אינווריאנטיות

ד״ר מריטה ברבש, המכללה האקדמית לחינוך אחווה

אינווריאנטיות היא שמירת תכונות של אובייקט מתמטי תחת שינויים שאובייקט זה עובר (ועל כן, **למרות** שינויים אלה).

המילה **אינווריאנטיות** נגזרת מהמילה הלועזית invariant שפירושה ״בלתי משתנה״ ("-in" - בלתי, "variant" – משתנה).

תכנית הלימודים החדשה לבית הספר היסודי (עמוד 9) מזכירה את לימודי התכונות האינווריאנטיות של צורות גיאומטריות תחת פעולות מסוימות כחלק מהמושגים והתובנות שבתכנית. עם זאת, אינווריאנטיות מתייחסת לא רק לצורות גיאומטריות אלא לאובייקטים מתמטיים מגוונים. אנו נראה כאן מספר דוגמאות הרלוונטיות לבית הספר היסודי.

דוגמאות:

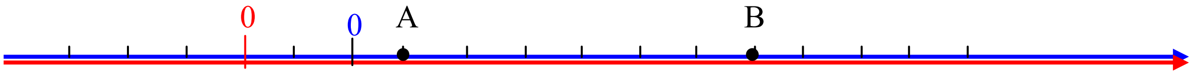
1. אם ניקח משולש כלשהו ונתחיל לשנות אותו כרצוננו, בדרך כלל ישתנו תכונות רבות שלו:
   אורכי צלעות,
   היקף,
   שטח,
   ועוד

   - אבל סכום הזוויות שלו לא ישתנה ויישאר 180^0 – אנו אומרים שסכום הזוויות של משולש **אינווריאנטי ביחס** ל(או **תחת**) **שינוי אורכי צלעותיו**.

תכונה זו של שמירת סכום הזוויות תחת שינויים באורכי הצלעות נכונה למעשה לכל מצולע ולא רק למשולש.

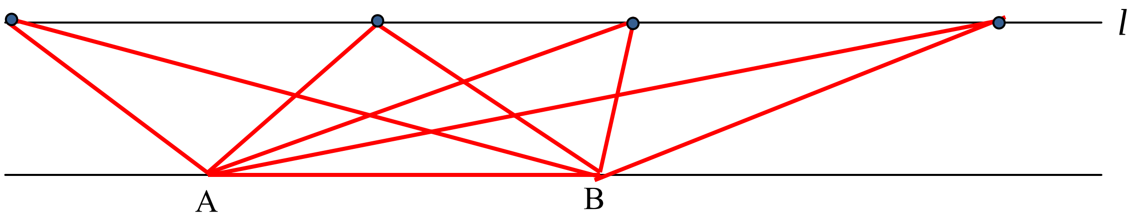
2. אם נכפול אורכי כל הצלעות של משולש כלשהו באותו מספר, כתוצאה משינוי זה של אורכי הצלעות ישתנו גם ההיקף, השטח, אורכי הגבהים, התיכונים ועוד, אבל זוויות המשולש תישארנה ללא שינוי. שינוי כזה שבו כופלים את כל הצלעות באותו מספר, אפשר לכנות ״שינוי פרופורציונלי״: כל הצלעות של המשולש אשר מתקבל כתוצאה משינוי זה פרופורציונליות לצלעות של המשולש המקורי. אנו אומרים, אם כן, שזוויות של משולש **אינווריאנטיות תחת שינוי פרופורציונלי של צלעות המשולש**.

3. אם ניקח ציר מספרים ונשנה בו את מיקום הראשית (נקודת האפס), שיעורי הנקודות ישתנו, מן הסתם, כתוצאה משינוי זה, אבל המרחק ביניהן יהיה אינווריאנטי. במילים אחרות, **מרחק בין שתי נקודות על ישר אינווריאנטי ביחס לבחירת מקום ה-0 עליו**:



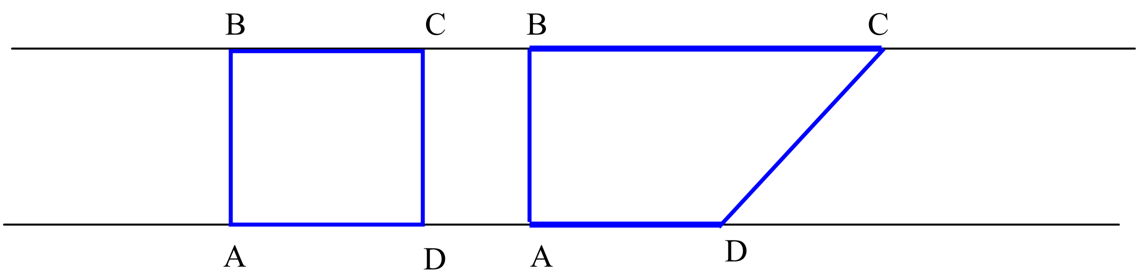
על הישר AB בשרטוט לעיל, אפשר לבחור את מיקום ה-0 כמו שמסומן בצבע אדום – ולקבל ציר מספרי "אדום", ואפשר לבחור את מיקום ה-0 כמו על הציר הכחול (וכמובן, באין סוף דרכים נוספות). שיעורי הנקודות A, B על הציר האדום הם 3 ו- 9 בהתאמה, ועל הציר הכחול – 1 ו – 7, אבל המרחק ביניהן על שני הצירים הוא 6 יחידות, וגם הסדר בין המספרים נשמר.

4. אם ניקח משולש כלשהו ונתחיל להזיז אחד הקדקודים שלו לאורך ישר המקביל לצלע מול הקדקוד – ישתנו תכונות מסוימות, כמו אורכי צלעות והיקף, אבל השטח יישאר ללא שינוי. כלומר, **שטח המשולש אינווריאנטי ביחס להזזת כל אחד מקדקודיו לאורך ישר המקביל לצלע מולו**:



לכל המשולשים בשרטוט לעיל שאחת הצלעות שלהם היא AB והקדקוד השלישי נמצא על הישר l, אותו שטח.

5. **להבדיל מסכום זוויות** (ראו דוגמה 1), **ולהבדיל מהדוגמה הקודמת עבור המשולש**, אינווריאנטיות של שטח **תחת הזזת אחד הקדקודים** לאורך ישר המקביל לצלע אחרת **איננה מתקיימת עבור מצולע** כלשהו. למשל: כתוצאה מהזזת הקדקוד C לאורך הישר אשר מקביל לצלע AD שטח המרובע ישתנה.



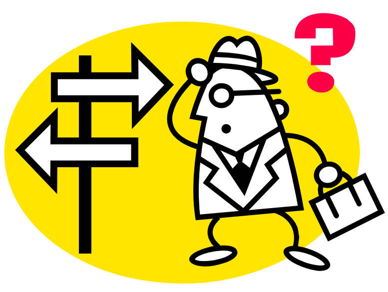
6. **התחלקות מספר ב- 9 אינווריאנטית ביחס לשינוי סדר ספרותיו**:
היות שהתחלקות המספר ב- 9 תלויה אך ורק בסכום הספרות, שינוי בסדרן לא ישפיע על ההתחלקות ב-9: 153725 ו- 753215 שניהם לא מתחלקים ב-9, ו- 8839206 ו - 6032898 שניהם מתחלקים ב-9. התחלקות ב-9 אינווריאנטית גם ביחס להוספת ספרה 0 או ספרה 9 בכל מקום במספר. לעומת זאת, ההתחלקות ב-4 איננה אינווריאנטית תחת שני השינויים אלה, כיוון שבסימן ההתחלקות ב-4 יש חשיבות לסדר הספרות במספר (ליתר דיוק, לסדר שתי הספרות האחרונות במספר). לדוגמה, המספר 168 מתחלק ב-4 והמספר 186 איננו מתחלק.

7. **זוגיות** של מספר טבעי (כלומר, היותו זוגי או אי זוגי) **אינווריאנטית תחת כפל במספר אי זוגי**, אך איננה אינווריאנטית תחת כפל במספר זוגי או במספר לא שלם:
כפל במספר זוגי הופך מספר אי זוגי לזוגי, כלומר, משנה את תכונת הזוגיות שלו, וכפל במספר לא שלם, גם אם התוצאה שמתקבלת שלמה, יכול להפוך מספר זוגי לאי זוגי.

