משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلة الابتدائية

חילוק במספרים טבעיים

לכיתות א-ב

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.

מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי – הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה
שדרות אבא חושי 199, הר הכרמל, חיפה, מיקוד 3498838

טל' 04-8240646 פקס. 04-8288073
דוא"ל: mathcntr@edu.haifa.ac.il אתר: http://ymath.haifa.ac.il

מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلة الابتدائية

אוגדן:
חילוק במספרים טבעיים לכיתות א-ב

כתיבה: מירי שרייבר, טלי אילון, עירית לביא, מיכל דביר וקרן ארידור

ייעוץ מדעי: ד"ר יובל גנוסר

אוגוסט 2018

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.

אוגדן: חילוק במספרים טבעיים לכיתות א-ב

תוכן עניינים

מבוא

הוראת הכפל והחילוק בכיתות א'-ב' באה לאחר הוראת החיבור והחיסור. רצף יעיל להוראתם של הכפל והחילוק הינו בתחילה, קישור של מושגים חדשים לידע קודם בשילוב הצגת סיטואציות כאמצעי להצגת המושגים הנלמדים (Wallace & Gurganus, 2005). בהמשך ההוראה ממליצים Wallace & Gurganus להפגיש את הלומדים עם התנסויות מוחשיות וייצוגים מוחשיים לפני המעבר לסימון הפורמאלי. לאחר ההתנסות המדורגת רצוי שתינתן הוראה מפורשת של הכללים ובהמשך יינתן תרגול מעורב (מוחשי, סמלי ופורמאלי). לדעתם, חיבור חוזר כמקושר לידע קודם של פעולת החיבור מהווה התחלה טובה אך לא מספקת להמשך. נדרשת היכולת לראות את הכפל והחילוק ביחסים הופכיים ולהסביר את החלופיות. כלומר, אם מורה לא יפגיש את תלמידיו עם מצבים כפליים מעבר לחיבור חוזר, המבנה הכיפלי לא יירכש אצלם מאליו. לכן, יש להפגיש את הלומדים עם משמעויות כיפליות שונות (Mulligan & Watson, 1998; Jacob & Willis, 2001; Anghileri, 1989).

מתוך מבחני מיצ"ב תשס"ט עלתה מסקנה שנדרשת הוראה של המשמעויות השונות של פעולת החילוק וחיזוק ידיעת הקשר שלה לפעולת הכפל, כמו גם קישור לפירוק לגורמים וסימני התחלקות. כמו כן הומלץ על הרחבת החישובים בתחומי מספרים שונים והומלץ להשתמש בחישובים בעל פה, באומדן, בתובנה חשבונית ולהרחיב את השיח בדבר יעילות אסטרטגיית הפתרון הנבחרת (מסקנות פדגוגיות בנושא מספרים ופעולות בשלמים). אוגדן זה מציע שימוש בפעילויות משחקיות מגוונות ללימוד ותרגול פעולת החילוק והעמקת ההבנה של מושג זה. בכל פעילות המוצעת באוגדן מצוינות מטרות משחקיות, מטרות פדגוגיות ומטרות בתחום התוכן המתמטי. כמו גם הצעות להפעלה ברמות שונות של קושי ומורכבות.

מהו חילוק?

פעולת החילוק היא אחת מארבע הפעולות המתמטיות המוכרות ביותר בין שני איברים. בפעולה זו נתונים שני מספרים. הראשון הוא המחולק והשני הוא המחלק. התוצאה המתקבלת מפעולת החילוק של המחולק במחלק נקראת מנה. סימני הפעולה הם: / , : , ⟌ או קו שבר. החילוק נחשב כפעולת החשבון הקשה ביותר להבנה מבין ארבע פעולות החשבון הבסיסיות (חיבור, חיסור כפל וחילוק). רבים ממליצים ללמד את הכפל והחילוק לאחר לימוד פעולות החיבור והחיסור אך לגבי רצף הלמידה בפעולות הכפל והחילוק יש הממליצים ללמדן במקביל (Harris, 2001) ויש הממליצים ללמד תחילה את הכפל ורק לאחר מכן לעסוק בחילוק (הרשקוביץ, 2005).

משמעויות החילוק

שתי המשמעויות העיקריות של פעולת החילוק, הנלמדות בכיתות א'-ב', הן חילוק לחלקים וחילוק להכלה (Roche & Clarke, 2012). משמעויות נוספות, מורכבות יותר להבנה, אינן נלמדות בכיתות אלו ואלה הן החילוק כביטוי של יחס והחילוק כביטוי של כמות ליחידה (קופרמן, 2011).

1. חילוק לחלקים

בחילוק לחלקים, נתון המחולק שהוא מספר העצמים הכולל ונתונות מספר הקבוצות שאליהן יש לחלק את כל העצמים באופן שווה. המשימה היא למצוא כמה עצמים יש בכל קבוצה (שם, 2011).

2. חילוק להכלה

בחילוק להכלה נתון המחולק שהוא מספר העצמים הכולל ונתונים מספר העצמים הנמצאים בכל אחת מן הקבוצות השוות. המשימה היא למצוא כמה קבוצות שוות יש.

יש המצדדים בהקניית המשמעויות השונות לתלמידים כדי שיוכלו להבין טוב יותר בהמשך את הנושאים הנגזרים מלמידת פעולת החילוק בטווח המספרים הרציונליים (גביש, 1998). לעומתם, יש הטוענים כי ההבחנה בין שתי המשמעויות נועדה לידיעת המורה כדי שיהיה מודע לצורך להפגיש את התלמידים עם המשמעויות השונות. יחד עם זאת הם טוענים כי למידה מפורשת של המשמעויות על ידי התלמידים בשלבים מוקדמים עלולה לבלבל (הרשקוביץ, 2005) .

3. חילוק כחיסור חוזר

החילוק כחיסור חוזר נובע מהפיכות הפעולה לכפל שהינו חיבור חוזר (ברבש, 2008).

אם 3x5=15 בחיבור חוזר הוא 5+5+5=15

אז 15:5=3 בחיסור חוזר הוא 15-5-5-5=0

האפס הוא למעשה השארית שנותרה מן החלוקה. במקרה של 15:5 מדובר בחלוקה ללא שארית, אך במקרה של 17:5, אם נבצע חיסור חוזר של 5 עד שלא נוכל עוד להוריד 5 ולהישאר בתחום המספרים הטבעיים ניוותר עם שארית 2.

17-5-5-5=2 ואכן 17:5 = 3(2).

קיימת התייחסות נוספת לשארית אליה יתוודעו הילדים בשלבים מאוחרים יותר והיא:

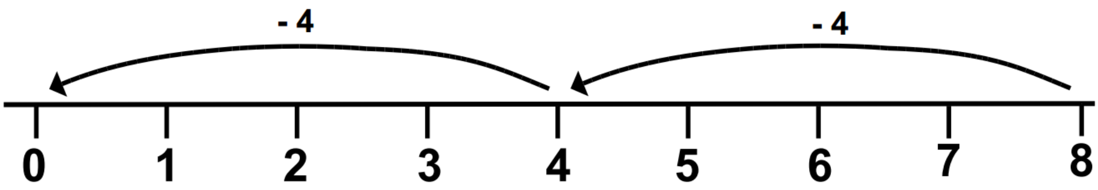
$$17:5=3\,\frac{2}{5}$$

שאלה אותה מתאים לשאול במצב של חיסור חוזר היא: "כמה פעמים ייכנס המחלק במחולק?"

במקרה של 15:5 נשאל כמה "פעמים ייכנס 5 (המחלק) ב-15 (המחולק)?"

ישר המספרים

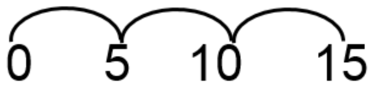
במצבים של חיסור חוזר רצוי להמחיש את הפעולה על גבי ישר המספרים המהווה גשר בין השלב המוחשי של המנייה בקפיצות לשלב הפורמלי של כתיבת התרגיל.



איור מתוך (Harris, 2001)

מנייה בקפיצות

אפשרות נוספת להמחשת החיסור החוזר באופן ברור יותר היא על ידי מנייה בקפיצות, החל מן המחולק (15) בקפיצות של 5 (המחלק) עד 0. מספר הקפיצות עד אפס מייצג את המנה.



4. חילוק כיחס בין שני גדלים

יחס בין שני גדלים מתאר קשר כיפלי בין שתי קבוצות. למשל, יחס של 1/2 מייצג מצב בו עבור כל כוס אורז נשים 2 כוסות מים. Lamon (1993) מגדירה ארבעה מצבים של יחס.

1. חלק-חלק-שלם: מייצג את היחס שבין שתי קבוצות המהוות שלם.
2. קבוצות מקושרות: מייצג את היחס שבין שתי קבוצות שאין קשר ביניהן.
3. יחידות מידה: מייצג את היחס בין שתי קבוצות המבטאות מידה כלשהי, כמו מהירות (היחס בין מרחק לזמן) או מחיר ליחידה (היחס בין פריטים למחירם).
4. הגדלה בהתאמה: מייצג את היחס בין שתי קבוצות עם כמות רציפה, כמו אורך ורוחב.

עיסוק בחילוק במשמעות זו דורש פיתוח של חשיבה פרופורציונלית ומהווה בסיס לעיסוק באלגברה. רצוי להתחיל למידה של משמעות זו, כמו גם למידה של שאר המשמעויות, דרך התנסויות במצבים אותנטיים מן החיים. מצבי היחס המומלצים בשלב המקדים ללמידה הפורמלית הם מצבי היחס של "חלק-חלק-שלם" ושל "קבוצות מקושרות". כלומר יש להקדים הבנה מושגית ללמידת הפרוצדורה. משמעות פעולת החילוק בהקשר זה נלמדת בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי (Langrall & Swafford, 2000).

תכונות הפעולה

לפעולת החילוק מספר תכונות וכללים. להלן נציג תכונות וכללים אלו ופעילויות שעשויים לחזק את המודעות של התכונה או לתמוך בהבנתה. הפעילויות מוצגות במספר רמות.

1. הפיכות

פעולת החילוק הפוכה לפעולת הכפל כפי שפעולת החיסור הפוכה לפעולת החיבור.

דוגמה: 2×3=6 מכאן ש- 6:3=2 ו- 6:2=3.

2. חוק החילוף

חוק החילוף אינו מתקיים בפעולת החילוק.

דוגמה: 8:4 ≠ 4:8

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$$

3. חוק הפילוג

חוק הפילוג מתקיים בפעולת החילוק ביחס למחולק.

דוגמה: **56**:7=

(**35+21**) : 7 = (**35**:7) + (**21**:7) = 5+3 = 8

אין הוא מתקיים לגבי המחלק.

דוגמה: 36:**9**

36 : (**6+3**) ≠ (36:**6**) + (36:**3**)

36:9 ≠ 6+12

4 ≠ 18

4. חוק הקיבוץ

חוק הקיבוץ אינו מתקיים בפעולת החילוק.

דוגמה: 36 : (6:2) ≠ (36:6) : 2

36:3 ≠ 6:2

12 ≠ 3

5. חוקי הגדלה והקטנה

- אם מכפילים את המחולק, המנה מוכפלת בהתאם.
- אם מכפילים את המחלק, המנה מחולקת בהתאם.
- אם מחלקים את המחולק, המנה מחולקת בהתאם.
- אם מחלקים את המחלק, המנה מוכפלת בהתאם.

6. האפס בחילוק

א. חילוק של אפס

חילוק של אפס איברים ניתן ורצוי להמחיש בהקשר כלשהו.

<u>דוגמה</u>:

דן רצה לחלק שווה בשווה 0 סוכריות על מקל ב-6 שקיות יום הולדת. כמה סוכריות על מקל בכל שקית יום הולדת? התשובה היא 0 סוכריות על מקל.

התרגיל המתאים הוא: $0:6=0$

0 הוא המחולק, 6 המחלק ו-0 הוא גם המנה. ובכפל ניתן להציג את התרגיל $0 = 0 \times 6$.

ב. חילוק באפס

במקרה של חילוק באפס מומלץ להמחיש את חוסר היכולת להגדיר את הפעולה על ידי העובדה שפעולת החילוק הפוכה לפעולת הכפל.

כפי שהדגמנו: $2\times3=6$ מכאן ש- $6:3=2$ ו- $6:2=3$.

ומכאן, אם נרצה לדעת את התשובה לתרגיל החילוק $6:0=\boxed{?}$

נשאל: $6 = 0 \times \boxed{?}$

כלומר יש למצוא מספר שהכפלתו באפס תיתן את התשובה 6 וכפי שידוע הכפלה של כל מספר באפס מובילה למכפלה אפס. משום כך הוחלט להגדיר את פעולת החילוק באפס כפעולה שאינה מוגדרת.

