פעילויות על לוח מסמרים

תורגם ועובד מאתר nrich

פעילויות על לוח מסמרים

נושא הפעילות

פעילות זו הינה בנושא גיאומטריה במישור. היא עוסקת בבניית משולשים וריבועים על פי תנאים נתונים. הפעילות מתמקדת במציאת כל האפשרויות של בניית משולשים וריבועים על לוחות מסמרים בגדלים שונים ומציאת שטחם ומציאת הקשר בין שינוי אורכי הצלעות של המצולעים לבין השינוי בשטחם.

אוכלוסית היעד

כיתות ד- ו.

ידע מתמטי קודם

זיהוי ושיום סוגי משולשים ומרובעים. תכונות משולשים ומרובעים. חישוב שטח משולשים ומרובעים על פי יחידת שטח מוגדרת.

מטרת המשימה

<u>בפעילות הראשונה</u> התלמיד יתנסה בבניית משולשים וריבועים שונים (אפשר להיעזר בלוח מסמרים או בניר מרושת או ביישומון מתאים). בהמשך התלמיד ימנה את האפשרויות לבניית המצולעים הנ"ל על פי הכללים הנתונים. התלמיד יציע איסטרטגיות לבניית המצולעים ויתעד אותן. כמו כן התלמיד יבנה משולשים בעלי שטח נתון ויחקור מתי אפשרי ומתי לא אפשרי לבנות.

<u>בפעילות השנייה</u> התלמיד יבנה על לוח המסמרים משולשים ישרי הזווית שונים אפשריים ע"י הזזת אחד מקודקודי משולש נתון. ימצא מתוכם משולשים השווים בשיטחם ויחשב את שטחם.

<u>בפעילות השלישית</u> התלמיד יבנה על לוח המסמרים מלבנים על פי תנאים נתונים מראש ויחשב את שטחם.

מושגים מתמטיים

משולש, ריבוע, מלבן, שטח משולש, שטח מלבן, משולש ישר זווית , משולש שווה שוקיים, זווית ישרה.

למורה

תאור הפעילות

בפעילות התלמיד מתבקש לחקור, לעבוד בצורה שיטתית כדי למצוא מצולעים ושטחם על פי תנאים נתונים.

הצעות להפעלה

רצוי להשתמש באביזר שנקרא "לוח מסמרים" או לחילופין בנייר "מנוקד" dotty grid או ביישומון מתאים Virtual Geoboard כדי לעזור לתלמיד בבנית מצולעים קונקרטית, לבדוק ולחקור אילו מתאימים ואילו לא. לבקש מהתלמידים לבנות את הריבועים/ משולשים האפשריים בצבעים שונים ולא לפרק כדי שיוכלו להשוות עם האפשרויות שבנו כבר.

שאלות לדיון

בתום הפעילות מומלץ לדון עם התלמידים בסוגיות הבאות:

1. תארו את הדרך בה אתם בונים את המשולשים/ריבועים.

הרחבות אפשריות

לבצע את אותה פעילות על לוחות שונים (5x5, 6x6, 9X7...) ולבקש מהתלמידים להשוות עם התשובות שהתקבלו בפעילות המקורית.

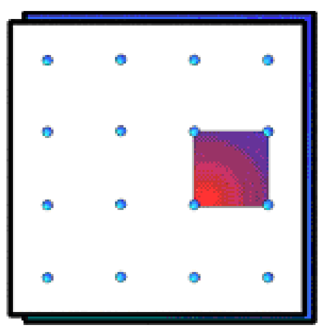
לערוך דיון: מה השתנה, מה לא, למה?

פעילות 1 (לתלמיד)

כמה משולשים וכמה ריבועים?

