

## שברים פשוטים ומספרים עשרוניים – תיבת נוח: הנחיות למורה

### מטרות הפעילות:

מטרות פעילות זו הן לפתח ולעודד יצירתיות בקרב התלמידים בעזרת בעיה פתוחה עם מספר רב של פתרונות. מוקדי הפעילות הם אומדן, פתרון בעיות בשברים פשוטים ועשרוניים והמרת שבר פשוט לעשרוני.

**מילות מפתח:** שברים פשוטים, שברים עשרוניים, המרה, אומדן, השוואת שברים, חוש למספרים, פתרון בעיות מילוליות.

### התאמת הפעילות ואופן הפעלתה:

הפעילות המוצעת מתאימה לתלמידים בכיתה ה-ו.

מומלץ לאפשר לתלמידים לעבוד על הפעילות בזוגות או בקבוצות קטנות כדי לעורר שיח על השאלות המוצעות. את הפעילות כדאי לסכם בדיון כיתתי.

אפשר להתאים את הפעילות לתלמידים בכיתות מוקדמות יותר על ידי הפיכתה למונחית יותר. לחלופין, אפשר להתאים אותה לרמות שונות של חשיבה מתמטית על ידי חשיבה על מקרים פשוטים או מורכבים יותר. שינויים אלו יכולים להיעשות על ידי התייחסות להערות הבאות:

א. **ערך משקל זוגות בעלי החיים** – אפשר לבחור את ערכי המשקלים כך שיקל את החישוב והשוואה בין זוגות בעלי החיים. לדוגמה, משקלים קלים יותר יקלו על הפותר במציאת פתרון המשימה.

ב. **ייצוג אחיד של משקל זוגות בעלי החיים (שימוש רק בשברים פשוטים או רק בשברים עשרוניים)** – שימוש בייצוג אחיד אשר לא מצריך המרה. לדוגמה, שברים פשוטים או מספרים עשרוניים הם פשוטים יותר עבור התלמידים.

ג. **ביטוי משקל זוגות בעלי החיים בשברים מוכרים, פשוטים או עשרוניים שמאפשרים המרה והשוואה בקלות רבה יותר** – לדוגמה: שברים כגון  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{10}$  קל להמיר למספר עשרוני, והם אינם מצריכים חישוב מורכב. כך גם שברים כגון 0.2, 0.5, קלים להמרה לשברים פשוטים, וכן הלאה.

ד. **בחירה של משקל מקסימלי מתאים ביחס למשקלי זוגות בעלי החיים** – בחירה של מספר שלם כמשקל מקסימלי, או משקל כבד ביחס למשקלי הזוגות תקל על התלמידים את עריכת אומדן.

## מהלך הפתרון

### פתרון שאלה 1:

**סעיף א':** כתבו מספר רב ככל האפשר של אפשרויות להובלת עשרת הזוגות של בעלי החיים אל תיבת נוח. בסעיף זה הציגו את האפשרויות במקרה שאפשר לבצע את ההובלה עם 2 זוגות בלבד בסירה.

דוגמאות אפשריות לפתרון:

#### דוגמה 1:

$$1.6 + 0.38 = \text{טון } 1.98$$

זוג ג'ירפות + זוג אריות

$$\frac{1}{2} + \frac{16}{100} = 0.5 + 0.16 = \text{טון } 0.66$$

זוג צבי יבשה + זוג פנדה

$$0.96 + 0.24 = \text{טון } 1.2$$

זוג גמלים + זוג יענים

$$0.12 + 0.32 = \text{טון } 0.44$$

זוג קנגורו + זוג גורילות

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{10} = 0.75 + 0.9 = \text{טון } 1.65$$

זוג זברות + זוג דובי קוטב

#### דוגמה 2:

$$1.6 + 0.5 = \text{טון } 2.1$$

זוג ג'ירפות + זוג צבי יבשה

$$0.9 + 0.96 = \text{טון } 1.86$$

זוג דובי קוטב + זוג גמלים

$$0.38 + 0.32 = \text{טון } 0.7$$

זוג אריות + זוג גורילות

$$0.75 + 0.24 = \text{טון } 0.99$$

זוג זברות + זוג יענים

$$0.16 + 0.12 = \text{טון } 0.28$$

זוג פנדה + זוג קנגורו

**סעיף ב': האם קיימים צירופים של זוגות שלא יוכלו להיות יחד באותה הובלה? ציינו מיהם והסבירו.**

נציע דרך לפתרון תרגיל זה ונציין שאפשר לפתור אותו בדרכים שונות.