גם התרגיל $0:0$ אינו מוגדר מכיוון שאם נרצה לדעת את התשובה לתרגיל החילוק

$\boxed{?} = 0:0$ נשאל: $0 = 0 \times \boxed{?}$

בתרגיל הכפל הזה ניתן להציב כל מספר, אך ביטוי חשבוני חייב להיות בעל הגדרה חד משמעית ולכן גם מצב זה אינו מוגדר.

7. חילוק ב- 1

המספר 1 הוא איבר ניטרלי בפעולות הכפל והחילוק.

כל מספר אותו נכפול ב- 1 המכפלה תהיה המספר המוכפל, וכל מספר אותו נחלק ב- 1 המנה תהיה המספר המחולק.

דוגמה: $8\times1=8$ וגם $8:1=8$.

מכאן שכל מספר שנחלק בעצמו, המנה תהיה 1.

8. חילוק מספר במספר זהה

כפועל יוצא מסעיפים 1 ו-7, ניתן לומר שכל מספר, פרט ל-0 המחולק באותו מספר יהיה שווה ל-1.

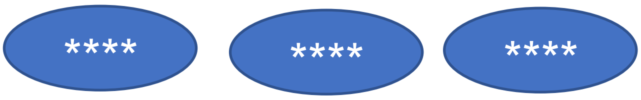
דוגמה: $8\times1=8$ וגם $8:1=8$ ומכיוון שמתקיימת תכונת ההפיכות אז $8:8=1$, אך מכיוון שחלוקה באפס אינה מוגדרת, לא ניתן לחלק את אפס בעצמו.

אסטרטגיות לפתרון תרגילי חילוק

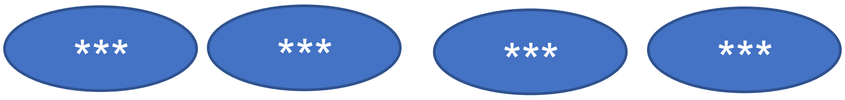
אסטרטגיות הפתרון מוצגות על פי רמת החשיבה הנדרשת. מן המוחשי אל המופשט.

חלוקה לקבוצות שוות

12:3=4



בעזרת ציור 12 עצמים וחלוקתם לשלוש קבוצות או לחילופין קיבוצם של 12 העצמים לקבוצות של שלוש נוכל בעזרת מנייה פשוטה לפתור את תרגיל החילוק.



סכמה

דרך נוספת להמחשת המצב הכיפלי היא הסכמה. המחשה זו מופשטת יותר מציור הקבוצות.

שימוש בסכמה דורש ידיעה של פעולת החיבור.

דוגמה לשימוש בסכימה:

12:3=4

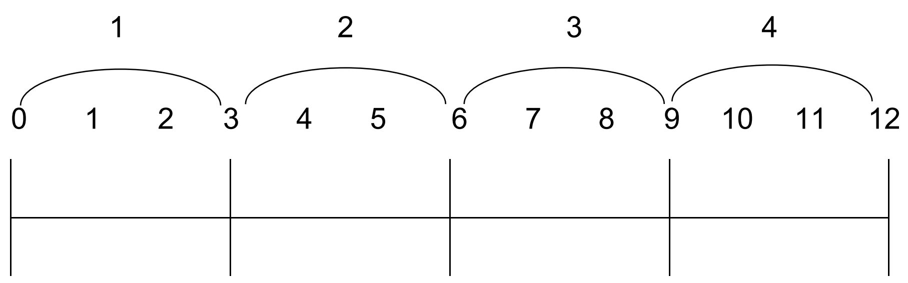
	12	
4	4	4

ישר המספרים

בתרגיל 12:3=4 קפיצות של 3 צעדים, כפי שמציין המחלק, משורטטות על ישר המספרים עד להגעה ל- 12 , הוא המחולק.

מספר הקפיצות מציין את המנה המתקבלת.

דוגמה לשימוש בישר המספרים:



<u>מניה בקפיצות</u>

אסטרטגיה זו זהה לפתרון בעזרת ישר המספרים אך דורשת יכולת מנייה בדילוגים על-פי המחלק עד למחולק.

12:3=4 גם באסטרטגיה זו נדלג לפי המספר המצוין במחלק (3) עד שנגיע למחולק (12) ונמנה את המספרים בסדרה (4).

דוגמה למניה בקפיצות:

3,6,9,12

1 2 3 4

<u>חיסור חוזר</u>

12:3=4

שימוש בחיסור חוזר לפתרון תרגיל החילוק דורש שליטה בפעולת החיסור ומניית הפעמים בהן חוּסר המספר 3 עד לאפס.

דוגמה לחיסור חוזר:

12-3-3-3-3=0

1 2 3 4

<u>ניסוי וטעיה</u>

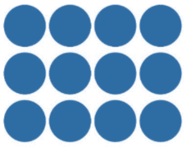
תלמיד שאינו שולט בעובדות הכפל אך יודע על הקשר בין המכפלה ושני גורמיה יכול להשתמש בניסוי וטעיה מושכלים.

לפתרון התרגיל: 12:3 יבדוק התלמיד את התרגיל: 12 = ? × 3.

מערך מלבני

חילוק במערך מלבני

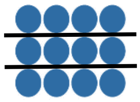
אחת ההמחשות למצב כיפלי היא המערך המלבני.



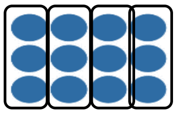
האיור שלפנינו מציג שלוש שורות בהן ארבע נקודות בכל שורה, או לחילופין ארבעה טורים בהם שלוש נקודות בכל טור.

מצב זה ממחיש היטב את חוק החילוף של פעולת הכפל.

בפעולת החילוק איור זה מאפשר לנו להציג חילוק לחלקים וגם חילוק להכלה בהתאם לשאלה הנשאלת.

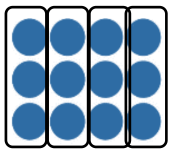


כדי להציג בעזרת איור את התרגיל 12:3 בהקשר של חילוק לחלקים, נמתח קוים בין שלוש השורות ונשאל: "כמה נקודות בכל שורה?"

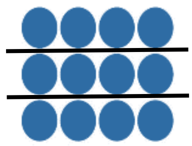


כדי לשאול שאלה בהקשר של חילוק להכלה, נשאל: "כמה טורים של 3 יש באיור?"

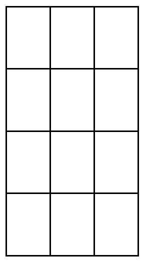
במודל המערך המלבני, הנקרא גם מודל השטח לכפל, מיוצגים 2 הגורמים של תרגיל הכפל כאורך ורוחב המלבן באופן המאפשר המחשה של חוק החילוף בכפל (3×4 = 4×3).



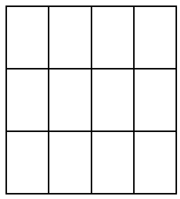
או



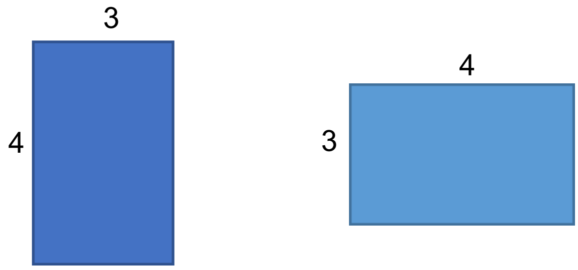
וגם



או



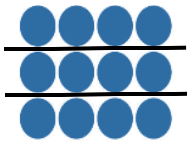
ובמודל מופשט יותר:



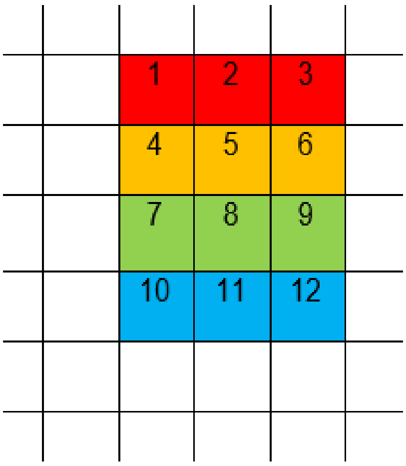
בבואנו לפתור תרגיל חילוק במודל המלבני ניקח פריטי מניה כמספר המציין את הכמות במחולק ונסדר אותו בשורות או טורים לפי הכמות המצוינת במחלק. מספר השורות/הטורים אותם הצלחנו לסדר הם המנה (קורן, 2002).

12:3

ניקח 12 עיגולים ונסדר אותם בשלוש שורות ונגלה כי 12 העיגולים מסתדרים ללא שארית בארבע שורות.



ניתן גם לצבוע שורות של 3 משבצות עד שנצבע בסך הכל 12 משבצות.



Graeber (1993) ממליצה להשתמש במודל זה במספרים שלמים כדי שתלמידים יבינו את המודל ויוכלו, בהמשך, להשתמש בו כראוי גם לטווח המספרים הרציונליים.

ההפך מתרגיל כפל

תלמיד השולט בעובדות הכפל יוכל להיעזר בתרגיל הכפל הידוע לו כדי לפתור את שני תרגילי החילוק הנובעים ממנו.

אם התלמיד יודע כי $3\times4=12$ וגם את הקשר בין המכפלה לגורמים, לא תהיה לו בעיה לפתור את שני תרגילי החילוק:

$$3x4=12$$

$$12:3=4 \qquad 12:4=3$$

קשיים בחילוק ושגיאות אופייניות

<u>שפת היום יום כמכשול</u>

אחת הסיבות לשגיאות בחילוק ובתחום המתמטיקה בכלל, היא הפער בין שפת היום יום לפעילות המתמטית התקנית. אנו נוהגים לומר "כפול ומכופל" בניסיון להדגים כמה הגדלנו דבר מה ולחילופין המילה חלק מוגדרת במילון כ"דבר שהופרד מן השלם"-התייחסות לחלק כמשהו קטן מן השלם ממנו הופרד (אבינאון,1997).

מכאן שקיים קושי לקבל את העובדה המתמטית שהכפל לא תמיד מגדיל והחילוק לא תמיד מקטין. חשוב לתת את הדעת לקושי זה כבר בשלבים הראשונים של למידת פעולות הכפל והחילוק (צמיר וברקאי, 2005). ראשית, יש להימנע מאמירה כגון "המחולק הוא תמיד המספר הגדול". אמירה זו אולי תסייע בשלבים הראשונים של הלמידה אך תהווה מכשול בהמשך. פעולות נוספות שניתן לעשות כדי לנסות להימנע משגיאות אלו הן משימות מחיי היום יום המדגימות את החילוק כמגדיל והכפל כמקטין. לדוגמה, ניתן לבקש לבדוק כמה שקיות יום הולדת נוכל למלא אם יש לנו 2 ק"ג ממתקים ובכל שקית ניתן להכניס רבע קילו ממתקים. מומלץ גם להפגיש את התלמידים עם משימות הממחישות מגמה של הגדלה או הקטנה ולשוחח על כך.

<u>דוגמה לפעילות הממחישה הגדלה והקטנה</u>

חשוב להשתמש בפריטי מנייה הניתנים לחלוקה בקלות (וופלים, עוגיות, דפי נייר ועוד...) לכל תלמיד יחולקו 6 ופלים וחבילת צלחות/קערות. נבקש ממנו לבדוק כמה צלחות צריך אם נניח 6 וופלים בכל צלחת. נתעד את הפעולה בתרגיל 6:6=1. לאחר מכן נשאל כמה צלחות צריך אם נניח 3 וופלים בכל צלחת. ונתעד את הפעולה בתרגיל 6:3=2. וכך הלאה נבדוק לגבי 2 וופלים בצלחת, וופל אחד וחצי וופל. על הלוח מוצג כעת תיעוד של כל התרגילים:

6:6=1

6:3=2

6:2=3

6:1=6

6:½=12

בשלב זה יש לקיים דיון ולהעלות שאלות כמו:

- מי המחלק שהמנה שלו קטנה מן המחולק?
- מי המחלק שהמנה שלו שווה למחולק?
- מי המחלק שהמנה שלו גדולה מן המחולק?

אפשר ורצוי לחזור על הדיון במשימות חלוקה אחרות שיהיו גם הן אותנטיות ומלוות בהמחשה בטווח מספרים אחר. ולהגיע לתיעוד של רצף תרגילי חילוק המזמנים שיח מתמטי סביב השאלות הנ"ל ואף להוסיף מצבים בהם המחלק גדול מן המחולק.

<u>הבנת מושג השארית</u>

התנסויות אינטואיטיביות הנובעות מחיי היום יום מאפשרות גם מפגש של התלמיד עם מושג השארית עוד לפני הלמידה הפורמלית. Li & Silver (2000) מצאו במחקרם שתלמידי כיתות ג' פתרו תרגילי חילוק עם שארית טוב יותר מתלמידי הכיתות הבוגרות השולטים במיומנות החילוק הארוך. תלמידי כיתות ג' שלא למדו עדיין את הפרוצדורה של החילוק הארוך, עשו זאת על ידי שימוש במודל מוחשי יותר לחילוק תוך התייחסות להקשר בבעיה שהוצבה בפניהם. החוקרים גילו כי ילדים צעירים פותרים תרגילי חילוק עם שארית בעזרת מניה בקפיצות (גישה חיבורית) או על ידי מציאת המכפלה הקרובה (גישה כיפלית) והתייחסותם לשארית הייתה כעודף של פריטים או שארית של דבר מה בהקשר לבעיה הנתונה (Li & Silver, 2000).