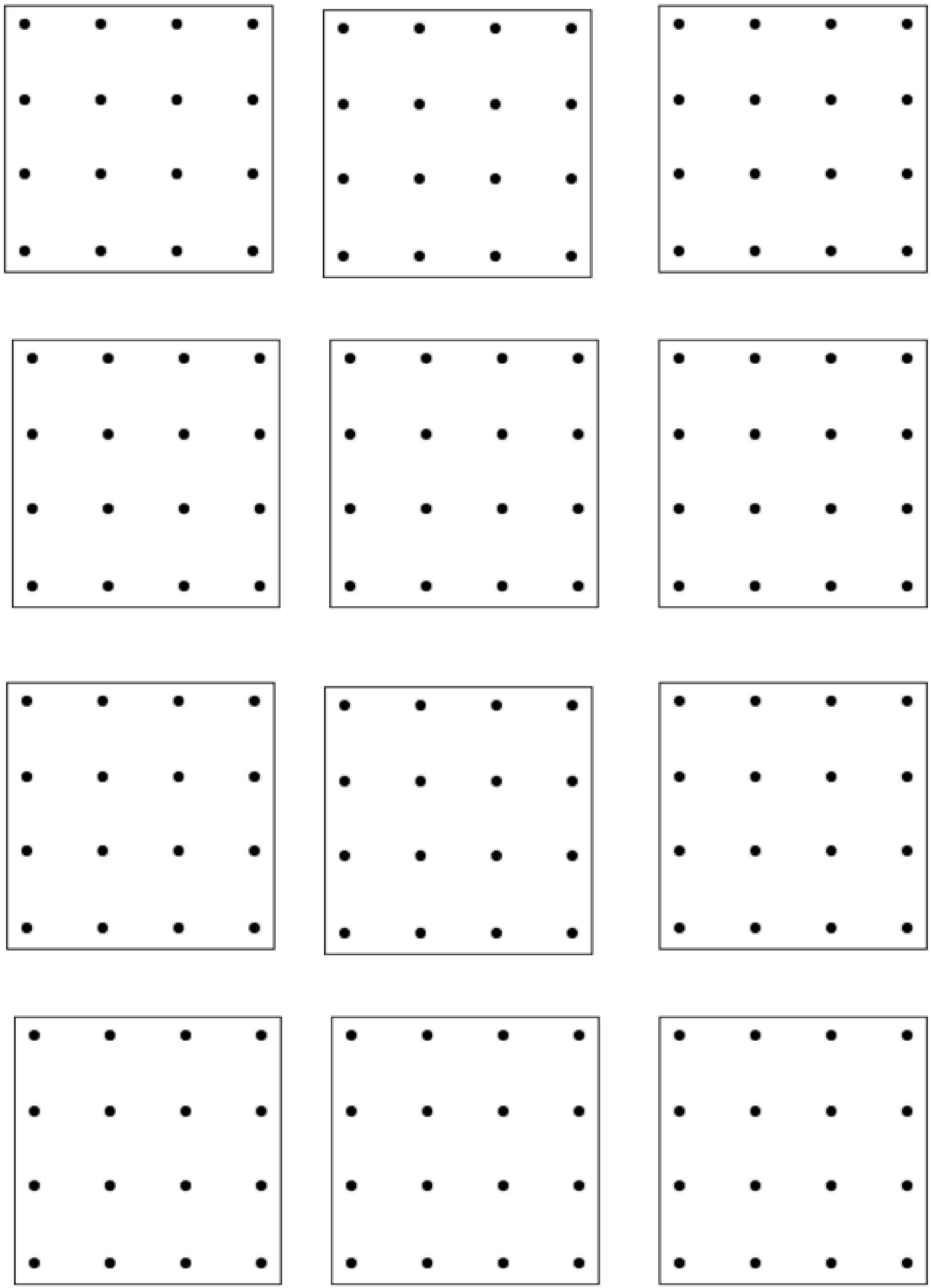
השתמש בלוח מסמרים 4X4

1. כמה משולשים ישרי זווית שונים (לא חופפים) ניתן לבנות על לוח מסמרים 4X4? פרטו אותם (השתמשו בדף המצורף)
2. כמה משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים שונים (לא חופפים) ניתן לבנות על לוח מסמרים 4X4? פרטו אותם. (השתמשו בדף המצורף)
3. מצאו את שטחם של כל אחד מהמשולשים שמצאתם בסעיף א' בריבועי יחידה (ריבוע יחידה הוא ריבוע כמו זה הצבוע בשירטוט).



4. כמה ריבועים שונים ניתן לבנות על לוח מסמרים 4X4?
5. האם אפשר לבנות ריבוע ששטחו 2 ריבועי יחידה? אם כן הראו כיצד חישבתם את שטחו.
6. מצאו את שטחו של כל אחד מהריבועים שמצאתם בסעיף 4.

לתלמיד



פעילות 1 - הערות למורה

הצעות לפתרונות אפשריים

שאלה 1:

נמצא את **המשולשים ישרי הזווית האפשריים** בצורה שיטתית.

(נתייחס לאורך צלעות המצולעים ביחידות של אורך צלע של "ריבוע יחידה". "ריבוע יחידה" הוא הריבוע הקטן ביותר בלוח)

נתחיל קודם במשולשים שניצביהם בנויים מצלעות "ריבוע יחידה" (או מצלעות שהן כפולות של צלעות ריבוע יחידה) ואחר כך משולשים שניצביהם בנויים מאלכסונים של "ריבוע יחידה" או של מלבן (הבנוי ממספר "ריבועי יחידה").

דוגמה למידות הניצבים של משולשים מתאימים:

משולש א: 1 ו- 1

משולש ב: 1 ו- 2

משולש ג: 1 ו- 3

משולש ד: 2 ו- 2

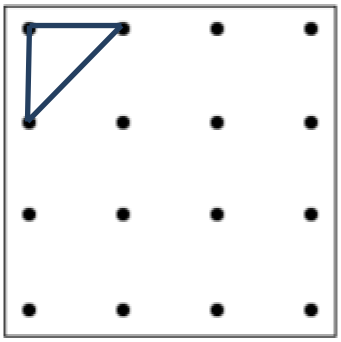
משולש ה: 2 ו- 3

משולש ו: 3 ו- 3

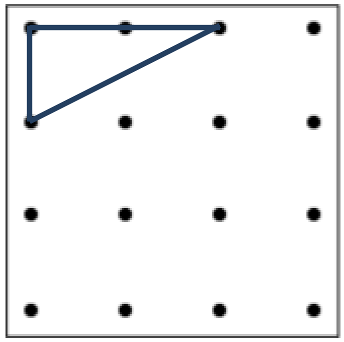
משולש ז: אלכסון של ריבוע 1X1 ואלכסון של ריבוע 1X1 (כלומר, כל ניצב אורכו $\sqrt{2}$)