במענה לשאלה 1ב' יש להתייחס לשתי המגבלות: משקל מקסימלי שהסירה יכולה לשאת (2.1 טון), וכמו כן שרק 2 זוגות של בעלי חיים אפשר להעלות על הסירה. 2 הג'ירפות הן זוג בעלי החיים שמשקלן הוא הכבד ביותר. יתרה מזאת, משקל כל זוגות בעלי החיים למעט זוג הג'ירפות הוא קטן מטון אחד. לכן, כל צירוף של שני זוגות שאינם ג'ירפות יסתכם בפחות משני טונות. נתמקד אם כן בג'ירפות, ונבדוק מהו המשקל המקסימלי של זוג בעלי חיים שאפשר להעלות עימן על הסירה, כך שהמשקל הכולל של שני הזוגות יהיה קטן או שווה ל-2.1 טון. ניעזר בתרגיל:

$$0.5 \text{ טון} = 1.6 - 2.1$$

ההפרש שמצאנו עוזר לבחון את המשקלים של הזוגות שאפשר יהיה להעלות על הסירה ולצרף לזוג הג'ירפות. כלומר, כל זוג בעל חיים שמשקלו קטן או שווה ל-0.5 טון אפשר יהיה לצרף אל הג'ירפות באותה הובלה. מכאן אפשר להסיק, כי כל זוג שמשקלו גדול מ-0.5 טון אי אפשר יהיה להעלות על הסירה יחד עם הג'ירפות.

**להלן דוגמאות לשילובים שאינם עומדים בתנאי השאלה:**

$1.6 + 0.9 = 2.5$ טון	זוג ג'ירפות + זוג דובי קוטב
$1.6 + 0.75 = 2.35$ טון	זוג ג'ירפות + זוג זברות
$1.6 + 0.96 = 2.56$ טון	זוג ג'ירפות + זוג גמלים

**מיומנויות העומדות בבסיס האסטרטגיות לפתרון המשימה**

כדי לפתור את המשימה מוטל על התלמידים לשלוט במספר מיומנויות:

- א. **המרת שברים –** המרת מספר מעורב לשבר הגדול מ-1; המרת שבר פשוט (כולל שברים הגדולים מ-1 ומספרים מעורבים) לשבר עשרוני ולהפך.
- ב. **השוואת שברים –** השוואה בין שברים המוצגים באותו אופן של ייצוג (לדוגמה, שני שברים המוצגים כשברים פשוטים) ובאופני ייצוג שונים (לדוגמה, אחד השברים הוא שבר פשוט ואילו השני שבר עשרוני). בעזרת מיומנות זו התלמידים יכולים למיין שברים לקבוצות ולסדרם על פי גודלם.

ג. **עריכת אומדנים** – הערכת גודל השבר (האם הוא גדול או קטן מערך מסוים?), והערכת תוצאת החיבור או תוצאת החיסור בין הערכים.

סביר להניח כי תלמידים אשר אינם מיומנים בהמרת שברים פשוטים (כולל שברים הגדולים מ-1 ומספרים מעורבים) לשברים עשרוניים ולהפך, יתקשו להעריך את גודל השבר ולהשוות בין השברים. שליטה בשתי מיומנויות אלו תורמת ליכולת לערוך אומדן לתוצאות תרגילי החיבור והחיסור של השברים. קושי במיומנויות אלו עלול להוביל לבחירת אסטרטגיות ראשוניות לפתרון הפעילות. נוסף על כך, ייתכן שהתלמידים יבחרו להמיר תחילה את השברים, כך שייצגו באותה שיטת ייצוג.