לדוגמה:

27:4=

<u>בגישה החיבורית</u> נבצע מנייה בקפיצות של 4 עד שלא נוכל יותר להוסיף רביעייה:

0,4,8,12,16,20,24

אם נקפוץ עוד 4 נחלוף מעבר ל -27 ולכן 27:4 הוא 6 (מספר הקפיצות בין מספר למספר) ושארית של 3 כי יש להוסיף עוד 3 כדי להגיע מ - 24 ל -27.

מקורות לשגיאות תוך שימוש בגישה החיבורית ללא המחשה הם טעויות חישוביות ו/או זיהוי שגוי של המנה או של השארית הנדרשת.

דוגמה לטעות חישובית:

בתרגיל הנתון 27:4 יטעה הילד בפעולת החיבור ויגיע לכפולת 4 שגויה

למשל: 0,4,8,13,17,21,25 הילד שגה בקפיצה השלישית וב-8 חיבר 4 והגיע ל-13 במקום ל12 ומכאן נוצרו טעויות גם במנה וגם בשארית.

באותו התרגיל 27:4 יכול הילד לטעות במניית מספר הקפיצות ויספור את המספרים המופיעים בסדרת הקפיצות. למשל בסדרת המספרים הנתונה:

0,4,8,12,16,20,24

ימנה הילד את המספרים במקום את הקפיצות ויסיק בטעות כי המנה היא 7.

<u>בגישה הכיפלית</u> נזהה את הכפולה הקרובה ביותר הלוא היא 24 (6×4) ושוב שארית 3 מאותה סיבה כמו בגישה החיבורית.

מקור לשגיאה תוך שימוש בגישה הכיפלית ללא המחשה הוא הקושי לזהות את המכפלה הקרובה. ילדים נוטים לבחור את המכפלה הקרובה ביותר גם אם היא גדולה יותר מן המחולק. בתרגיל 27:4 ילד עלול לבחור את 28 כמכפלה הקרובה כי 28 קרוב יותר ל-27 מ- 24. גם בגישה זו עלולה ליפול טעות בגלל זיהוי שגוי של המנה או של השארית הנדרשת.
המחשה בחפצים או בציור יכולה לסייע בהבנת הבעיה ופתרונה.

דוגמה לפעילות הממחישה חילוק עם שארית

חשוב להשתמש בפריטי מנייה שאינם ניתנים לחלוקה (חרוזים, קלפים, צעצועים ועוד...).
נחלק את הכיתה לקבוצות בעלות מספר משתנה של ילדים (משני ילדים בקבוצה ,3, 4, 5 וכך הלאה). לכל קבוצה יחולקו 8 קלפים והם יתבקשו לחלק את הקלפים באופן שווה ביניהם.
בסיום החלוקה ייערך תיעוד בעל פה של הפתרונות השונים, תוך כדי תיעוד פורמלי של המורה באופן הדרגתי על לוח הכיתה:

8:2=4

8:3=2(2)

8:4=2

8:5=1(3)

8:6=1(2)

8:7=1(1)

8:8=1

בשלב זה יש לקיים דיון ולהעלות שאלות כמו:

- מי המחלק שהמנה שלו היא ללא שארית?
- מי המחלק שהמנה שלו היא עם שארית?

אפשר ורצוי לחזור על הדיון במשימות חלוקה אחרות שיהיו גם הן אותנטיות ומלוות בהמחשה בטווח מספרים אחר. ולהגיע לתיעוד של רצף תרגילי חילוק המזמנים שיח מתמטי סביב השאלות הנ"ל.

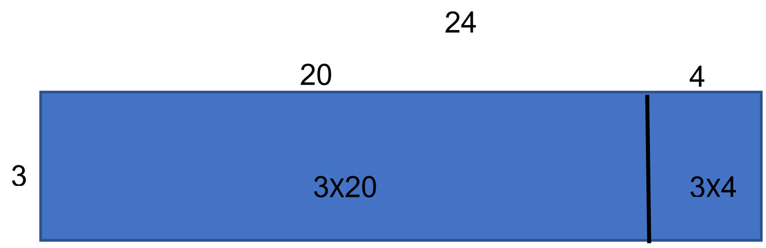
חוק הפילוג

שימוש בחוק הפילוג במסגרת פעולת החילוק, מהווה מכשול לילדים רבים.
אחד הקשיים הוא זיהוי המספר המתפלג. את מי מבין המספרים בתרגיל מותר לפלג? המחולק או המחלק? האם את שניהם? הלוא בפילוג בפעולת הכפל ניתן לפלג כל אחד מחלקי התרגיל. יכולת זו נובעת מחוק החילוף המתקיים בפעולת הכפל. אך כידוע חוק החילוף אינו מתקיים בפעולת החילוק ולכן האפשרות לפלג את שני המספרים בתרגיל לא מתקיימת בפעולה זו.

קושי נוסף הוא בפילוג עצמו. כיצד יש לפלג את המחולק? ילדים רבים נוטים לפלג על פי עקרון המבנה העשרוני. דוגמה לכך בתרגיל 72:3: המחולק 72 יפולג ל: 70+2 אך מספרים אלו אינם כפולות של 3 ולכן פעולת הפילוג אינה יעילה ותוביל לחישוב מוטעה.

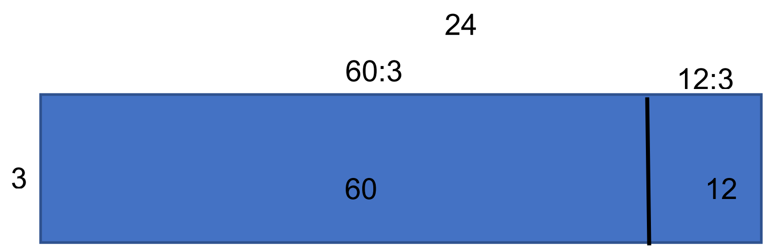
בדומה להתנסויות הטבעיות בחילוק עם או בלי שארית, גם בחוק הפילוג נדרשת התנסות קודמת ללמידה הפורמלית. ראשית בבעיה מילולית מחיי היום יום ובהמשך בעזרת המחשה במודל כלשהו. הלמידה הפורמלית צריכה להתרחש לאחר התנסויות אלו.

אחד המודלים השכיחים ביותר להמחשת חוק הפילוג הוא המערך המלבני. ראשית במשמעות הכיפלית.



3×24=3×(20+4)=3×20+3×4=60+12=72

ובהמשך בחילוק:



72:3=(60+12):3=60:3+12:3=20+4=24

הבנת חוק הפילוג בחילוק מסייעת להבין את פעולת החיבור בשברים פשוטים עם מכנה משותף שהרי קיים שם פילוג במחולק, הלוא הוא המונה בשבר הפשוט (קופרמן, 2011).

דוגמה:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}$$

יותר מורכבת מכך היא ההבנה שאין אפשרות לחבר שברים פשוטים שמכניהם אינם משותפים על ידי חיבור פשוט, כי הרי חוק הפילוג אינו חל על המחלק. הלוא הוא המכנה בשבר הפשוט (קופרמן, 2011).

דוגמה:

$$\frac{4}{3+6} \neq \frac{4}{3} + \frac{4}{6}$$

<u>המעבר מהתנסות אינטואיטיבית לייצוג מופשט</u>

התלמידים התנסו בפעולת החילוק באופן אינטואיטיבי עוד לפני למידת הפעולה בכיתה. הם עשו זאת ללא צורך בהבנת המבנה העשרוני ובעזרת אסטרטגיות לא פורמליות. יש לנצל את ההתנסויות האינטואיטיביות להבנת ההקשרים של הפעולות הנדרשות לצורך למידת האלגברה בהמשך. ניצול יכולתו הטבעית של הילד מתוך חיי היום יום שלו והתנסות בביטויים שקולים תוך שימוש בשפה מתמטית נכונה ותואמת לביטויים אלו עשויים לסייע בכך. שימוש בחוק הפילוג במספרים השלמים תוך הצגת כל הביטויים השקולים האפשריים היא דרך מומלצת להכנת התלמידים ללימודי האלגברה (אוברמן, 2013).

$(x+y):2=x:2+y:2$

שגיאות אופייניות לתלמידים בכיתות א'-ב'

<u>ביצוע פעולה אחרת</u>

תלמיד שאינו מבין את משמעות פעולת החילוק ולא מצליח לייצר לעצמו מודל מוחשי לחישוב הפעולה, עלול לבצע פעולת חיסור במקום או כל פעולה אחרת המוכרת לו יותר. שגיאה זו עלולה להופיע בתרגיל וגם בהקשר של בעיה מילולית שפעולת החילוק הנדרשת בה לא נהירה לתלמיד. במצבים אלו רצוי לחשוף את התלמיד למגוון של מודלים ואסטרטגיות להמחשת פעולת החילוק ולאפשר לו להשתמש בהם. תחילה חשיפה למודלים מוחשיים בעזרת אביזרים קיימים (פריטי מנייה שונים) ובהמשך מודלים יותר מופשטים (מאיור קבוצות ועד שימוש בציר המספרים או מנייה בקפיצות ועוד...).

<u>קריאת תרגיל מימין לשמאל</u>

כאשר תלמיד נדרש להשלים חלק מתרגיל הכתוב באופן לא סטנדרטי. תלמידים רבים נוטים לקרוא את התרגיל הפוך מן המקובל.

דוגמאות:

$\boxed{} : 6=3$

תלמידים רבים יקראו את התרגיל מימין לשמאל ויפתרו את התרגיל 6:3 במקום לחפש את המכפלה של 6 ב- 3 כדי למצוא את המחולק.

$2 = \boxed{} : 8$

גם במצב כזה נוטים תלמידים רבים לקרוא את התרגיל מימין לשמאל ולחפש את המחלק של 8 שהמנה המתקבלת היא 2 במקום לחפש את המחולק המתקבל מהתרגיל 8×2 ולכן יגיעו לתוצאה השגויה 4.

בתרגילים בהם המספרים אינם מסתדרים תינתן פעמים רבות התשובה: "אי אפשר לפתור". בדרך כלל תהא הסיבה לכך - הקריאה מן הכיוון הלא נכון. במצב שכזה, על המורה, ראשית לבקש מהתלמיד לקרוא בעצמו את התרגיל ולאחר שנמצא הקושי בכיוון הקריאה, להזכיר לו את כיוון קריאת המספרים בחשבון.

<u>טעות חישובית</u>

שימוש לקוי במודל מוחשי כלשהו או חוסר שליטה בעובדות הכפל עלולים לגרום לטעויות חישוביות. תלמידים כאלה זקוקים למודל מוחשי יותר מזה שעבדו בו.

<u>חילוק עם המספרים 0 או 1</u>

תלמידים נוטים לבלבל בין הקורה בפעולות השונות עם המספרים 0 ו- 1.
העובדה שחיסור באפס משאיר את המספר כפי שהוא לעומת החילוק באחד שגם הוא משאיר את המספר זהה גורמת לבלבול, בעיקר אצל תלמידים שאינם מבינים את משמעות החיסור והחילוק במספרים אלו ומסתמכים על הזיכרון. תלמידים אלו יטעו לחשב תרגילים כמו 0:5 ויכתבו שהמנה היא 5 כי המספר נשאר אותו דבר. או תרגיל כמו 5:1 ייפתר על ידי מתן התשובה 1.

<u>שימוש שגוי בחוק בחילוף</u>

בפתרון תרגילי חילוק עם נעלם עלול התלמיד להשתמש בחוק החילוף המוכר לו בכפל לשם פתרון התרגיל בחילוק.

דוגמה:

$\boxed{} : 2 = 8 \Rightarrow 8:2=4$

שימוש שגוי בחוק הפילוג

השימוש בחוק הפילוג בכיתה ב' הוא שימוש אינטואיטיבי. תלמידים, בעלי חוש למספרים בדרך כלל, יפתרו תרגיל כמו 8×6 בדרך של חישוב בעל פה על ידי פילוג. הם יפלגו את ה- 8 לפעמיים 4 או את ה- 6 לפעמיים 3. מתוך הבנה שהכפל הוא פעולה הפוכה לחילוק יבצעו פילוג גם בתרגיל ההפוך 56:8 וכאן עלולים הם לטעות. שכן חוקי הפילוג בכפל שונים מחוקי הפילוג בחילוק.