משולש ח: אלכסון של מלבן 1X2 ואלכסון של מלבן 1X2 (כלומר, כל ניצב אורכו $\sqrt{5}$)

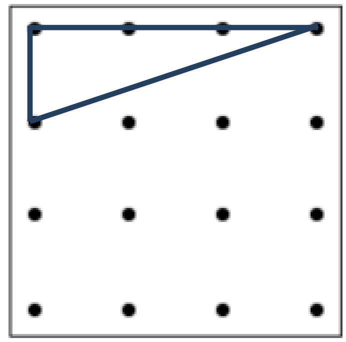
א



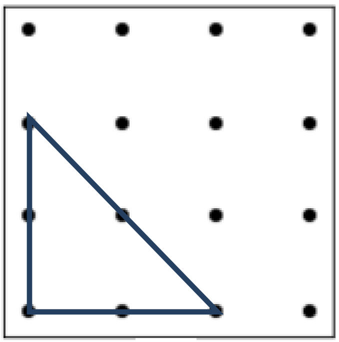
ב



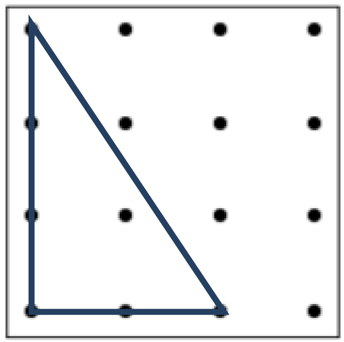
ג



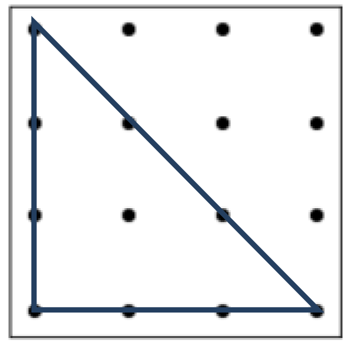
ד



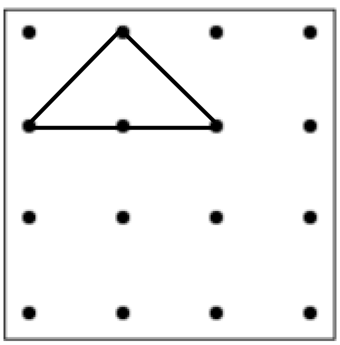
ה



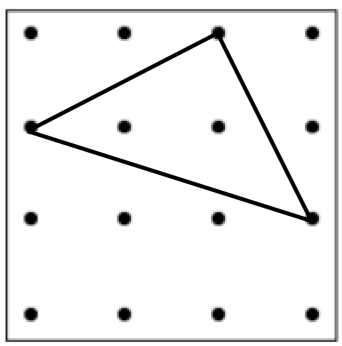
ו

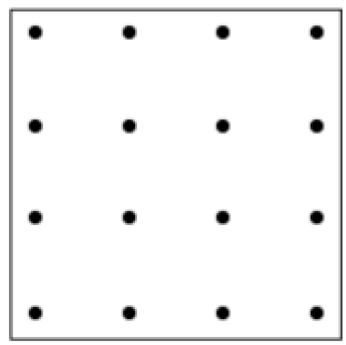


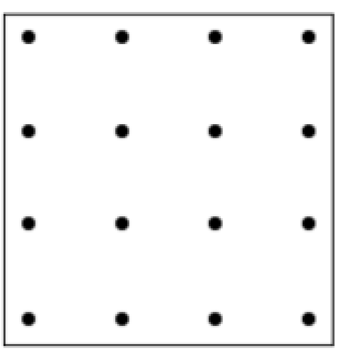
ז

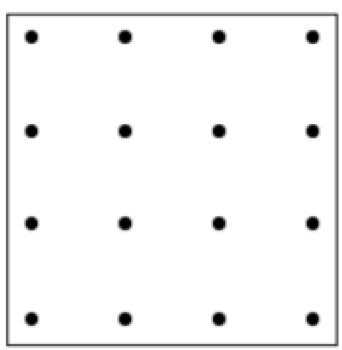


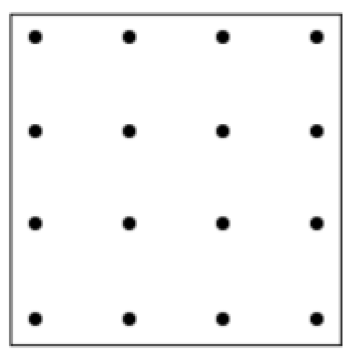
ח











שאלות 2 ו- 3:

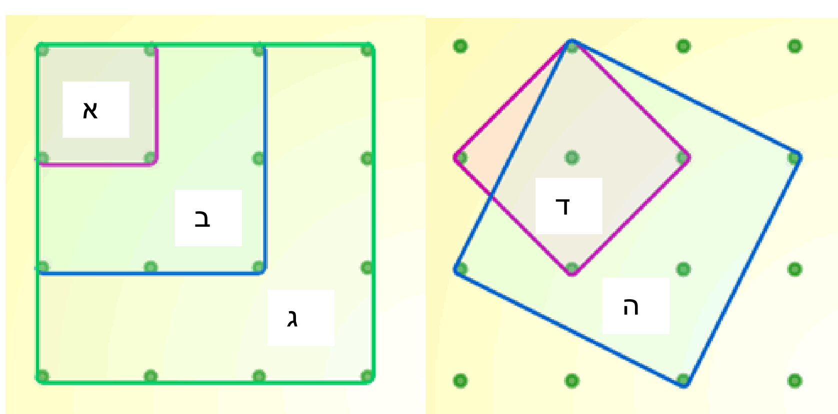
ניתן למצוא 5 משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים שונים (ראו לעיל משולשים א, ד, ו, ז, ח).

נארגן את שטחי המשולשים הנ"ל בטבלה:

משולש	**שטח בריבועי יחידה**
א	$\frac{1}{2}$
ב	1
ג	$1\frac{1}{2}$
ד	2
ה	3
ו	$4\frac{1}{2}$
ז	1
ח	4

שאלה 4:

ניתן לבנות 5 ריבועים שונים על לוח 4X4.



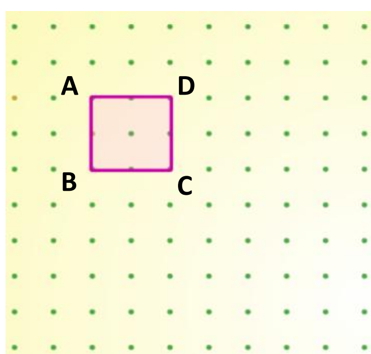
שאלות 5-7:

נארגן את שטחי הריבועים בטבלה:

ריבוע	שטח בריבועי יחידה
א	1
ב	4
ג	9
ד	2
ה	5

הצעות להרחבת הפעילות של דף 1:

מה יקרה אם נסתכל על ריבוע הנמצא על לוח שריג אחר במידות של 10 X 10 נקודות ועליו משורטט ריבוע של 2X2 יחידות אורך כך:



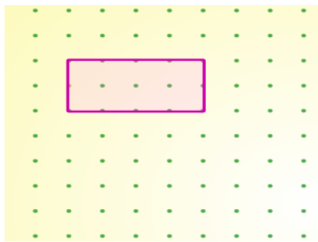
ונבקש:

א. הזיזו שני קודקודים בלבד כדי לקבל צורה חדשה (לאו דווקא ריבוע) ששטחה גדול פי 2 משטח הריבוע המקורי. אילו מצולעים ניתן לקבל?

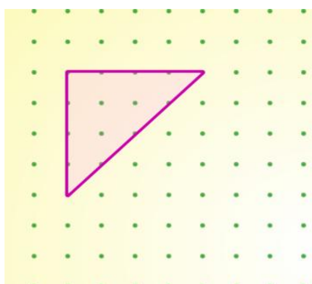
ב. מה יקרה אם נזיז רק קודקוד אחד להכפלת השטח?

סעיף א - הצעות לפתרונות:

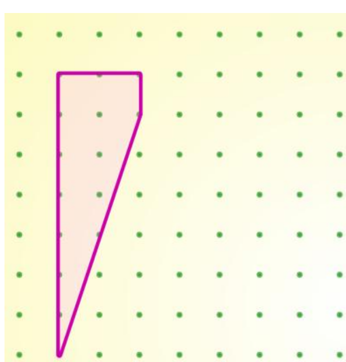
1. הזזת קודקודים C ו- D וקבלת מלבן ששטחו 8 יחידות:



2. הזזת קודקודים B ו- D וקבלת משולש ישר זווית ושווה שוקיים ששטחו 8 יחידות.

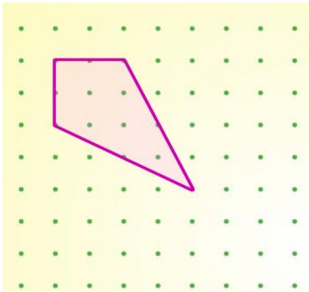


3. הזזת קודקודים B ו- C וקבלת טרפז ישר זווית ששטחו 8 יחידות.