### דוגמאות לאסטרטגיות לפתרון המשימה

- **בחירה לא מתוכננת של זוגות (ניסוי וטעייה)** – אפשר לבחור באופן שרירותי שני זוגות של בעלי חיים. לאחר בחירת שני הזוגות לערוך המרה על פי הצורך, ולחשב את המשקל הכולל של הזוגות כדי לבחון אם המשקל עומד בתנאי השאלה. הבחירה ב-2 זוגות שמשקלם אינו עומד בתנאי השאלה אינה מושכלת, ולכן יש לערוך בחירה מחדשת של זוג אחר. אסטרטגיה זו איננה יעילה, היא עלולה להוביל למבוי סתום בבחירת הזוגות, ולפגוע בשטף מציאת פתרונות רבים לבעיה. עם זאת, היא מדגישה את הצורך שבפיתוח אסטרטגיות מתקדמות יותר.
- **בחירה מושכלת של הזוגות** – אם עורכים בחירה מושכלת אפשר למצוא דוגמאות לאסטרטגיות שונות לבחירת הזוג הראשון של בעלי החיים. אסטרטגיות אלו כרוכות, בין היתר, במיומנויות התלמידים בתחום עריכת השוואת שברים, עריכת פעולות חיבור וחיסור בשברים ועריכת אומדן. ככל שמיומנויות אלו יהיו מפותחות יותר, כך יהיה לתלמידים קל יותר להתמודד עם הפעילות.
- **מיון המשקל של כלל זוגות בעלי החיים על פי סדר עולה** – אסטרטגיה זו היא בסיס לאסטרטגיות הבאות. מיון חלקי או מלא של המשקלים, תוך שימוש במיומנויות השוואת שברים ואומדן, יאפשר צירוף מתוכנן של בעלי החיים.
- **התחלה מצירוף בעלי החיים שמשקלם הקל ביותר והמשך בבעלי החיים שמשקלם הכבד ביותר** – באסטרטגיה זו פותחים תחילה בצירוף בעלי החיים שמשקלם הקל ביותר. זאת מתוך תפיסה שאלו הצירופים הפשוטים והבולטים ביותר. לאחר מכן דואגים לבעלי החיים שמשקלם הוא הכבד ביותר. הטיפול בבעלי החיים שמשקלם כבד ביותר בסוף הפעילות יכול להוביל את התלמידים לעריכת שינויים רבים בקרב הצירופים שבהם בחרו. שינויים אלו עשויים להוביל אותם לפיתוח של אסטרטגיות אחרות לפתרון.

- **התחלה מצירוף בעלי החיים שמשקלם הוא הכבד ביותר והמשך טיפול בבעלי חיים שמשקלם הוא הקל ביותר – באסטרטגיה זו פותחים תחילה בצירוף בעלי החיים שמשקלם הכבד ביותר. זאת מתוך תפיסה שאלו הצירופים המורכבים ביותר. לאחר מכן מטפלים בבעלי החיים שמשקלם הקל ביותר. באסטרטגיה זו בחירת בעלי החיים אשר יובלו ביחד נעשית בעזרת אומדן או חישוב. לכן, ייתכן מצב שבו ייבחנו צירופים שונים לפני מציאת המתאים מביניהם.**
- **בחינת כלל בעלי החיים יוצאי הדופן וקביעת מדד לצירוף אחרים אליהן – באסטרטגיה זו בוחנים בעזרת חישוב או אומדן מיהם הזוגות יוצאי הדופן (למשל ג'ירפות) ביחס למשקל המקסימלי הנתון. לאחר מכן קובעים כלל, שעל פיו יש לבחור את הזוגות האחרים. דוגמה לשימוש באסטרטגיה זו מופיעה בהצעה לפתרון שאלה 1, סעיף ב'.**

## פתרון שאלה 2:

**סעיף א':** כתבו מספר רב ככל האפשר של אפשרויות להובלת עשרת הזוגות של בעלי החיים אל תיבת נוח. בסעיף זה הציגו את האפשרויות כאשר אפשר לבצע הובלה של 3 זוגות לכל היותר בסירה.

דוגמה לפתרון:

1.96 טון = $1.6 + 0.12 + 0.24$	זוג ג'ירפות + זוג קנגורו + זוג יענים
2.02 טון = $0.96 + 0.9 + 0.16$	זוג גמלים + זוג דובי קוטב + זוג פנדה
1.63 טון = $0.75 + 0.5 + 0.38$	זוג זברות + זוג צבי יבשה + זוג אריות
0.32 טון	זוג גורילות