פירוק המחולק באופן שגוי

כאשר תלמיד נדרש לפרק את המחולק לשם שימוש בפילוג, עליו להחליט כיצד לפרק אותו. ראשית עליו להיות מודע לפירוק לשני מחוברים ובהמשך לתת את הדעת לכך שכל מחובר צריך להיות כפולה של המחלק. בכל אחד מן השלבים יכול הוא לטעות. במקום לפרק את המחולק לשני מחוברים עלול הוא לפרק את המחולק לשני גורמים. 72:3 המחולק 72 יפורק לגורמים 24,3 ומוביל לפילוג השגוי 24:3+3:3. פירוק שגוי נוסף עלול להיות פירוק לפי המבנה העשורי 72 יפורק ל70+2 שהם מחוברים שאינם מתחלקים במחלק 3. טעות נוספת יכולה להיות חלוקה עם טעות חישובית כלשהי שאינה מסתכמת למחולק 72.

פירוק המחלק במקום המחולק

שימוש שגוי בחוק הפילוג עלול להוביל למצב בו המחלק מפורק במקום המחולק ומוביל ביטוי שאינו שקול: 48:4+48:4≠48:8.

יישום: משימות לקידום הבנת המשמעויות ויכולת השליפה בכיתה

בכל כיתה יש רמות שונות של יכולת למידה, מוטיבציה, רמת קשב וידע. אנו, כמורים, צריכים לקחת בחשבון (תרתי משמע...) את הפערים וההבדלים הללו וליצור עבור התלמידים משימות שתתאמנה לכל הילדים.

ההבדלים ביכולת התלמידים יבואו לידי ביטוי, בין היתר, ברמת הידע, איכות הקשב, מהירות התשובה ורמת החשיבה. כדאי גם לציין שרמתו של ילד כלשהו אינה אחידה לאורך זמן, היא משתנה מיום אחד לאחר, ולעיתים אף משתנה בעקבות שעת השיעור וכדומה. יש אינסוף נסיבות וגורמים מתערבים המשפיעים על רמת הלמידה והביצוע של התלמידים . יכולת התלמיד ברגע נתון אינה מבוססת רק על ידע קודם, רמת האינטליגנציה או כישורים מולדים. היא מורכבת גם מרמת העייפות באותו שיעור, פניות רגשית, מוסחות, מוטיבציה, חרדה, חסך בשל היעדרות בשיעור הקודם ועוד ועוד.

ההבנה כי רמת התלמידים אינה אחידה מחייבת משימות מותאמות, כאלה הכוללות רמות קושי שונות לבחירה (לבחירת המורה או התלמיד- אפשר כך ואפשר אחרת). בצורה כזו גם ילד שאינו בקיא מספיק בחומר יוכל להשתתף ואף להצליח, וזאת במקביל לילד ששולט בחומר ומוצא אף הוא את הרמה המתאימה לו ומאתגר את עצמו בפתרונה.

רמות קושי יכולות לבוא לידי ביטוי בהיבטים שונים:

1. רמת קושי שבאה לידי ביטוי ב**טווח המספרים**. לדוגמה, חילוק בתחום ה-20/ה-100/ה-1000...

2. רמת קושי הבאה לידי ביטוי ב**רמת החשיבה** הנדרשת. לדוגמה: שאלות או משימות הבודקות ביצוע חישובים תקודדנה כמשימות מסוג חשיבה אלגוריתמית שאלות שבהן מתבקש הילד לקשר בין מושגים או שאלות הבודקות יכולת לפתור את השאלה בדרכים המבוססות על תובנה חשבונית תקודדנה כשאלות מסוג חשיבה תהליכית (יישום תובנה חשבונית). שאלות הדורשות מהילד ניתוח של השאלה, חיפוש פתוח למציאת דרך לפתרון, חקר והנמקה, פתרון בעיות חקר, ניסוח הנמקות באופן מילולי או מתמטי תקודדנה כחיפוש פתוח.

חשוב לציין כי רמת הקושי של משימה נקבעת גם על פי **הכרות** הילד עם המשימה.

3. רמת קושי הבאה לידי ביטוי ב**<u>סוג בשאלה</u>**. לדוגמה: פתוחה/סגורה/ חקר/ בעלת פתרון אחד/ בעלת פתרונות מרובים.
4. רמת קושי הנובעת מ**<u>מידת ההמחשה</u>** הנלווית לפתרון. לדוגמה: שאלה הכוללת עזרים מוחשיים לפתרון/שאלה המאפשרת המחשה באמצעות ציור/חישוב בעל פה...

לכל נושא שנלמד או נתרגל ניתן לייצר רמות שונות של תרגילים או משימות. עלינו כמורים לאפשר את הרמות השונות בכדי להתאימן באופן נכון לתלמיד שמולנו. מטרתנו שהמשימה לא תהיה קלה מדי, אלא מאתגרת, אך גם לא קשה מדי, כדי שלא תעורר תסכול.
נציג כעת הצעות לפעילויות. לכל פעילות תינתנה שתי רמות קושי, בכל אחד מההיבטים שצוינו: טווח המספרים, רמת החשיבה, סוג השאלה ומידת ההמחשה.

מיותר לציין, שישנן כמובן רמות קושי נוספות, קלות יותר או פחות. הרמות המובאות הן רק דוגמאות ליכולת ליצור רמות קושי שונות בכל נושא ומשימה.

פעילות 1– חילוק לחלקים

מבוסס על הספר ***The doorbell rang***[1] מאת Pat Hutchins.

/https://slideplayer.com/slide/763974

ציוד לפעילות:

לכל תלמיד 12 צלחות ו- 12 עוגיות-ראה נספח 3

דפי תיעוד – ראה נספח 1 ונספח 2

מטרות פדגוגיות:

1. תרגול פעולת החילוק
2. התנסות באסטרטגיות שונות לחלוקה לחלקים בעזרת המחשה.
3. עבור רמה 2 - הכרת תכונות מחלקים (קטן מהמחולק)
4. עבור רמה 3 – הכרת קשר בין מחולק ומספר מחלקים (המחולק הוא כפולה של המכפלה המשותפת המינימלית)

ידע קודם נדרש:

יכולת המניה היא היכולת הבסיסית הנדרשת לחלוקה שווה של כמות כלשהי. ילדים מחלקים ביניהם באופן שווה עוגיות, סוכריות, קלפים ועוד כבר בגן הילדים.

מהלך הפעילות:

הפעילות תתבצע בעזרת מצגת או תוך כדי סיפור בעל פה. הסיפור ממחיש חלוקה של כמות בדידה בכל פעם למחלק אחר. המחולק בסיפור הוא 12 העוגיות שאמא אפתה. המחלקים משתנים על פי מספר הילדים המגיעים בכל פעם לביתם. בעזרת חילוק לחלקים מתבקשים התלמידים למצוא כמה עוגיות יקבל כל ילד, בכל פעם על פי מספר הילדים המשתנה.
המורה תציג את הסיטואציה והילדים יתבקשו להכין את הצלחות בהתאם למספר הילדים באותה עת. במהלך הפעילות יש לדון באסטרטגיות החילוק השונות (חלוקה של הכמות כולה למספר קבוצות לפי המחלק, חלוקה של עוגייה לכל ילד עד שנגמר, ניסוי וטעיה ועוד...).

"אמא הכינה 12 עוגיות ליובל ורוני"

כמה עוגיות יקבל כל ילד?

האיור לקוח מתוך הספר ***The doorbell rang***[1] מאת Pat Hutchins.

[1] רעיון דומה ניתן למצוא גם בחומרים של ברנקו וייס

"שוב צלצל הפעמון ולבית נכנסו גאיה ושחר"

כמה עוגיות יקבל כל ילד כעת?

"שוב צלצל הפעמון ולבית נכנסו ניצן ודניאל"

כמה עוגיות יקבל כל ילד כעת?

"שוב צלצל הפעמון ולבית נכנסו גל, דפנה, עומר, רביב, איתי ושרון"

כמה עוגיות יקבל כל ילד כעת?

"שוב צלצל הפעמון... בבית ילדים המון... הפעם נכנסה סבתא ברכה ובידה מגש גדול - בתיאבון".

ניתן כמובן להחליף את העוגיות והצלחות להצגת הסיפור על ידי "שחקנים" מהכיתה תוך שיתוף שאר ילדי הכיתה בפתרון הסיטואציות בסיפור. או להחליף את אמצעי ההמחשה לדפים ריקים ומדבקות להדביק על פי המצבים המוצגים או ל- דף עוגיות גזורות כתחליף לעוגיות אמתיות.

שיעור ההמשך יתבצע בהתאם לרמת התלמידים ויכולתם.

רמת קושי שבאה לידי ביטוי בטווח המספרים:

רמה 1:

החלוקה הנדרשת היא של מספר עוגיות בטווח ה-25 ("סבתא הביאה איתה עוד 12 עוגיות...").

שינוי המחולק מאפשר לתלמידים להשתמש באסטרטגיות החילוק השונות אליהן נחשפו בפעילות הראשונה.

רמה 2:

החלוקה הנדרשת היא של מספר עוגיות בטווח ה-100 ("סבתא הביאה איתה עוד 48 עוגיות..").

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת:

רמה 1:

חשיבה אלגוריתמית – חישוב כמה עוגיות יקבל כל ילד.

רמה 2:

חשיבה אלגוריתמית - סבתא הביאה מספר עוגיות קטן מ-21.

כמה עוגיות יכולה סבתא לחלק ללא שארית לשלושה ילדים?

כמה עוגיות יכולה סבתא לחלק ללא שארית לארבעה ילדים?

כמה עוגיות יכולה סבתא לחלק ללא שארית לחמישה ילדים?

כמה עוגיות יכולה סבתא לחלק ללא שארית לשישה ילדים?

חשיבה תהליכית - מה משותף לכל המספרים הללו?

רמה 3:

חיפוש פתוח - בסוף הסיפור סבתא הגיעה עם עוד עוגיות. חישבו על עוד שלוש אפשרויות למספר העוגיות שיכלה להביא סבתא, ללא שתוותרנה עוגיות מיותרות? (12,24,36...)

מה מאפיין את כל המספרים הללו? (כולם כפולות של 12, שהיא המכפלה המשותפת המינימלית של הגורמים הנתונים)

רמת קושי הבאה לידי ביטוי בסוג בשאלה:

רמה 1:

חילוק ללא שארית.

רמה 2:

מספר הילדים אינו גורם של המחולק - "איך נחלק 12 עוגיות לחמישה ילדים?"

(חילוק עם שארית).

רמת קושי הנובעת ממידת ההמחשה:

רמה 1:

שימוש בעוגיות אמתיות או כפתורים כמייצגי כמות.

רמה 2:

היעזרות בדף העוגיות כהמחשה לחלוקת השלם באופן שווה.

פעילות 2 – חילוק להכלה

<u>מספר המשתתפים:</u>

2-4 משתתפים

<u>תכולת המשחק:</u>

- 12 פריטי מנייה קטנים
- קוביית משחק שעל המספר 5 מודבקת מדבקת "בונוס"
- תבנית ביצים (12) ריקה לכל משתתף
- 12 קלפי הצלחה -ראה נספח 4

מטרות פדגוגיות:

1. תרגול חילוק להכלה ללא שארית
2. - תרגול חילוק להכלה **עם שארית** (ראה פרוט ברמות)

<u>ידע קודם נדרש:</u>

גם במשחק זה נדרשת מניה בסיסית לצורך חלוקה שווה של פריטים. יחד עם זאת נדרש כאן ניסיון בחלוקה כדי להצליח בהשערה לגבי מספר השקעים שיידרשו.

<u>המטרה המשחקית:</u>

לאסוף כמה שיותר קלפי הצלחה.

<u>קשיים צפויים:</u>

עלול להיווצר בלבול בתפקיד המספר המצוין בקובייה, ובמקום להניח את הכמות המצוינת יחלק התלמיד חלוקה לחלקים ויכריז על מספר פריטי המניה בכל שקע במקום על מספר השקעים. במקרה כזה רצוי לתרגל עם התלמידים את הפעולה הנדרשת לפני המשחק.

<u>מהלך המשחק:</u>

כל אחד בתורו מטיל את הקובייה ומכריז בכמה "שקעים" הוא עומד להשתמש כדי לחלק את כל 12 הפריטים שבידו במחלק המצוין על הקובייה שהטיל.

דוגמה: לשחקן הראשון הראתה הקובייה את המספר 4, 3= 12:4 לכן על השחקן להכריז על המספר 3 ולבצע את החלוקה.

אם צדק הוא לוקח קלף הצלחה. אם טעה התור עובר לשחקן הבא.

לשחקן השני הראתה הקובייה את המספר 2.

6 = 12:2 לכן עליו להכריז 6 ולבצע בפועל את החלוקה.

אם הקובייה נפלה על מדבקת הבונוס המשתתף בוחר את המחלק בעצמו.

מנצח: זה שבידו כמות גדולה יותר של קלפי הצלחה.

דוגמאות לקלפי הצלחה:

דוגמאות לשתי רמות קושי בכל היבט:

רמת קושי שבאה לידי ביטוי בטווח המספרים:

רמה 1:

החלוקה הנדרשת היא של המספר 12.