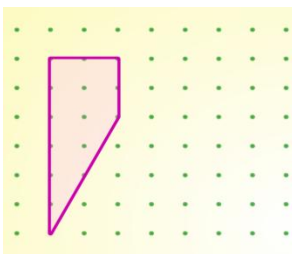


סעיף ב - הצעות לפתרונות:

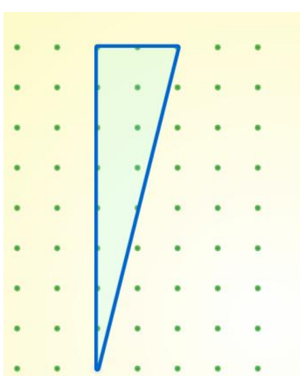
1. הזזת רק **קודקוד אחד** קודקוד C וקבלת דלתון שטחו 8 יחידות.



2. הזזת רק **קודקוד אחד** קודקוד B וקבלת טרפז ישר זווית שטחו 8 יחידות.



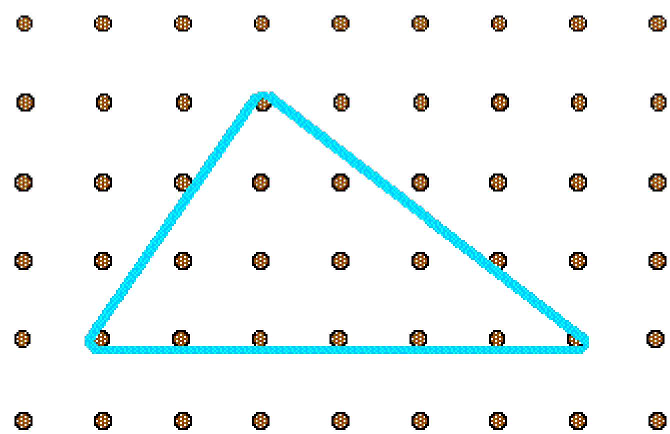
3. הזזת רק **קודקוד אחד** קודקוד C וקבלת משולש ישר זווית שטחו 8 יחידות.



וכך הלאה...

פעילות 2 (לתלמיד)

א. צרו מהמשולש הנתון משולש ישר זווית ע"י הזזת קודקוד אחד בלבד. (שימו לב - זהו המצב הראשוני של המשולש. ממצב זה משנים רק קודקוד אחד כל פעם, כלומר יש לחזור בכל סעיף למשולש המקורי.)



(הערה: אפשר לבדוק זווית ישרה בעזרת פינה של דף נייר)

ב. נסו ליצור משולש ישר זווית ע"י הזזת קודקוד אחר מזה שהזזתם בסעיף א'. האם הצלחתם? ציירו על דף "מנוקד".
האם יש עוד אפשריות? אם כן הראו.

ג. כמה משולשים ישרי זווית שונים (לא מחופפים) מצאתם ע"י הזזת קודקוד אחד בלבד כל פעם בלוח 9X6 נקודות? שרטטו את כולם.

ד. מצאו באוסף המשולשים שמצאתם בסעיף ג' משולשים שווי שטח.
כמה משולשים כאלה מצאתם? פרטו את מידותיהם ושטחם.

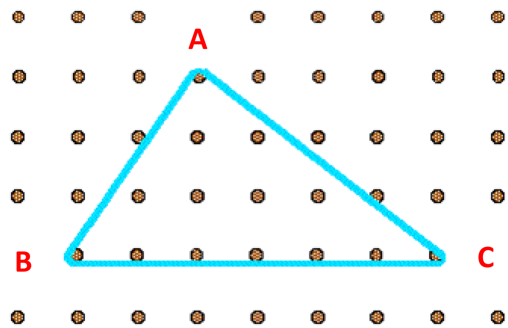
ה. האם תוכלו ליצור משולשים נוספים (לאו דווקא ישרי זווית) השווים בשטחם למשולשים שמצאתם בסעיף ד'? שרטטו אותם ופרטו את מידותיהם.

פעילות 2 - הערות למורה

סעיף ג - הצעות לפתרונות אפשריים

כמה משולשים ישרי זווית שונים (לא חופפים) אפשר ליצור ע"י הזזת קודקוד אחד בלבד כל פעם בלוח 9X6? שרטטו את כולם.

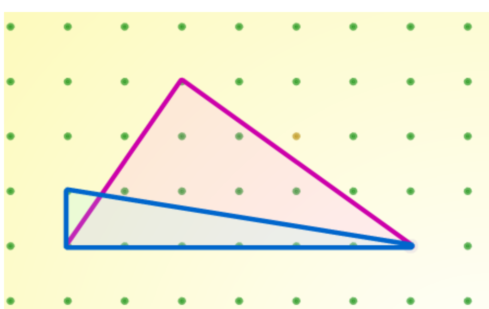
המשולש המקורי:



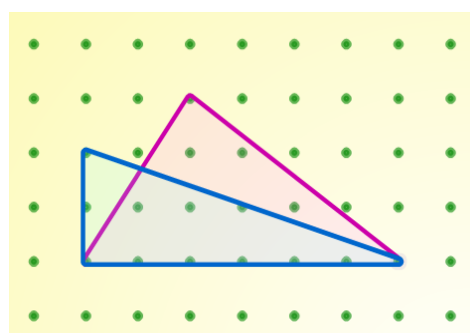
מקבלים 8 משולשים ישרי זווית שונים ע"י הזזת קודקוד אחד בלבד של המשולש המקורי:

ע"י הזזת קודקוד A מקבלים 5 משולשים ישרי זווית שונים **משולשים א-ה**. (המשולש המקורי בצבע סגול)

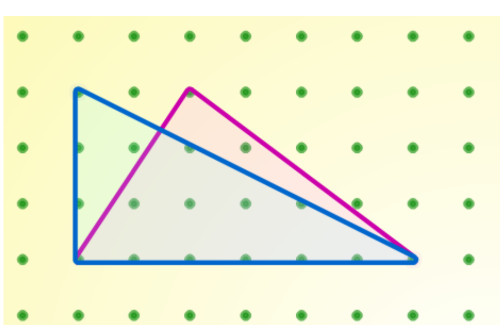
א



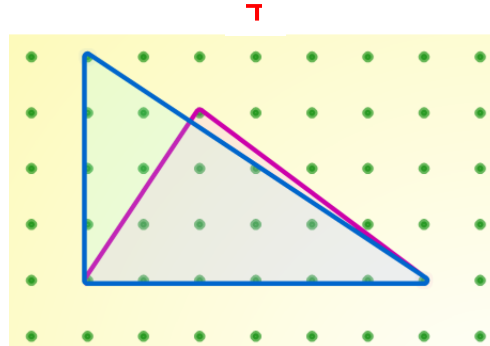
ב



ג

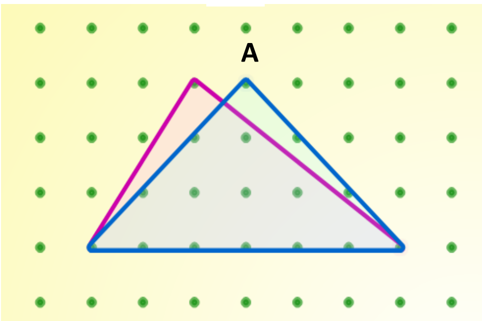


ד



משולש ה:

ה



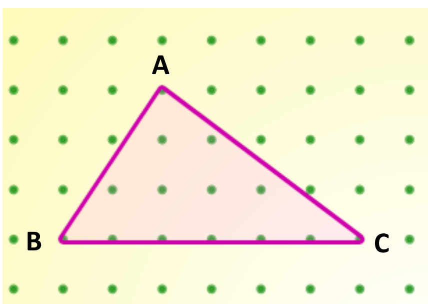
זווית A במשולש הכחול היא זווית ישרה.

<u>למורה</u>: אם נוריד גובה מקודקוד A נקבל שני משולשים ישרי

זווית ושווי שוקיים חופפים ולכן זווית A היא בת 90°.

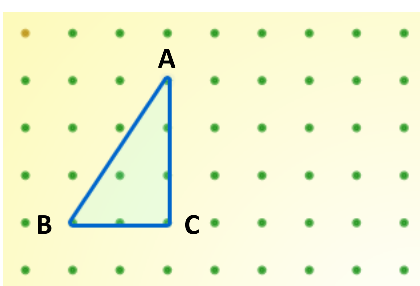
שלושה משולשים נוספים (ו-ח) מקבלים ע"י הזזת קודקודים B או C:

המשולש המקורי



משולש ו:

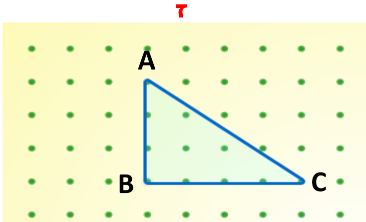
ו



נקבל ע"י הזזת קודקוד C

משולש ז:

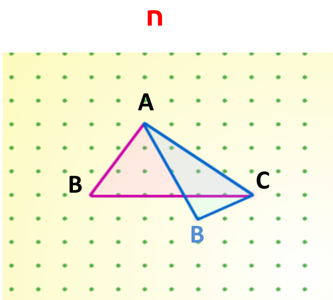
ז



נקבל ע"י הזזת קודקוד B

משולש ח:

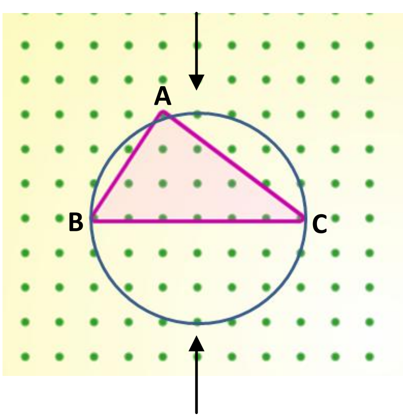
נקבל ע"י הזזת קודקוד B (המשולש הסגול הוא המשולש המקורי והמשולש הכחול מתקבל אחרי הזזת קודקוד B).