לדוגמה, המספר 21 איננו זוגי, וגם מכפלתו בכל מספר אי זוגי תישאר אי זוגית. לעומת זאת, אם נכפול אותו ב-4, התוצאה כבר לא תהיה אי זוגית.

דוגמה נוספת: המספר 18 הוא מספר זוגי, אבל אם נכפול אותו ב- $\frac{3}{2}$, התוצאה תהיה שלמה, אבל כבר לא זוגית.

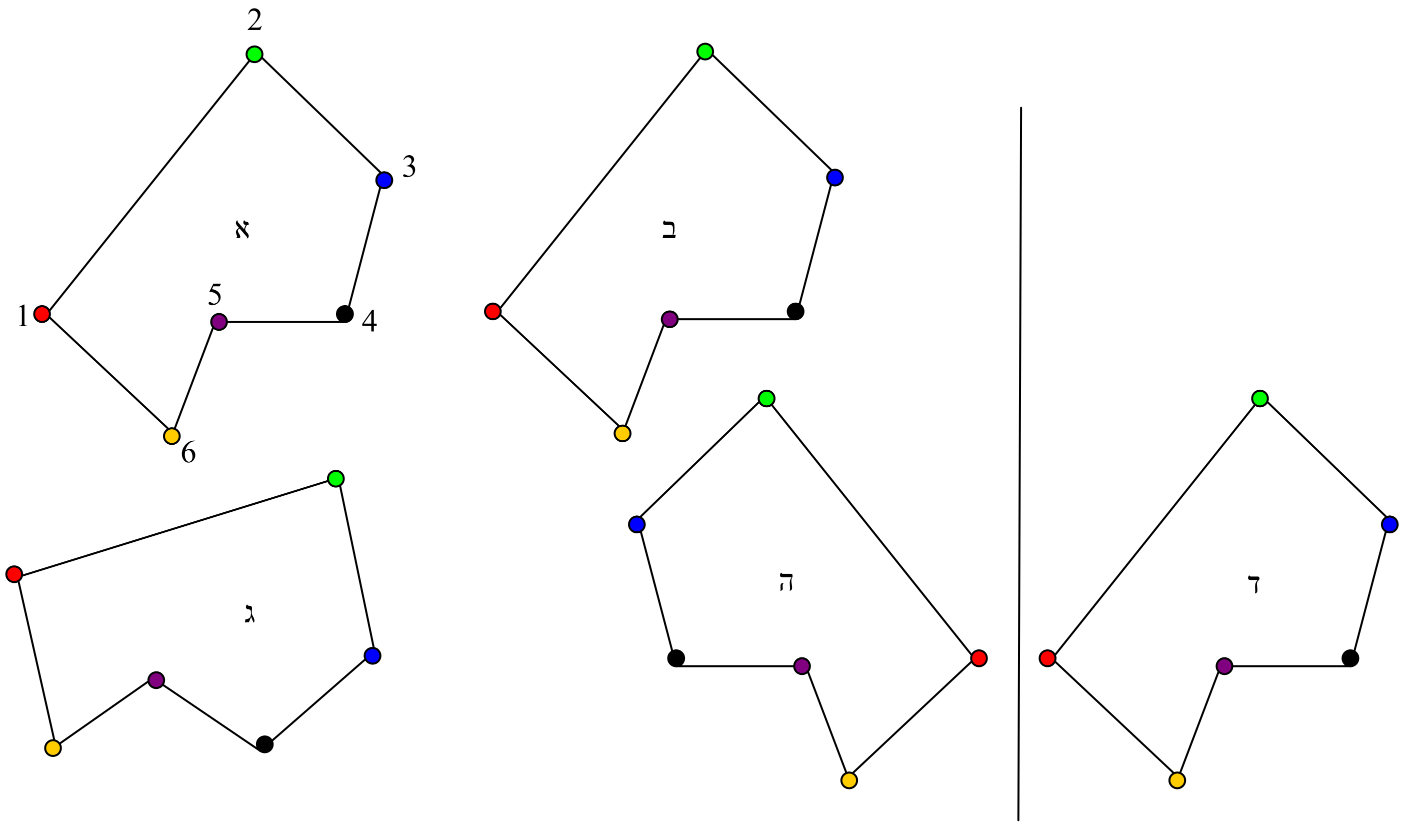
8. באופן כללי יותר, **התחלקות של מספר כלשהו במספר אחר אינווריאנטית תחת כפל במספר שלם**, אך איננה אינווריאנטית תחת כפל במספר לא שלם.
אם מספר כלשהו מתחלק, למשל, ב-12, ונכפול אותו במספר שלם אחר, המכפלה עדיין תתחלק ב-12. לעומת זאת, אם נכפול אותו במספר לא שלם, התוצאה יכולה לאבד תכונה זו: 36 מתחלק ב-12, אך $36\times\frac{10}{9}=40$ כבר לא מתחלק ב-12.