רמה 2:

החלוקה הנדרשת היא של 24 או 36 פריטי מנייה.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת:

רמה 1:

חשיבה אלגוריתמית – חישוב המחולק/המנה.

רמה 2:

תובנה חשבונית - נשאל איזה מספרים נכתוב על קוביית המשחק אם נשחק עם תבנית ביצים של 20 ביצים (ונרצה לתרגל חילוק ללא שארית).

רמת קושי הבאה לידי ביטוי בסוג המשימה:

רמה 1:

חילוק ללא שארית.

רמה 2:

חילוק עם שארית, נשאיר את הספרה 5.

רמת קושי הנובעת ממידת ההמחשה:

רמה 1:

שימוש בתבנית ביצים המאפשרת חלוקה מוחשית.

רמה 2:

להסתפק בהכרזה קולית של מספר ה"שקעים" הנדרש.

פעילות 3 - חילוק בציר המספרים

http://ymath.haifa.ac.il/images/stories/part4/archive/games/game66/game66b.pdf

מספר המשתתפים:

2 משתתפים

תכולת המשחק:

- לוח משחק מנוילן - ראה נספח 5
- טוש מחיק

מטרות פדגוגיות:

1. זיהוי שלשות כפליות
2. תרגול חילוק ללא שארית (בניית תרגיל, לא רק חישוב מנה)
3. פיתוח חשיבה אסטרטגית

ידע קודם נדרש:

שליפת עובדות החילוק בטווח המספרים המופיע בציר.

המטרה המשחקית:

יצירת רצף של ארבעה סימונים על ישר המספרים.

מהלך המשחק:

כל שחקן בתורו מכריז על שני מספרים הנמצאים על ציר המספרים, יוצר מהם תרגיל חילוק ומסמן בעיגול את המנה המתקבלת בציר המספרים.

ניתן להשתמש בכל שלב בכל המספרים המסומנים על הציר.

מטרתו של כל שחקן היא יצירת רצף של ארבעה סימונים רצופים על הציר ובמקביל עליו לנסות לחסום את השחקן השני מליצור רצף כזה.

שחקן שבחר שני מספרים שהמנה המתקבלת מהם אינה נמצאת על הציר או שטעה בחישוב מאבד את תורו.

<u>שאלות לדיון בתום המשחק:</u>

- באילו אסטרטגיות נקטתם כדי לנצח במשחק?
- האם יש יתרון לשחקן המתחיל ראשון?
- איך עצרתם את חברכם מליצור רצף ולהתקדם במשחק?
- האם יש מקומות טובים יותר להתחיל בהם ברצף? ומקומות שלא רצוי להתחיל בהם?
- אילו פעולות ביצעתם כשרציתם להתקדם מימין לשמאל בציר? וההפך?
- האם ניתן להקיף במעגל את כל המספרים על הציר? הסבירו כיצד ניתן לדעת?
- כמה מספרים לכל היותר ניתן להקיף במעגל?
- במידה והשחקנים לא הצליחו ליצור רצף של ארבעה סימונים – האם הרחבת הציר תאפשר לכם לנצח במשחק?

<u>גיוון:</u>

ניתן לגוון ולשחק את המשחק לא על דף אלא בדרכים אקטיביות יותר כמו למשל:

- תליית ציר המספרים על קיר פעיל כאשר הסימון הוא על ידי כפתורים גדולים עם סקוצ'ים.
- ציור ציר המספרים על הלוח, ותלמידים מוזמנים לבוא ולסמן על הלוח.

דוגמאות לשתי רמות קושי בכל היבט:

רמת קושי שבאה לידי ביטוי בטווח המספרים:

רמה 1:

ישר מספרים הכולל טווח 1-10 ובו השנתות הן במרווח 1.

רמה 2:

ישר מספרים בטווח גדול יותר (1-20; 1-50) ובו השנתות הן במרווח 1.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת:

רמה 1:

מתן אפשרות ליצירת שלשות כפליות ללא סייגים. כולל שימוש חוזר במספר כלשהו בתרגיל.

לדוגמה: 5:1=5 או 2:2=1 או אפילו 1:1=1 .

רמה 2:
במטרה לעודד חשיבה על תכונות חלוקה והבדלים בין המחלק, המחולק והמנה, בפרט הייחודיות של חלוקה ב-1 ניתן לבקש יצירת שלשות כפליות ללא שימוש חוזר במספרים. כלומר דרישה שהמנה תהיה שונה מהמחלק והמחולק.
במקרה זה המטרה הפדגוגית תורחב גם לחשיבה על תכונות חלוקה והבדלים בין המחלק, המחולק והמנה, בפרט הייחודיות של חלוקה ב-1.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת בשאלה:

רמה 1:
חשיבה תהליכית תובנה - האם ניתן להקיף במעגל את כל המספרים על הציר? הסבירו כיצד ניתן לדעת?

רמה 2:
חיפוש פתוח והנמקה- באילו אסטרטגיות נקטתם כדי לנצח במשחק?

רמת קושי הבאה לידי ביטוי בסוג בשאלה:

רמה 1:
שאלה סגורה כמו: מהם התרגילים האפשריים לצורך סימון המספרים הגדולים בציר המספרים? (חלוקה של המספר ב1)

רמה 2:
שאלה פתוחה כמו: איך עצרתם את חברכם מליצור רצף ולהתקדם במשחק?
לשאלה זו יש תשובות רבות אפשריות לתיאור האסטרטגיה (אם יש כזו) של התלמיד.
שאלה כללית יותר כפי שציינו קודם יכולה להיות - מהי האסטרטגיה בה השתמשתם על מנת לנסות לנצח במשחק?

רמת קושי הנובעת ממידת ההמחשה:

רמה 1:
לתלמיד ניתנת ערכה מוחשית לעזרה בחישוב פעולת החילוק- מקלות/קוביות/פקקים/מדבקות או לוח הכפל...

רמה 2:
התלמיד עונה ללא אמצעי עזר או המחשה ומסמן על ציר המספרים רק את המנה.

פעילות 4 - שלשה בשורה (עמוד 7)

על בסיס המשחק ארבע בשורה נשחק **שלושה בשורה**.

<u>מספר המשתתפים:</u>

2 משתתפים

<u>מטרות פדגוגיות:</u>

1. תרגול בנייה של מכפלות
2. תרגול חילוק ללא שארית
3. פיתוח חשיבה אסטרטגית

<u>ידע קודם נדרש:</u>

שליטה בעובדות הכפל, הבנת הקשר בין הכפל לחילוק.

<u>המטרה המשחקית:</u>

יצירת רצף של שלוש דיסקיות שלהן קשר כפלי.

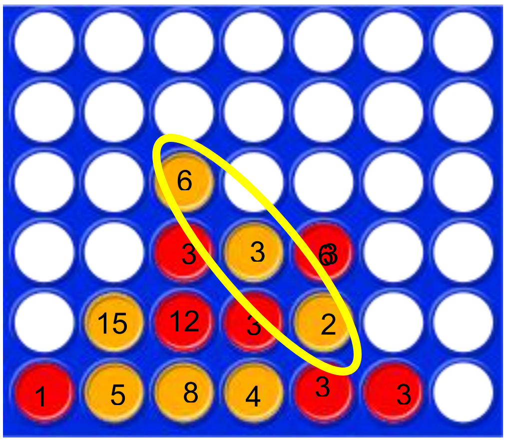
<u>מהלך המשחק:</u>

לכל משתתף דיסקיות בצבע אחר עם מספרים עליהם.

המספרים על הדיסקיות הוא 0 עד 10 (כמה מכל ספרה) וכל המכפלות בלוח הכפל של 10X10 עד 36 (אפשר כמובן גם טווח אחר של מספרים או מכפלות).

הראשון שמצליח ליצור רצף של שלוש דיסקיות שעליהן שלושה מספרים היוצרים קשר כיפלי (כמו 2,5,10 למשל) ומכריז על תרגיל חילוק (כמו 10:5=2 או 10:2=5) - מנצח.

לדוגמה:



דוגמאות לשתי רמות קושי בכל היבט:

רמת קושי שבאה לידי ביטוי בטווח המספרים:

רמה 1:

המספרים על הדיסקיות הם 0 עד 10 (5 דיסקיות מכל ספרה) והמכפלות בלוח הכפל של 10X10 עד 36 . מאפשר קשר כיפלי כמו 2,5,10 או 3,3,9 ועוד...

רמה 2:

המספרים על הדיסקיות הם 3,4,6,7,8,9 (5 דיסקיות מכל ספרה) וכל המכפלות הרלוונטיות לגורמים. מאפשר קשר כיפלי כמו 4,6,24, 8,3,24 או 3,3,9 ועוד...

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת:

רמה 1:

חשיבה אלגוריתמית– חישוב התרגילים בעת המשחק.

רמה 2:

חשיבה תהליכית תובנה - נשאל לגבי מצבים בהם מתקיים רצף של שני מספרים והמספר השלישי אינו חד משמעי. למשל 6, 3. ליצירת שלשה עם קשר כיפלי קיימות שתי אפשרויות 2 וגם 18.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי בסוג בשאלה:

רמה 1:

שאלה סגורה: מהם תרגילי החילוק המופיעים על גבי לוח המשחק?

רמה 2:

שאלה פתוחה: כיצד נוכל להגדיל את האפשרויות לקשר כפלי במשחק זה? (תשובות אפשריות: להוסיף דיסקיות עם ספרות דומות/להגדיל את טווח המכפלות/להגדיל את מספר הגורמים המוצעים...)

רמת קושי הנובעת ממידת ההמחשה:

רמה 1:

הסתייעות בלוח הכפל למציאת קשרים כפליים.

רמה 2:

חישובים בעל פה.

פעילות 5 - מפלצות החילוק

משחק זה מתרגל את עובדות החילוק ומחזק את הקשר בין הגורמים למכפלה.

מספר המשתתפים:

2 משתתפים

תכולת המשחק:

שלשות של דסקיות עליהן משורטטות תמונות של "מפלצות".

רצוי ליצור אבחנה ביניהן על ידי איורים שונים של מפלצות (ראה נספחים 6, 8, 10).

לוח משחק אחד - יש לבחור את הרמה הרצויה (ראה נספחים 7, 9, 11).

מטרות פדגוגיות:

1. בניית תרגילי חילוק ללא שארית.
2. חיזוק הבנת הקשר בין הגורמים למכפלה.
3. פיתוח חשיבה אסטרטגית

ידע קודם נדרש:

שליטה בעובדות החילוק או שליטה בעובדות הכפל עם הבנת הקשר בין כפל וחילוק. הכרת המחלקים השונים של המכפלה הנתונה.

המטרה המשחקית:

מציאת קשרים כפליים בין המספרים ויצירת כמות גדולה ככל הניתן של שלשות המקיימות תרגילי חילוק.

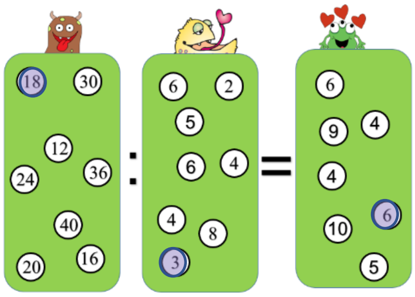
מהלך המשחק:

שני השחקנים מטילים קובייה. השחקן שהטיל את התוצאה הגבוהה ביותר מתחיל. השחקן הראשון, מניח 3 דסקיות מאותו סוג על שלושה מספרים בכל אחד מחלקי הלוח תוך כדי יצירת תרגיל נכון של חילוק. המשתתף הבא יכול להניח דסקיות רק במקומות הפנויים, שלא מונחות עליהם עדיין דסקיות. מנצח, המשתתף שהצליח לצבור כמות גדולה יותר של שלשות בעזרת תרגילי חילוק נכונים (ללא שארית).

בדוגמה הונחו דסקיות על המספרים

18,3,6

כלומר: 18:3=6



דוגמאות לשתי רמות קושי בכל היבט:

רמת קושי שבאה לידי ביטוי בטווח המספרים:

רמה 1:

מצומצם לכפולות זוגיות: 2,4,6,8,10.

רמה 2:

כל טווח המכפלות עד 100 בלוח הכפל.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת:

רמה 1:

חשיבה אלגוריתמית – מציאת השלשות הנכונות

רמה 2:

חשיבה תהליכית ותובנה - דיון לגבי אסטרטגיות המשחק (מהן המכפלות מהן רצוי ל"היפטר" בהקדם ואילו מכפלות מאפשרות לנו מגוון של פתרונות)

רמת קושי הבאה לידי ביטוי בסוג בשאלה:

רמה 1:

פתרון אחד - הנחת שתי דסקיות ושאלה לגבי הדסקית השלישית

רמה 2: פתרונות רבים-

הנחת דסקית אחת ושאלה לגבי שתי הדסקיות הנותרות האפשריות.

