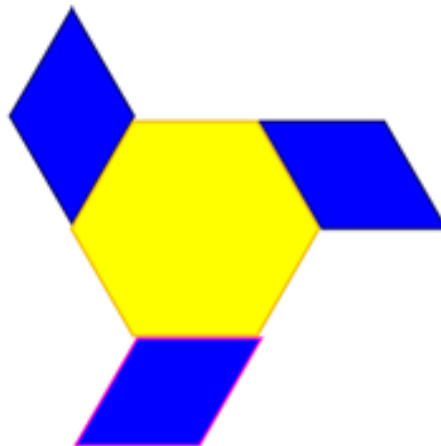


איור 24

שימוש בשני סוגי מצולעים בלבד:

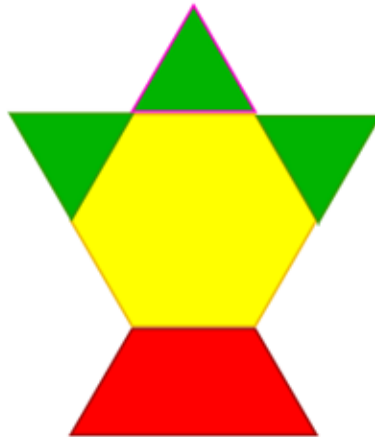


איור 26

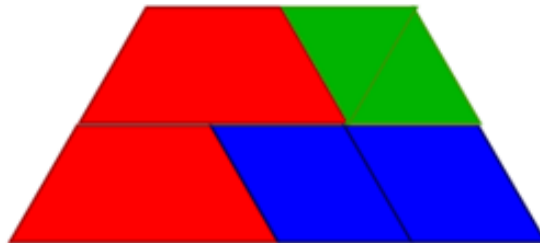


איור 27

**שימוש בשלושה סוגי מצולעים בלבד:**

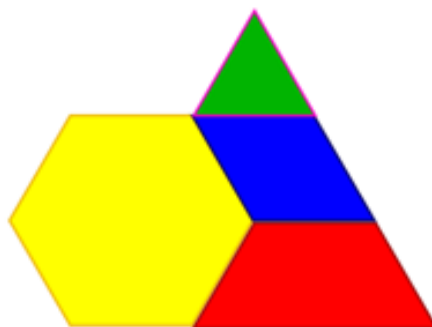


איור 28



איור 29

**שימוש בארבעה מצולעים בלבד:**



איור 30

האסטרטגיות אשר פורטו בהצעה לפתרון שאלה 1 רלוונטיות גם עבור שאלה 3. נדגים כיצד אפשר להתמודד עם שאלה זו בעזרת האסטרטגיות המפורטות מעלה.



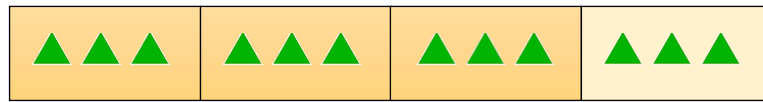
על מנת להרכיב מצולע חדש, כך שהמצולע המקורי מהווה שלושה רבעים משטחו, נבדוק תחילה כמה משולשים מוכלים במצולע החדש. לשם כך יש למצוא תחילה את שבר היחידה כלומר, כמה הוא רבע משטח המצולע החדש. אם שלושה רבעים משטח המצולע החדש הם 9 משולשים, אזי רבע מהמצולע החדש הוא 3 משולשים. על פי המשוואה:

$$9:3 = 3$$

לאחר שמצאנו את סכום הרבע מן השלם אפשר למצוא כמה הם שלושה רבעים מן השלם. בעזרת המשוואה:

$$3 \times 4 = 12$$

מכאן אפשר להסיק כי שטחו של המצולע החדש בנוי מ-12 משולשים.



המצולע המקורי מהווה  $\frac{3}{4}$  משטחו של המצולע המבוקש. במצולע המקורי 9 משולשים, לכן בכל חלק 3 משולשים ( $9:3 = 3$ )

במצולע המבוקש 12 משולשים

דרך נוספת לחישוב מספר המשולשים המוכלים במצולע החדש היא בעזרת טבלת התאמה:

כמה	איזה חלק
$\times 4$ ?	$1 = \frac{4}{4}$ $\times 4$
$\div 3$ 3	$\frac{1}{4}$ $\div 3$
9	$\frac{3}{4}$

בעזרת טבלת התאמה אפשר למצוא את שבר היחידה, כלומר רבע ולאחר מכן השלם.

### סעיף 3א:

האם קיימים מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע. אם נרצה להרכיב את המצולע החדש בעזרת מצולע אחד בלבד ממגוון המצולעים המוצעים, נוכל להשתמש בכל אחד מהם, שכן כל אחד מהם הוא אחד מן הגורמים של המספר 12.

### סעיף 3ב:

האם קיימים צירופים של מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע.