**סעיף ב':** האם קיימים צירופים של זוגות שלא יוכלו להיות יחד באותה הובלה? ציינו מיהם והסבירו.

בדומה להסבר שניתן בשאלה הראשונה, נתייחס לשתי המגבלות: משקל מקסימלי שהסירה יכולה לשאת (2.1 טון) והמספר של 3 זוגות לכל היותר בכל הובלה. נוכל להיעזר בפתרון המשימה הקודמת שבה מצאנו שאם נצרף לזוג הג'ירפות זוג נוסף עלינו לשים לב שמשקלם יהיה קטן או שווה ל-0.5 טון. לכן במקרה הנוכחי שבו עלינו לצרף לכל היותר 3 זוגות, אפשר לבחור שני זוגות בנוסף לג'ירפות, כך שסכום משקלם שווה או קטן מ-0.5 טון. מכאן אפשר

להסיק כי כל שני זוגות שסכום משקלם כבד יותר מ-0.5 טון לא יוכלו להיות יחד עם הג'ירפות באותה הובלה. באותה הדרך נוכל לבחון את יתר הצירופים עם זוגות של בעלי חיים אחרים.

### להלן דוגמאות לצירופים שאינם עומדים בתנאי השאלה

$$1.6 + 0.24 + 0.38 = 2.22 \text{ טון} \quad \text{זוג ג'ירפות} + \text{זוג אריות} + \text{זוג יענים}$$

$$1.6 + 0.32 + 0.5 = 2.42 \text{ טון} \quad \text{זוג ג'ירפות} + \text{זוג גורילות} + \text{זוג צבי יבשה}$$

$$0.9 + 0.96 + 0.75 = 2.61 \text{ טון} \quad \text{זוג דובי קוטב} + \text{זוג גמלים} + \text{זוג זברות}$$

### אסטרטגיות לפתרון המשימה

האסטרטגיות במשימה זו דומות לאסטרטגיות שהשתמשנו בהן במשימה הראשונה. מאחר שבמשימה זו אנו מוגבלים ל-3 זוגות לכל היותר בכל הובלה, השימוש באסטרטגיות הללו מורכב יותר. הסיבה לכך היא שלאחר בחירת הזוג הראשון (למשל הזוג שמשקלו הכבד ביותר), יש לחזור על האסטרטגיה כדי לבחור את שני הזוגות העוקבים. נשים לב לכך שאסטרטגיה של בחירה בלתי מתוכננת של זוגות לא תהיה אסטרטגיה יעילה.

### פתרון שאלה 3:

**סעיף א':** ניתן להעלות על הסירה כמות של זוגות בעלי חיים העומדת במגבלת המשקל: על משקל הזוגות המובלים בסירה להיות לכל היותר 2.1 טון. כתבו מספר רב ככל האפשר של אפשרויות להובלת כל עשרת הזוגות של בעלי החיים אל תיבת נוח.

### דוגמה לפתרון:

$$1.6 + 0.16 + 0.32 = 2.08 \text{ טון} \quad \text{זוג ג'ירפות} + \text{זוג פנדה} + \text{זוג גורילות}$$

$$0.96 + 0.24 + 0.38 + 0.5 = 2.08 \text{ טון} \quad \text{זוג גמלים} + \text{זוג יענים} + \text{זוג אריות} + \text{זוג צבי יבשה}$$

$$0.9 + 0.12 + 0.75 = 1.77 \text{ טון} \quad \text{זוג דובי קוטב} + \text{זוג קנגורו} + \text{זוג זברות}$$

**סעיף ב':** מהו המספר המינימלי של הובלות שאפשר לבצע במקרה זה? כתבו את צירופי הזוגות בכל הובלה. הסבירו מדוע אי אפשר להוביל את בעלי החיים במספר מצומצם יותר של הובלות.

על מנת להוביל את כלל בעלי החיים לתיבת נוח שבלב הים תוך מגבלת המשקל של 2.1 טון, עלינו לבחון את הצירופים האפשריים, ולהבין כי המספר המינימלי של הובלות שאפשר לעשות הוא 3. על פי סעיף א' בשאלה זו, זוגות בעלי החיים שמשקלם הוא הכבד ביותר הם: זוג ג'ירפות (1.6 טון), זוג גמלים (0.96 טון) וזוג דובי קוטב (0.9 טון). בשל משקלם הכבד נוכל לומר בוודאות כי 3 זוגות אלו לא יוכלו להיות מובלים יחד באותה הובלה, ולכן יש צורך לפצל את הובלתן.