התלמידים ימצאו את המשולשים השונים בתהליך ניסוי וטעייה מושכל ובהפעלת דרך שיטתית. כמובן שיש דרכים מתמטיות שונות **למצוא** משולשים אפשריים, כמו העברת מעגל שקוטרו שווה לצלע המשולש (כל פעם על צלע אחרת) ומציאת כל הנקודות שנמצאות על ההיקף שלו. מכל נקודה כזו אפשר להעביר אל קצות צלע המשולש (קוטר המעגל) שני קטעים ולקבל זווית הקפית הנשענת על קוטר ולכן היא בת 90°. (כלומר התקבל משולש ישר זווית).

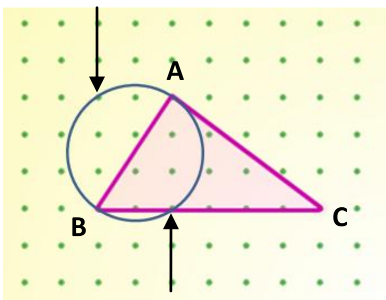
מקרה א - מעגל שקוטרו הוא הצלע BC.

כל אחת מהנקודות שעל היקף המעגל יוצרת משולש ישר זווית עם קצוות הצלע BC.
יש 2 משולשים המתקבלים עם הזזת קודקוד A: 2 נקודות שיוצרות אותו משולש, **משולש ה שלעיל** (הגובה שיוצא מנקודה A אל הצלע BC הוא 3 יחידות אורך). **כלומר בסה"כ משולש אחד ה.**



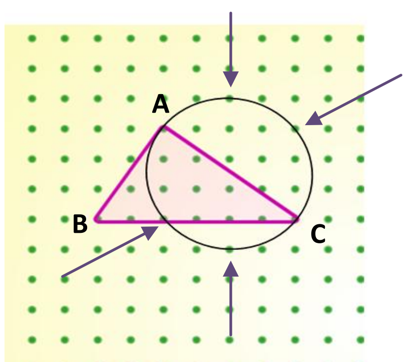
מקרה ב - מעגל שקוטרו הוא הצלע AB.

כל אחת מהנקודות שעל היקף המעגל יוצרת משולש ישר זווית עם קצוות הצלע AB. כלומר, אם נזיז את קודקוד C כך שימוקם על היקף המעגל - יש 2 נקודות כאלו - אך הן יוצרות אותו **משולש, משולש ו** שלעיל.



מקרה ג - מעגל שקוטרו הוא הצלע AC.

כל אחת מהנקודות שעל קוטר המעגל יוצרת משולש ישר זווית עם קצוות הצלע AC. כלומר, אם נזיז את קודקוד B כך שימוקם על היקף המעגל – יש 4 נקודות כאלו – נקבל 4 משולשים. אך יש 2 זוגות של משולשים זהים. כלומר, למעשה מתקבלים שני משולשים שונים - **משולשים ז, ו- ח** שלעיל.



פעילות 2 – סעיף ד - הצעות לפתרונות אפשריים

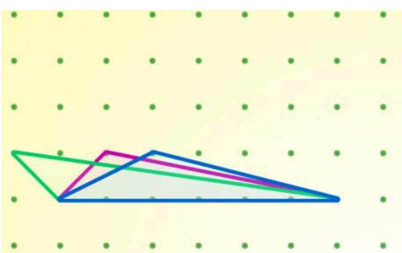
המשולשים שווי השטח הם:

משולש	מידות המשולש	שטח המשולש בריבועי יחידה
א	הניצבים 1X6	3
ו	הניצבים 2X3	3
ז	הניצבים 4X3	6
ב	הניצבים 2X6	6
ה	הניצבים 6X3	9
ג	הבסיס 6 והגובה אליו 3	9

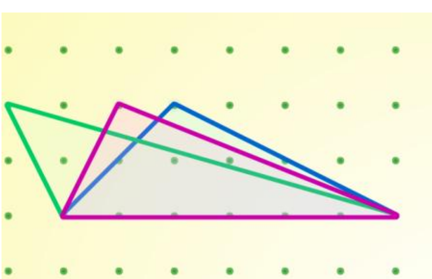
פעילות 2 – סעיף ה - הצעות לפתרונות אפשריים

משולשים נוספים (לאו דווקא ישרי זווית) השווים בשטחם למשולשים מסעיף ד' לדוגמה:

- משולשים נוספים ששטחם 3 יחידות שטח:
  כל המשולשים בעלי צלע של 6 יחידות אורך, שהגובה אליה הוא 1 יחידת אורך. ראו לדוגמה המשולשים בשרטוט.



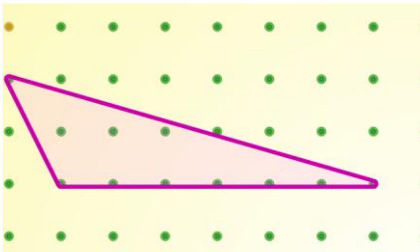
- משולשים נוספים ששטחם 6 יחידות שטח:
  כל המשולשים בעלי צלע אחת שאורכה 6 יחידות אורך ושהגובה אליה הוא 2 יחידת אורך. ראו לדוגמה המשולשים בשרטוט.



וכך הלאה...

ניתן לחשב את שטחי המשולשים באיסטרטגיות שונות.