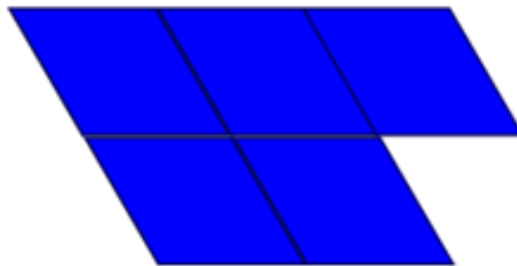
מענה לשאלה זו מסתמך על בחינת מספר המשולשים המוכלים בכל מצולע. דוגמה לצירופים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע החדש הם: משושה, מעוין וטרפז. בבחינת מקרה ספציפי זה נוכל לומר, כי חיבור בין מספר המשולשים המוכלים במצולעים אלו מוביל למספר 11.

### שאלה 4:

הרכיבו מספר רב ככל האפשר של מצולעים כך שהמצולע המקורי מהווה תשע עשיריות משטחו של המצולע המבוקש.

דוגמאות אפשריות לפתרון שאלה 4:

שימוש בסוג מצולע אחד בלבד:



איור 31

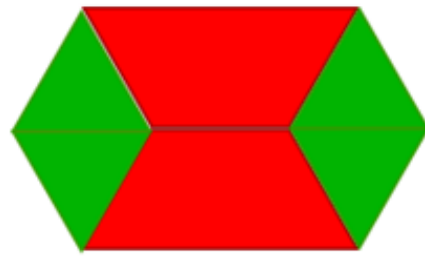


איור 32

**שימוש בשני סוגי מצולעים בלבד:**

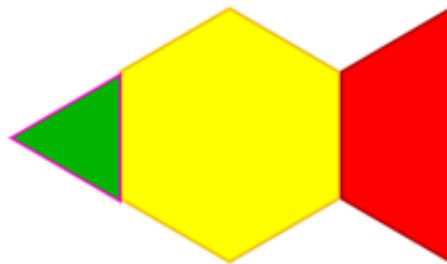


איור 34

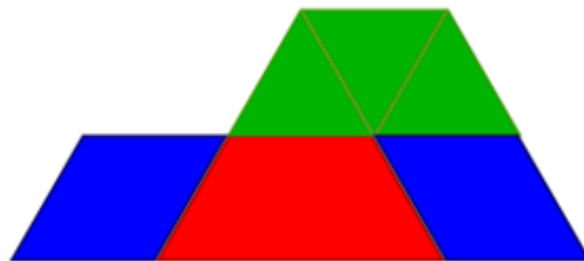


איור 33

**שימוש בשלושה סוגי מצולעים בלבד:**



איור 35



איור 36

האסטרטגיות אשר פורטו בהצעה לפתרון שאלה 1 רלוונטיות גם עבור שאלה 4. נדגים כיצד אפשר להתמודד עם שאלה זו בעזרת האסטרטגיות המפורטות מעלה.

שטח המצולע המקורי מהווה תשע עשיריות משטחו של המצולע החדש. נבדוק כמה משולשים מוכלים במצולע החדש. לשם כך יש למצוא תחילה את שבר היחידה, כלומר לחשב כמה היא עשירית משטח המצולע החדש. אם תשע עשיריות משטח המצולע החדש הם 9 משולשים, אזי עשירית מהמצולע החדש הוא משולש אחד בלבד. לכן אפשר לומר כי השלם שהוא המצולע המבוקש יכיל 10 משולשים.

#### **סעיף 4א:**

**האם קיימים מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע.** במשושה יש 6 משולשים, ולכן אם נרצה להרכיב מצולע המכיל 10 משולשים נאלץ להוסיף למשושה מצולעים אחרים השונים ממנו. מאחר שהטרפז מכיל 3 משולשים, ו-10 איננו כפולה של 3, לא נוכל להשתמש בטרפז למטרה זו. לפיכך, מכיוון שיש להרכיב מצולע בעל מספר זוגי של משולשים אפשר להשתמש במשולשים ובמעוינים (המכילים מספר זוגי של משולשים).

#### **סעיף 4ב:**

**האם קיימים צירופים של מצולעים שאי אפשר להרכיב בעזרתם את המצולע המבוקש? הסבירו מדוע.** לא נוכל להשתמש במשושה ובטרפז בלבד לבניית המצולע המבוקש משום שסכום המשולשים הכולל במשושה ובטרפז הוא 9.

### **שאלות לדין ולהרחבה**

בדין מומלץ לאסוף את התשובות המוצעות לשאלות ולדון בהסברים של התלמידים. הסברים אלו יכולים להעלות אסטרטגיות שונות לפתרון.

נשים לב לכך, כי שאלות העוסקות בשימוש במספר קטן יותר של מצולעים (שניים או שלושה מבין המצולעים) תוך שמירה על היחס המבוקש בין שטח המצולע המקורי לבין שטח המצולע המבוקש, דומות לשאלות הבוחנות מקרי קצה (לדוגמה, מאילו שילובים של סוגי צורות גיאומטריות אי אפשר להרכיב מצולע בעל שטח מסויים). המאפיין הדומה הוא שהן שאלות אשר ההתמודדות איתן מעודדת חשיבה על אסטרטגיות מתוחכמות יותר להתמודדות עם המשימה, וכן שיש בהן התייחסות למשמעויות השונות של השבר הפשוט. על כן חשוב להעמיק בהן.

במקרה שאסטרטגיות אלו לא מתעוררות כדאי לעודד את צמיחתן על ידי שאלות מתאימות.