9. אם נמספר קדקודי מצולע כלשהו בכיוון מסוים, למשל, בכיוון השעון, ונבצע סיבוב של מצולע זה, מספור הקדקודים יישאר ללא שינוי, וכך גם אם נבצע הזזת המצולע בכיוון כלשהו.

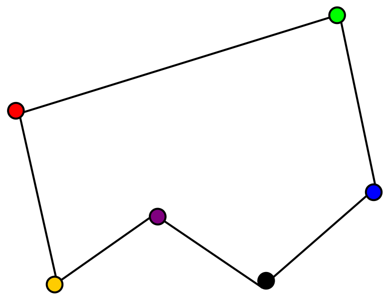
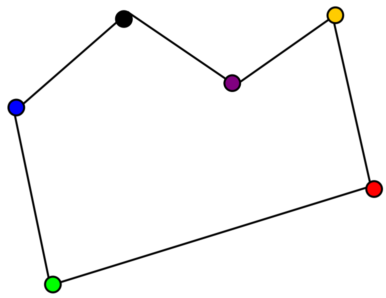
אם, לעומת זאת, נבצע שיקוף של המצולע ביחס לישר כלשהו, מספור הקדקודים ישנה את כיוונו. כדי לעקוב אחר המספר, נוח לצבוע את קדקודי המצולע בצבעים לפני שנמספר אותם:

בשרטוט, המשושה ב מתקבל כתוצאה מהזזת המשושה א, והמשושה ג התקבל מהמשושה א כתוצאה גם מהזזה וגם מסיבוב. גם המשושה ד התקבל כתוצאה מההזזה של המשושה א. בכל המשושים האלה מספור כל הקדקודים החל מהקדקוד האדום עד הקדקוד הזהוב הוא בכיוון השעון (בדקו זאת! מספרו את כל הקדקודים של משושים ב-ד כאשר מתחילים מהקדקוד האדום, ומסיימים בקדקוד הצהוב). לעומת זאת, אם נרצה למספר את קדקודי המשושה ה לפי אותו סדר, יהיה כיוון המספור **נגד** כיוון השעון (בדקו!).



נסכם: שינוי בכיוון מספור הקדקודים של מצולע מביע את **שינוי המגמה.** כפי שראינו, המגמה **אינווריאנטית תחת טרנספורמציות כמו הזזה או סיבוב**, אך **איננה אינווריאנטית תחת שיקוף**.

שימו לב: לא משנה מהו גודל הסיבוב – המגמה נשארת אינווריאנטית. שני המשושים בשרטוט מסובבים זה כלפי זה ב-180^0, אך כיוון מספור הקדקודים לא משתנה. בדקו זאת, ולאו דווקא עבור המספור המקורי: התחילו למספר את קדקודי אחד המשושים מקדקוד כלשהו ובכיוון כלשהו (כיוון השעון או הכיוון הנגדי), וודאו שגם במשושה השני מספור הקדקודים באותו סדר יתבצע בכיוון שבחרתם.

<u>לסיכום, כדי לדבר על אינווריאנטיות, יש לציין :</u>

- על איזה אובייקט מתמטי מדברים (צורה, מספר וכדומה) ;
- מהו השינוי שעובר האובייקט ;
- מהן תכונות האובייקט שלא משתנות (**אינווריאנטיות**) תחת השינוי שעובר האובייקט עצמו (למעשה, **למרות** שינוי זה).