נבדוק באופן פרטני כל זוג מהזוגות שפורטו לעיל. זוג הג'ירפות לא יוכלו להיות מובלות באותה הובלה עם אחד משני הזוגות הכבדים האחרים, שכן הסכום של צירוף זוג אחר איתן הוא גדול מהמשקל המקסימלי. לפיכך, את זוג הג'ירפות חייבים להוביל בנפרד. נבחן את האפשרות של הובלת דובי הקוטב יחד עם זוג הגמלים. סכום משקלם של זוג דובי הקוטב עם זוג הגמלים שווה ל-1.86 טון. כלומר, אם שני זוגות אלו יובלו יחד באותה סירה, אזי משקל זוגות בעלי החיים שיוכלו להצטרף אליהם יוכל להגיע לכל היותר ל-0.24 טון. זוג היענים הוא בחירה טובה לצורך זה, שכן הם משלימים את הסכום הכולל למשקל המקסימלי (משקלו של זוג יענים הוא 0.24 טון).

לאחר סיום הובלה זו נחזור אל זוג הג'ירפות. לצד הג'ירפות אפשר להוביל בעלי חיים במשקל כולל של  $0.5 = 1.6 - 2.1$  טון. נבחר לשם כך את הזוגות הכבדים הבאים העומדים בתנאי זה: למשל, זוג צבי היבשה שמשקלו 0.5 טון. עכשיו נבדוק אם סכום משקל זוגות בעלי החיים שנותרו (אריות, זברות, קנגרו, פנדה וגורילות) קטן מהמשקל המקסימלי. מכיוון שסכום משקלם הוא 1.73 טון, נוכל להעבירם בהובלה נפרדת.

מאחר שדאגנו לכך ששתיים מבין ההובלות יהיו בדיוק במשקל המקסימלי, נוכל להסיק כי אנו זקוקים למספר מינימלי של הובלות.

$$1.6 + 0.5 = 2.1 \text{ טון} \quad \text{זוג ג'ירפות} + \text{זוג צבי היבשה}$$

$$0.96 + 0.9 + 0.24 = 2.1 \text{ טון} \quad \text{זוג גמלים} + \text{זוג דובי קוטב} + \text{זוג יענים}$$

$$0.38 + 0.75 + 0.12 + 0.16 + 0.32 = 1.73 \text{ טון} \quad \text{זוג אריות} + \text{זוג זברות} + \text{זוג קנגורו} + \text{זוג פנדה} + \text{זוג גורילות}$$

דרך נוספת לבחינת מספר ההובלות המינימלי שאפשר לעשות היא על ידי שימוש בחילוק להכלה. כלומר, נסכום את כלל המשקלים של זוגות בעלי החיים. במקרה שלנו, סכום משקל כול זוגות בעלי החיים שווה ל-5.93 טון. בהנחה שמגבלת המשקל בכל הובלה בסירה היא 2.1 טון, נבצע את פעולת החילוק הבאה:

$$5.93 : 2.1 = 2.82$$

נדגים זאת על ידי בדיקת מספר הפעמים שבהן אפשר לחסר את הערך 2.1 מהמספר 5.93:

$$5.93 - 2.1 = 3.83$$

$$3.83 - 2.1 = 1.73$$

1.73 קטן מ-2.1 אך גדול מאפס, מכאן אפשר להסיק כי אי אפשר לבצע פחות מ-3 הובלות על מנת להעביר את כלל בעלי החיים אל תיבת נוח תוך עמידה במגבלת המשא בכל הובלה.

## שאלות לדין ולהרחבה

לאחר ההתנסות מומלץ לערוך דיון כיתתי שמוקדו הם איסוף הפתרונות השונים שהציעו התלמידים, וכן האסטרטגיות השונות שבהן השתמשו. דיון בפתרונות השונים יכול להעלות שאלות לגבי מאפייני האסטרטגיות השונות לחשיבה על בעיות מהסוג הזה. כמו כן יכול הדיון להוות בסיס לחשיבה על שימוש באומדן וחשיבותו, ולסייע לפיתוח החשיבה הכמותית. חשוב להתייחס בדיון זה לשאלות הבאות:

1. יתרונות וחסרונות של כל אסטרטגיית בחירה לפתרון המשימה.
2. יעילות השימוש באומדן – באילו מקרים השימוש באומדן היה יעיל יותר?
3. מה למדנו בעזרת ההתמודדות עם המשימה?