רמת קושי הנובעת ממידת ההמחשה:

רמה 1: שימוש בלוח הכפל

רמה 2: חישובים בעל פה

פעילות 6 - דוגמה לפעילות הממחישה חילוק עם שארית

<u>מספר המשתתפים:</u>

הכיתה כולה.

<u>ציוד לפעילות:</u>

פריטי מנייה שאינם ניתנים לחלוקה (חרוזים, קלפים, צעצועים ועוד...).

<u>מטרת פדגוגיות:</u>

1. התנסות בחילוק של עצמים מוחשיים עם שארית
2. הכרת תכונות השארית (מספר שלם, קטן מהמחולק או שווה לו)

<u>ידע קודם נדרש:</u>

התנסות קודמת באסטרטגיות חלוקה בפועל של פריטי מנייה בדידים.

<u>מהלך הפעילות:</u>

נחלק את הכיתה לקבוצות בעלות מספר משתנה של ילדים (שני ילדים בקבוצה ,3, 4, 5 וכך הלאה).

לכל קבוצה יחולקו 8 קלפים והם יתבקשו לחלק את הקלפים באופן שווה ביניהם.

בסיום החלוקה ייערך תיעוד בעל פה של הפתרונות השונים, תוך כדי תיעוד פורמלי של המורה באופן הדרגתי על לוח הכיתה:

8:2=4

8:3=2(2)

8:4=2

8:5=1(3)

8:6=1(2)

8:7=1(1)

8:8=1

<u>שאלות לדיון</u>

- מי המחלק שהמנה שלו היא ללא שארית?
- מי המחלק שהמנה שלו היא עם שארית?

אפשר ורצוי לחזור על הדיון במשימות חלוקה אחרות שיהיו גם הן אותנטיות ומלוות בהמחשה בטווח מספרים אחר. ולהגיע לתיעוד של רצף תרגילי חילוק המזמנים שיח מתמטי סביב השאלות הנ"ל.

דוגמאות לשתי רמות קושי:

רמת קושי שבאה לידי ביטוי בטווח המספרים:

רמה 1:

חלוקת 8 קלפים לכל קבוצה.

רמה 2:

חלוקת 42 קלפים לכל קבוצה.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת:

רמה 1:

חשיבה אלגוריתמית – חישוב פשוט.

רמה 2:

חיפוש פתוח - התבוננו בתרגילים ומצאו קשרים ביניהם.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי בסוג בשאלה:

רמה 1:

חשיבה אלגוריתמית: מצאו ארבע מספרים בטווח של 20 שאינם ניתנים לחלוקה בשום קבוצה (הכנה להוראה על מספרים ראשוניים).

רמה 2:

חשיבה תהליכית ותובנה: מהו מספר הקלפים שיש לחלק לקבוצות בנות 3 ילדים ו-7 ילדים, כך שבשתי הקבוצות לא תהיה שארית. איך ידעתם?

רמת קושי הנובעת ממידת ההמחשה:

רמה 1:

חלוקת הקלפים בפועל לכל ילד כדי לבדוק אם המספר אכן מתחלק ללא שארית. (דוגמה: שלושה ילדים מקבלים שמונה קלפים. מחלקים אותם ביניהם ונותרים עם 2 קלפים שלא ניתן לחלק).

רמה 2:

פתרון המשימה ללא ההמחשה בפועל של חלוקת הקלפים.

שלשות כפליות

הפעילויות המוצעות בהמשך מתרגלות ומחזקות את השליפה וההבנה של השלשה הכיפלית. כלומר המכפלה וגורמיה. פעילויות אלו מבוססות בעיקר על ההבנה שידיעת הקשר הכיפלי בשלשה זו מסייעת לזכירה ושליפה של עובדות החילוק. כמו גם בשימוש הנרחב של תלמידים רבים בכפל לצורך פתרון תרגילי חילוק (Lefevre & Morris, 1999).

פעילות 7 - מלחמת מלבני כפל

משחק זה מחזק את המודעות לקשר בין המערך המלבני לפעולת החילוק

לוח משבצות משמש כלוח משחק בדומה למשחק הפיצוחים. אך מהלך המשחק ומטרתו שונים. משחק זה מומלץ לשחק בשלבים הראשונים של למידת הכפל במערך מלבני ואילו את משחק הפיצוחים רצוי ללמד לאחר היכרות והתנסות ביצירת מלבני כפל. המשחק משלב תרגול בדרך אחרת של פעולת הכפל, המכפלות והגורמים השונים עם משחק אסטרטגיה המחייב את הילדים להפעיל שיקול דעת בבחירת הגורמים של המכפלה אותה העלו בגורל ושל מבנה המלבן אותו הם ישרטטו. כפי שציינו, פעילויות אלו מבוססות בעיקר על ההבנה שידיעת הקשר הכיפלי בשלשה זו מסייעת לזכירה ושליפה של עובדות החילוק.

<u>מספר המשתתפים</u>:

2 משתתפים

<u>מטרות פדגוגיות</u>:

1. תרגול של מציאת גורמים עבור תוצאת מכפלה נתונה.
2. המחשת מכפלה כשטח מלבן.
3. תרגול התפיסה המרחבית.
4. תרגול חשיבה אסטרטגית.

<u>ידע קודם</u>:

שליפת עובדות הכפל. הכרת מודל השטח בכפל.

<u>המטרה המשחקית</u>:

שרטוט מספר רב יותר של מלבני כפל בהתאם למכפלה המוצגת בקלף.

<u>מהלך המשחק</u>:

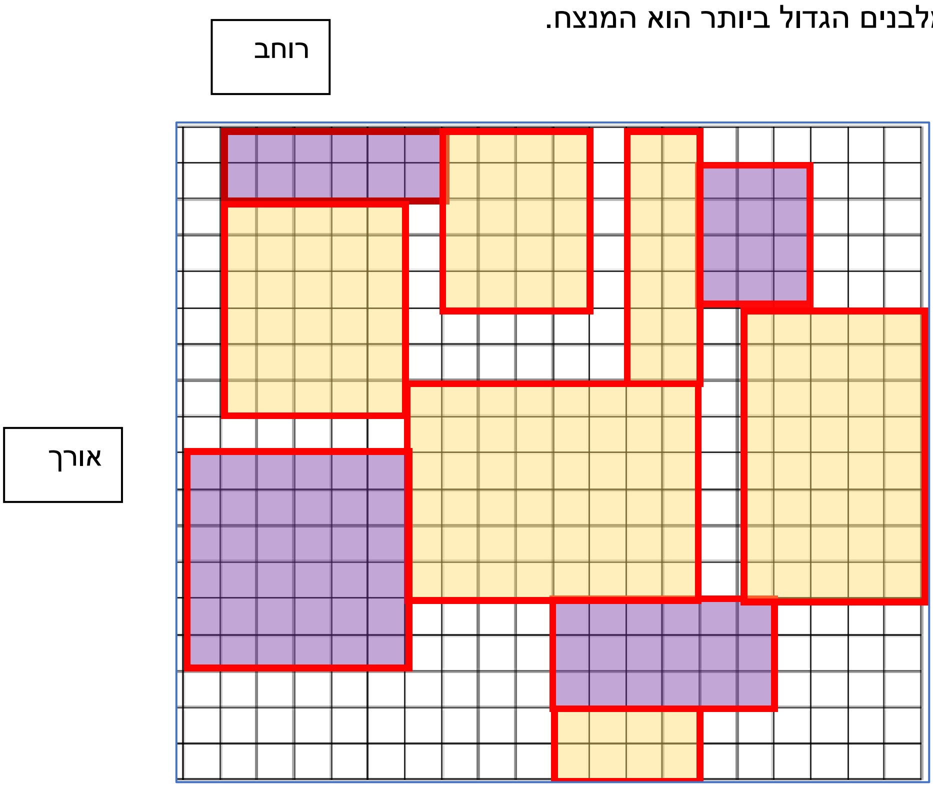
לכל משתתף צבע אחר לצביעת המלבנים.

שני השחקנים מטילים קובייה. השחקן שהטיל את התוצאה הגבוהה ביותר מתחיל. כל משתתף בתורו מרים קלף ועליו מספר כלשהו מלוח הכפל אותו עליו לייצג כמכפלה.

המשתתף מסמן מלבן שמכפלת אורכי צלעותיו מתאימה למספר שקיבל ו"כובש" את השטח בצבע שלו.

מי שלא מצליח לשרטט מלבן מתאים. תורו עובר.

בעל מספר המלבנים הגדול ביותר הוא המנצח.



דוגמאות לשתי רמות קושי בכל היבט:

רמת קושי שבאה לידי ביטוי בטווח המספרים:

רמה 1:

שימוש בלוח משבצות של 14X14, טווח המכפלות עד כפולות 36 בלוח הכפל.

רמה 2:

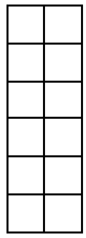
שימוש בלוח משבצות 22X18, טווח המכפלות עד 100 בלוח הכפל.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת:

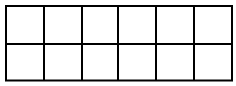
רמה 1:

חשיבה אלגוריתמית - יצירת המלבן בהתאם לתרגילי הכפל האפשריים למכפלה הנתונה. ילד שהרים קלף ובו מצוינת המכפלה 14 ידע שבאפשרותו ליצור מלבנים של 2×7, 7×2 או מלבנים של 1×14, 14×1. (יש להגדיר אורך ורוחב של המלבן בתחילת המשחק - למרות שמתקיים חוק החילוף בכפל לעיתים ניתן לשרטט מלבן של 2×7 ולא ניתן לשרטט מלבן של 7×2 ואין זה סותר את חוק החילוף ראה איור).

7X2



2X7



רמה 2:

חיפוש פתוח - משחק בקלפים גלויים המאפשר בחירת המכפלה המתאימה ביותר מתוך המכפלות האפשריות.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי בסוג בשאלה:

רמה 1:

פתרון אחד - התאמת מלבן למכפלה נתונה

לדוגמא, נתונה המכפלה 16 אליה נתאים את המלבן 2x8

רמה 2:

פתרונות מרובים - התאמת מלבנים רבים ככל האפשר למכפלה נתונה

נתונה המכפלה 16 אליה נתאים את המלבנים: 8×2, 2×8, 1×16, 16×1, 4x4.

רמת קושי הנובעת ממידת ההמחשה:

רמה 1: הנחת מלבנים על גבי לוח המשבצות

רמה 2: שרטוט וצביעה של מלבני הכפל

שאלות לחידוד החשיבה האסטרטגית:

- היכן בחרת לצייר את המלבן בשלבים המוקדמים יותר? האם צמוד למלבן קיים או רחוק ממנו? מדוע?
- היכן בחרת לצייר את המלבן בשלבים המוקדמים יותר? צמוד למלבן קיים או רחוק ממנו? מדוע?

פעילות 8 - פיצוחים: משחק אסטרטגיה

פעילות זו מבוססת גם היא על ההבנה שידיעת הקשר הכיפלי בשלשה מסייעת לזכירה ושליפה של עובדות החילוק. משחק זה יכול להוות בסיס ללמידה והבנה של חוק הפילוג.

בעזרת המערך המלבני הויזואלי ניתן להדגים ביטויים שקולים כמו $7x8=(2x8)+(5x8)$ (עמוד 17).

<u>מספר המשתתפים:</u>

2 משתתפים.

<u>מטרות פדגוגיות:</u>

1. תרגול של מציאת גורמים עבור תוצאת מכפלה נתונה.
2. המחשת מכפלה כשטח מלבן.
3. חשיבה על גורמים משותפים
4. תרגול חשיבה אסטרטגית.
5. בסיס ללמידה והבנה של חוק הפילוג.

<u>ידע קודם:</u>

שליפת עובדות הכפל. הכרת מודל השטח בכפל. להציע גורמים מתאימים למכפלה נתונה.

<u>המטרה המשחקית:</u>

להגיע לצד הנגדי של הלוח בעזרת שרטוט מלבני כפל.

<u>מהלך המשחק:</u>

כל משתתף בוחר נקודת התחלה על אחת מצלעות הלוח לבחירתו.

שני השחקנים מטילים קובייה. השחקן שהטיל את התוצאה הגבוהה ביותר מתחיל.