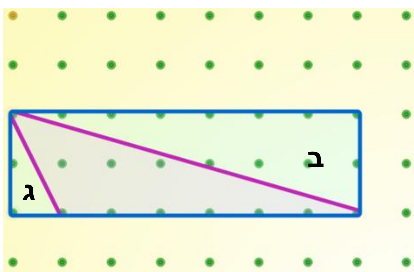
הדרכים לחישוב שטח המשולש בשרטוט (6 יחידות שטח):



א. שימוש בנוסחת חישוב שטח משולש:

$$\frac{\text{הגובה לצלע} \times \text{צלע}}{2} \quad \text{כלומר} \quad \frac{6\times 2}{2} = 6$$

ב. חישוב שטח המלבן החוסם (כחול) את המשולש (הסגול) וחיסור שטחי המשולשים "המיותרים" ב ו- ג.



ג. שימוש במשפט פיק:

A שטח מצולע המשורטט על נקודות שריג כך שקודקודיו מונחים על נקודות השריג;

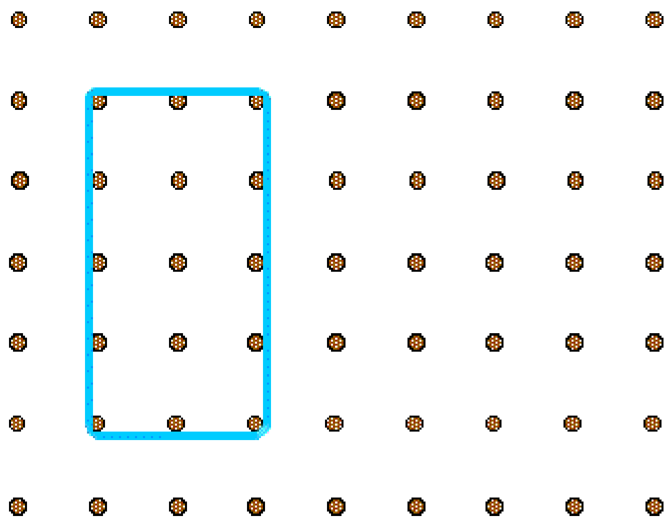
i מייצג את מספר הנקודות בתוך המצולע; b מייצג את מספר הנקודות על הצלעות:

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

נציב בנוסחה ונקבל: $\text{נקודות בפנים } 3 + \frac{8 \text{ נקודות על הצלעות}}{2} - 1 = 6$

פעילות 3 (לתלמיד)

א. צרו מלבן חדש, ע"י הזזת 2 קודקודים בלבד, כך שכל אחת מצלעותיו גדולה פי שניים מצלעות המלבן הנתון.



ב. כמה מלבנים שונים הצלחתם לבנות? הסבירו.

ג. כיצד השתנה שטחו של המלבן מסעיף ב בהשוואה לשטחו של המלבן ה"חדש" מסעיף א? הסבירו.

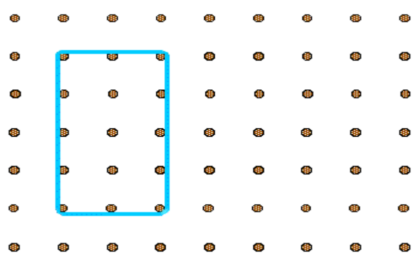
ד. כיצד ישתנה שטחו של מלבן שכל אחת מצלעותיו גדולה פי שלושה מצלעות המלבן הנתון (מסעיף א)? הסבירו.

ה. כיצד ישתנה שטחו של מלבן שכל אחת מצלעותיו גדולה פי עשרה מצלעות המלבן הנתון (מסעיף א)? הסבירו.

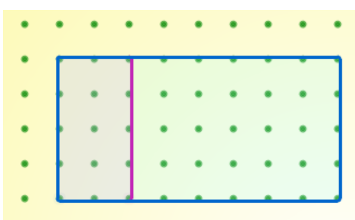
פעילות 3 - הערות למורה

הצעות לפתרונות אפשריים

א. צרו מלבן חדש כך שכל אחת מצלעותיו גדולה פי שניים מצלעות המלבן הנתון ע"י הזזת 2 קודקודים בלבד.



פתרון: מידות המלבן הנתון הן 4X2 ולכן מידות המלבן ה"חדש" עם צלעות גדולות פי 2 הן 8X4 בשרטוט:



ג. כיצד השתנה שטחו של המלבן "החדש" מסעיף ב בהשוואה לשטחו של המלבן הנתון מסעיף א? הסבירו.

נניח שמידות המלבן הנתון הן a X b וכל אחת מהן גדלה פי 2 - נקבל מלבן חדש (מסעיף ב) שמידותיו הן 2a X 2b ולכן שטחו יהיה 2^2 a X b כלומר גדול פי 4 משטח המלבן הנתון.

ד. הגדלת הצלעות פי 3 תיתן שטח גדול פי 3^2.

ה. הגדלת הצלעות פי 10 תיתן שטח גדול פי 10^2 וכך הלאה.