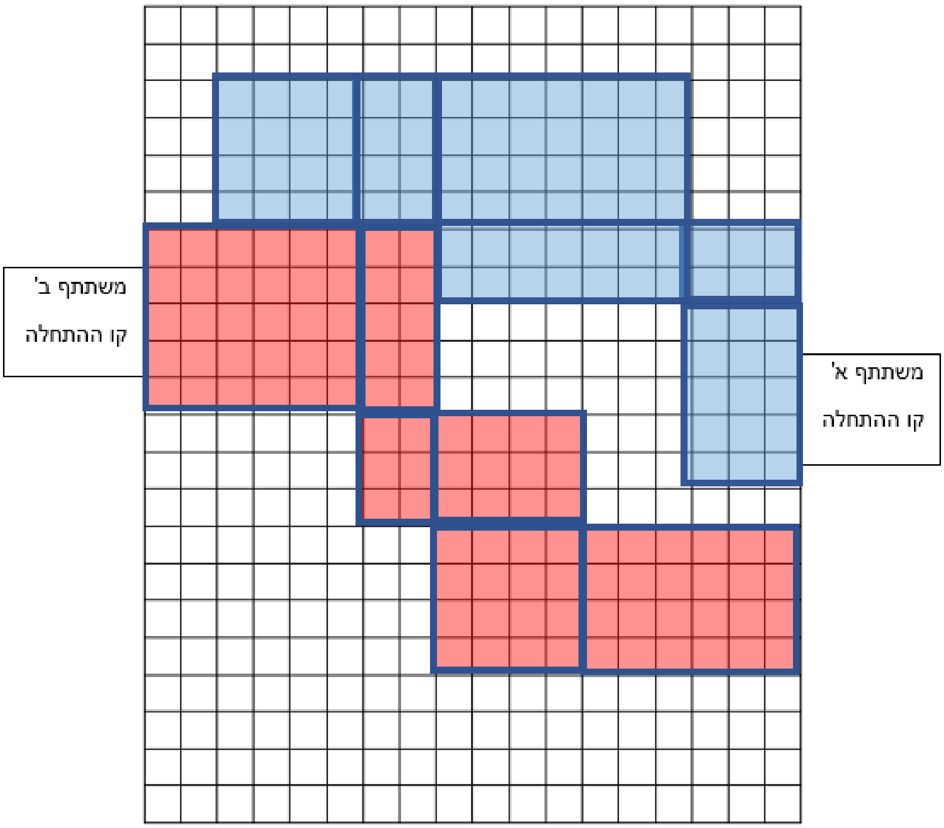
כל משתתף בתורו מרים קלף ועליו מספר כלשהו מלוח הכפל.

בסבב הראשון של המשחק, על כל שחקן בתורו לצבוע מלבן שמכפלת צלעותיו שווה למספר המופיע בקלף והוא נוגע בנקודת ההתחלה. למשל אם על הקלף מופיע המספר 12 ניתן ליצור מלבן שצלעותיו 1 ו- 12 או 2 ו- 6 או 3 ו- 4.

החל מהסבב השני של המשחק, כל שחקן בתורו מרים קלף. כעת עליו לצייר שוב מלבן שמכפלת צלעותיו תהיה שווה לערך המופיע בקלף **אולם** אחת מצלעותיו חייבת להתלכד עם אחת מצלעות אחד המלבנים הקודמים שהוא יצר כלומר, אחד מגורמי המכפלה החדשה צריך להיות זהה לאחד מגורמי המכפלה הקודמת. משמע, הצלע המשותפת חייבת להיות זהה.

ראה דוגמה בעמוד הבא. אם הוא לא מצליח לבנות מלבן כזה התור עובר לשחקן השני. שימו לב- אין לעלות על מלבן של שחקן אחר ולא ניתן לשרטט מלבן שיצא מגבולות הלוח.

מנצח: הראשון שנגע בצלע הנגדית של הלוח עם המלבנים שצבע.



דוגמאות לשתי רמות קושי בכל היבט:

רמת קושי שבאה לידי ביטוי בטווח המספרים:

רמה 1:

שימוש במכפלות זוגיות בלבד.

רמה 2:

שימוש בכל לוח הכפל.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי ברמת החשיבה הנדרשת:

רמה 1:

חשיבה אלגוריתמית – חישוב המכפלות.

רמה 2:

חיפוש פתוח - משחק בקלפים פתוחים, המאפשר בחירה של המכפלה המתאימה ביותר בכל שלב, במטרה להגיע לקצה השני יותר מהר מהיריב.

רמת קושי הבאה לידי ביטוי בסוג בשאלה:

רמה 1:

הציעו אסטרטגיות שיכולות לסייע בהגעה מהירה יותר לצד השני.

רמה 2:

בהמשך למשחק בקלפים פתוחים תינתן משימה למציאת ביטויים שקולים של קלפים תוך ביסוס חוק הפילוג.

דוגמה: $7\times8=3\times8+4\times8$

רמת קושי הנובעת ממידת ההמחשה:

רמה 1:

הסתייעות בלוח הכפל.

רמה 2:

חישוב בעל פה.

ביבליוגרפיה

אבינאון. א' (עורך). (1997) מילון ספיר. הד ארצי.

אוברמן. ג'. (9.7.2013), סדרת הרצאות מצולמות בנושא חילוק, **חלק א'- חילוק מספרים טבעיים,** (קובץ וידאו) מרכז מורים ארצי למתמטיקה אוחזר מתוך:

http://vod1.haifa.ac.il/tikshuv1/universityUnits/elementarymath/e_math_part1_mobile/e_math_part1_mobile.html

ברבש, מ' (2008). **פעולת החילוק**. אוחזר מתוך אתר מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי:

http://ymath.haifa.ac.il/images/stories/part3/teachers/terms/termndcon2.pdf

גביש, ת' (1998). **לחשוב להבין ולהצליח.** הוצ' אח, 88-91.

הרשקוביץ, (2005). מד"ל מטח.

צמיר. פ' וברקאי. ר' (2005), שימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה: תיאוריה ויישום, הוצאת רמות.

צוות הפיקוח על המתמטיקה, **מסקנות פדגוגיות בנושא מספרים ופעולות בשלמים**, אתר מפמ"ר מתמטיקה (16.4.2011), אותחל ב- 15.9.18.

http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/KdamYesodiVeyesodi/Haaracha/Meyzav.htm

קופרמן. ר' (2011), מתמטיקה של בית ספר יסודי- לגלות מחדש, להבין, ללמוד ולאהוב. חלק א' הוצאת מעלות.

קורן. מ' (2002), מודל העוגה המלבנית, חילוק שברים, מספר חזק 2000, גיליון מס' 3, 24-29.

Anghileri, J. (1989). An Investigation of Young Children's Understanding of Multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 367 – 385.

Graeber, A. (1993). Research into Practice: **Misconceptions about Multiplication and Division**. Arithmetic Teacher, v40 (7), 408-411.

Harris. A. (2001), **Multiplication & Division -** Thesis M&D.pdf, Universty of northhampton.

Jacob.L & Willis.S. (2001). The development of Multiplicative Thinking in Young Children,//. Retrieved from http://www.merga.net.au/documents/RR_jacob.pdf

Lamon, Susan J. (1993) **“Ratio and Proportion: Connecting Content and Children’s Thinking**. Journal for Research in Mathematics Education 24: 41-61.

Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). **Three balloons for two dollars; developing proportional reasoning.** Mathematics Teaching in the Middle School, 6(4), 254-261.

למאמר המתורגם לעברית וערבית.

Lefevre. J.A. & Morris. J. (1999). **"More on the relation between division and multiplication in simple arithmetic: Evidence for mediation of division solutions via multiplication".** Memory & Cognition 27 (5), 803-812**.**

https://link.springer.com/content/pdf/10.3758/BF03198533.pdf

Li. Y., & Silver. E. A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. The Journal of Mathematical Behavior . Volume 19, Issue 2, Summer 2000, Pages 233-246.

Mulligan J.T. & Watson J. (1998). A Developmental Multimodeal for Multiplication and Division. *Mathematics Education Research Journal, 10(2), 61-86.*

Roche. A., & Clarke. D.M. (2012). **Primary teachers’ representations of division: Assessing mathematical knowledge that has pedagogical potential**. Mathematics education research journal. Vol 25 issue 2 pp. 257-278.

Wallace. A.H & Gurganus. S.P. (2005). Teaching for Mastery of Multiplication. *Teaching Children Mathematics*, 12(1), 26-33.

נספחים

פעילות מספר 1 - נספח 1

"פעמון הדלת מצלצל"

מאת פאט האצ'ינסון

פעילות בעקבות סיפור

ילדים בבית	מספר העוגיות לכל ילד	התרגיל המתאים
יובל ורוני		
יובל, רוני, גאיה ושחר		
יובל, רוני, גאיה, שחר, ניצן ודניאל		
יובל, רוני, גאיה, שחר, ניצן, דניאל, גל, דפנה, עומר רביב איתי ושרון		

"פעמון הדלת מצלצל"

מאת פאט האצ'ינסון

פעילות בעקבות סיפור

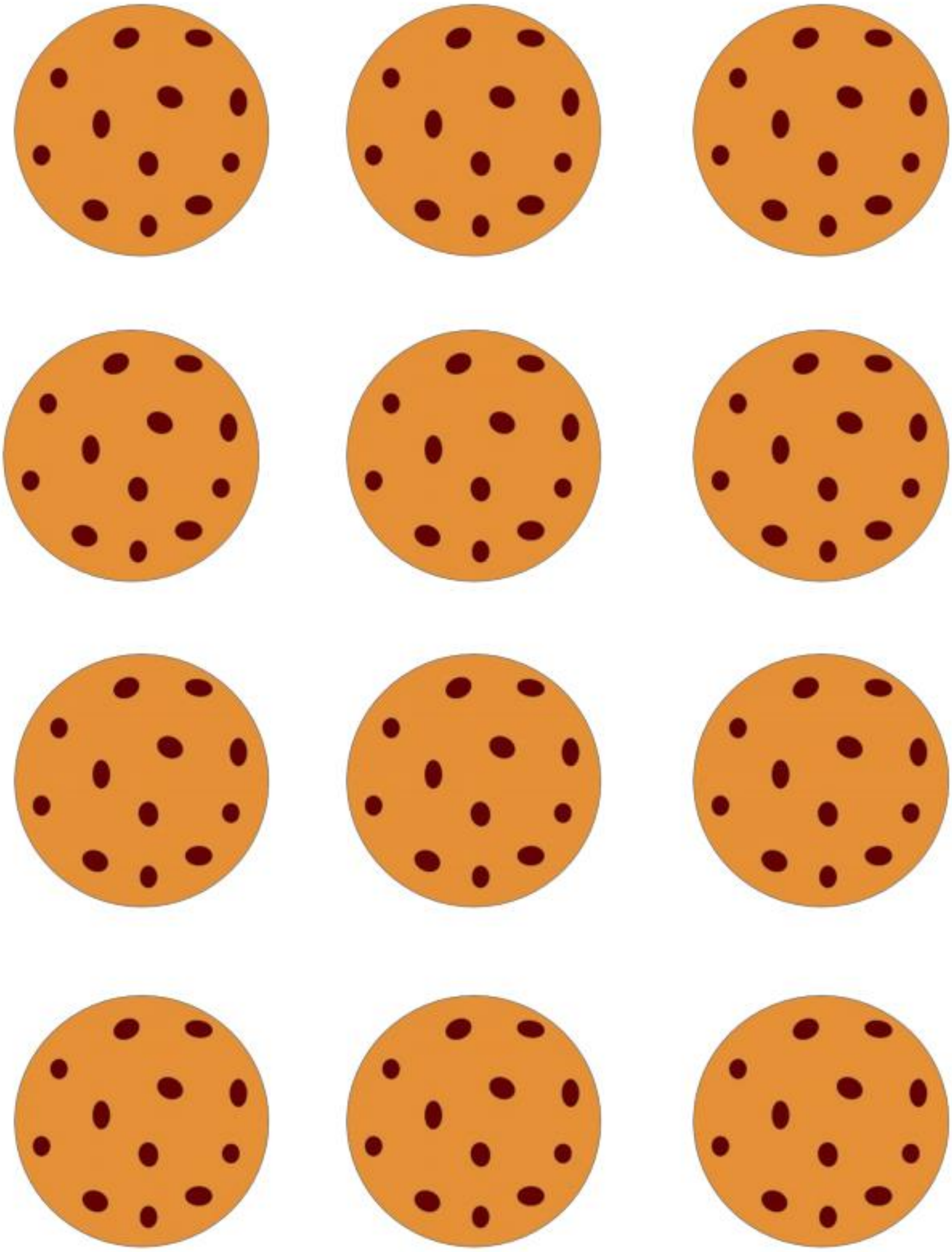
כתבו את מספר העוגיות כרצונכם והחליטו לכמה ילדים לחלק אותן:

יש לנו ___________ עוגיות

מספר הילדים	מספר העוגיות שכל ילד יקבל	תרגיל מתאים

פעילות מספר 1 - נספח 3

"פעמון הדלת מצלצל" - דף העוגיות



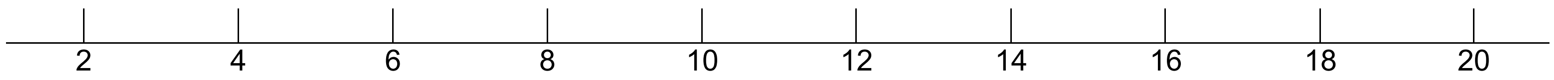
by Still Playing School for Pre-K Pages

"חילוק להכלה"

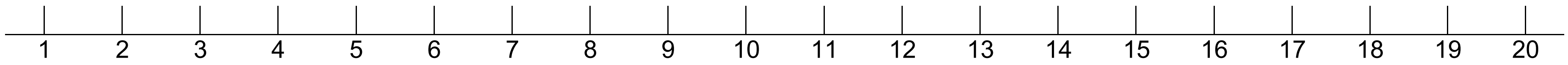
קלף הצלחה	הצלחתי	אלוף החלוקה	אני אלוף
קלף הצלחה	הצלחתי	אלוף החלוקה	אני אלוף
קלף הצלחה	הצלחתי	אלוף החלוקה	אני אלוף
קלף הצלחה	הצלחתי	אלוף החלוקה	אני אלוף

משחק חילוק בציר המספרים

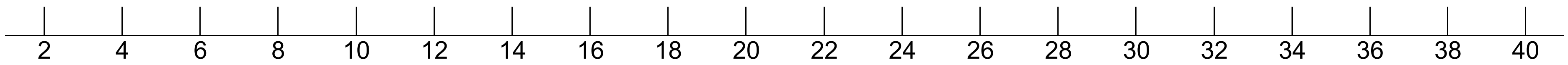
ציר מספרים 1-20 (רק זוגיים)



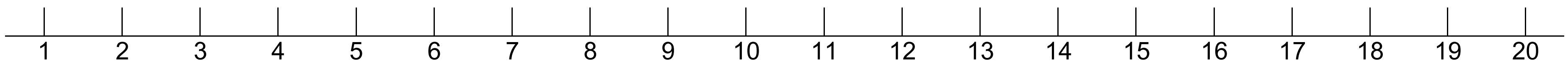
ציר מספרים 1-20



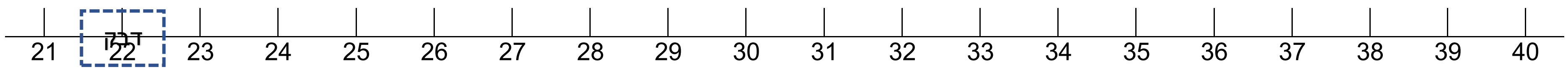
ציר מספרים 1-40 (רק זוגיים)



ציר מספרים 1-40



גזרו את שני חלקי הציר והדביקו

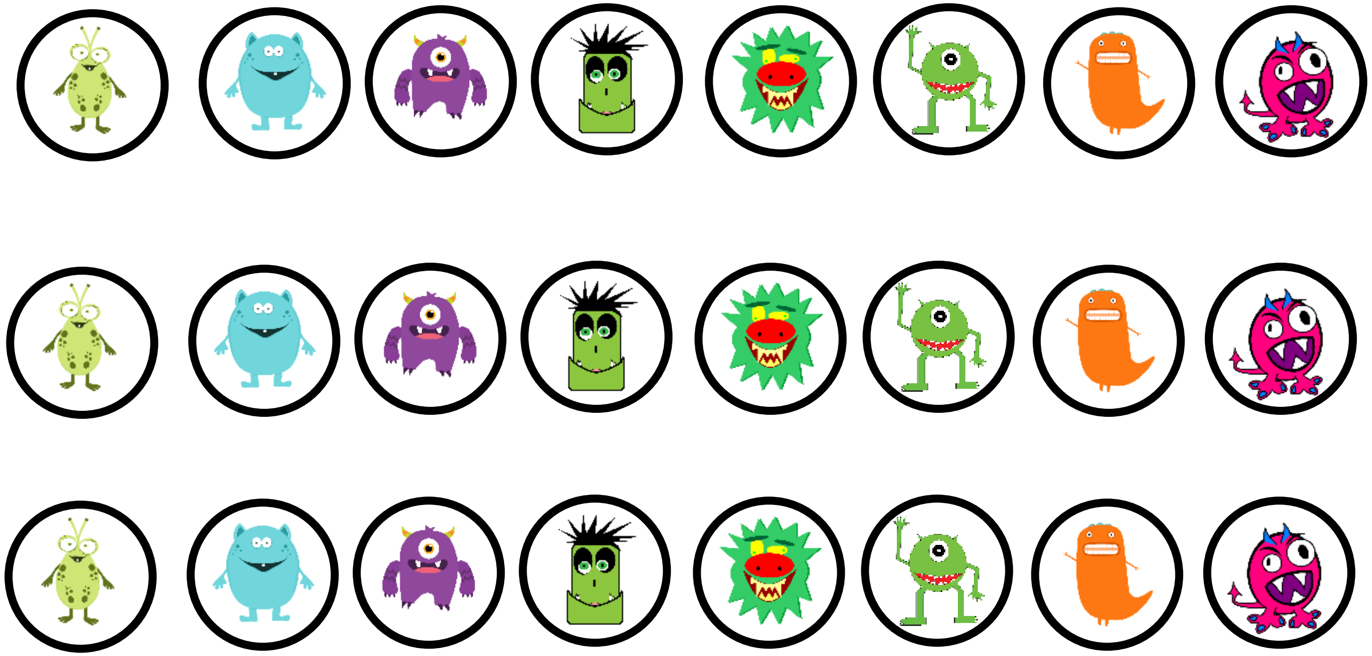


פעילות מספר 5 - נספח 6

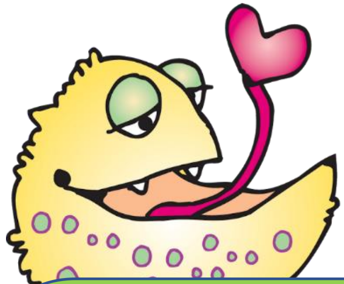
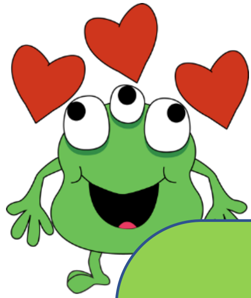
מירוץ המפלצות - רמה 1

התמונות מתוך: http://cliparts.co/monster-pictures

דיסקיות להדפסה וגזירה:



פעילות מספר 5 - נספח 7

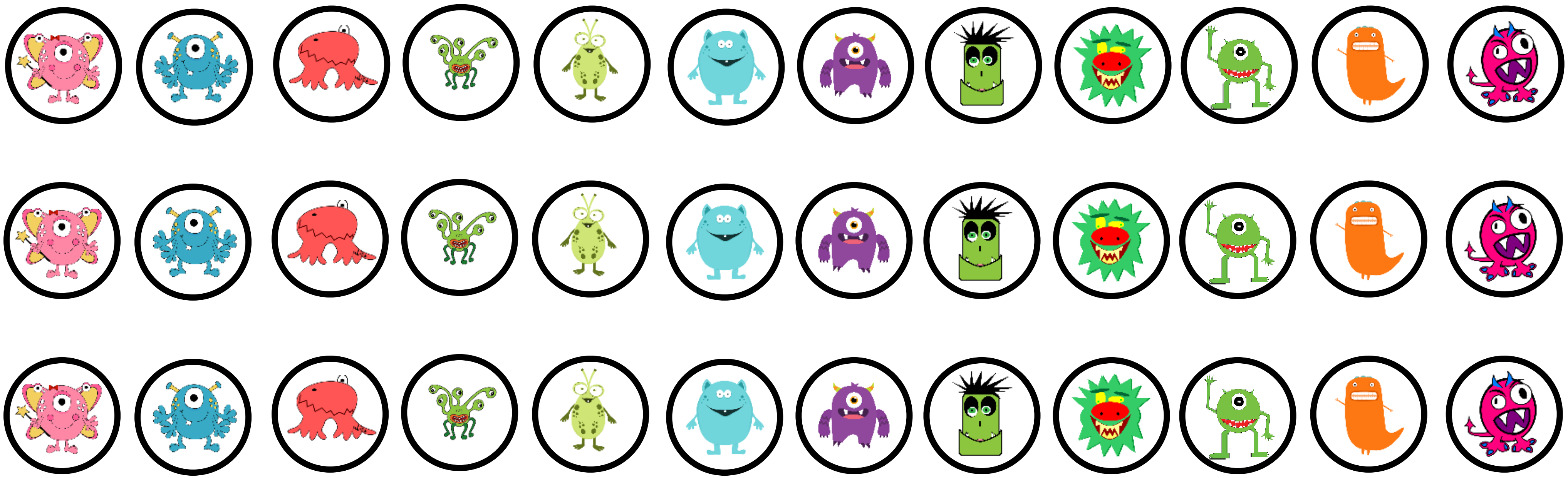
18, 30, 40, 16, 12, 24, 36, 20	:	6, 2, 5, 8, 6, 4, 4, 3	=	5, 6, 9, 4, 4, 6, 10

פעילות מספר 5 - נספח 8

מירוץ המפלצות - רמה 2

התמונות מתוך: http://cliparts.co/monster-pictures

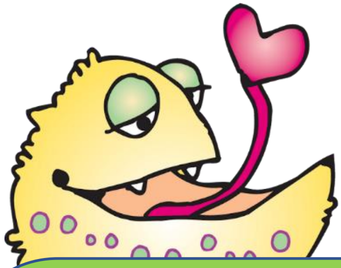
דיסקיות להדפסה וגזירה:



פעילות מספר 5 - נספח 9

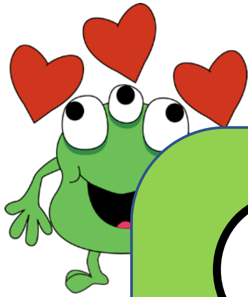
32 6 28 24 16 4 40 20 30 18 8 12 14 10

:



2 6 4 8 2 8 6 4 2 6 10 4 2 2

=



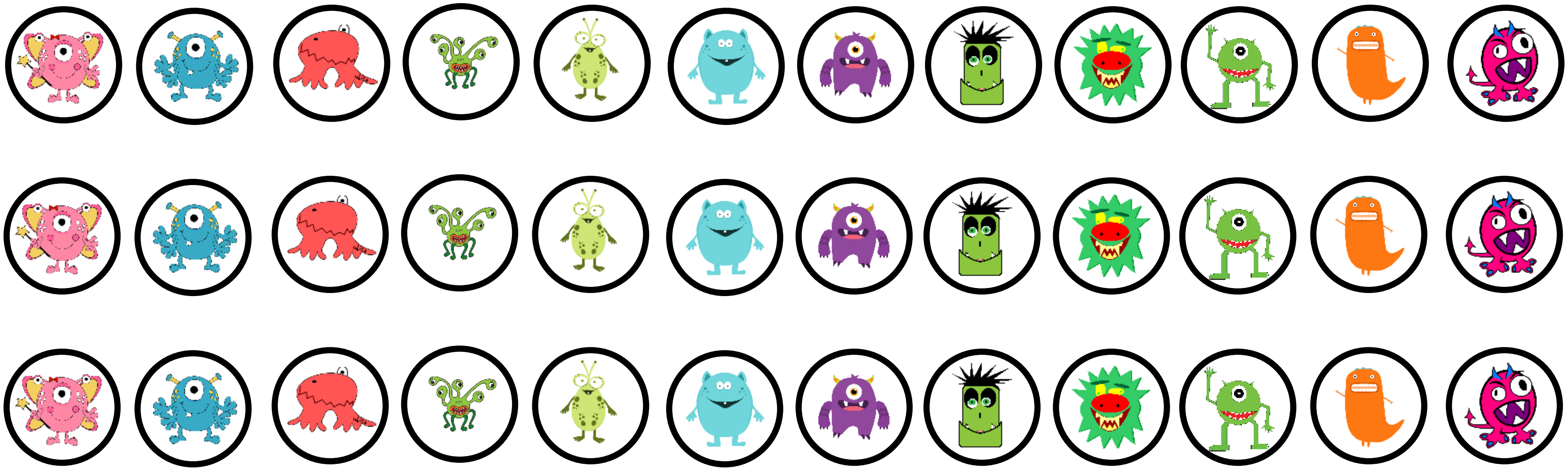
7 8 5 7 8 4 9 1 6 2 10 3 4

פעילות מספר 5 - נספח 10

מירוץ המפלצות - רמה 3

התמונות מתוך: http://cliparts.co/monster-pictures

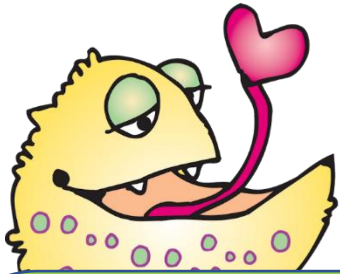
דיסקיות להדפסה וגזירה:



פעילות מספר 5 - נספח 11

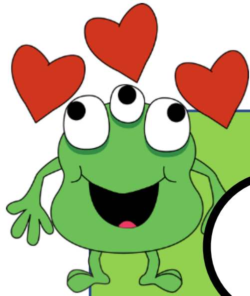
49 30 16 18 32 12 24 36 28 45 40 56 20 35

:



6 2 7 5 8 7 4 9 6 8 4 4 7 3

=



5 7 6 5 4 7 4 9 5 6 4 10