4.1 חוקיות במספרים ובפעולות חשבון למדריך

מטרות

- זיהוי חוקיות בתרגילים.
- תרגום חוקיות לתבניות.
- הוכחות של חוקיות על-ידי מניפולציות אלגבריות.
- הוכחות ויזואליות של חוקיות.
- מציאת קשרים בין מספרים, העוקבים להם והקודמים להם.
- הכללה של הכללות.

מקורות

Friedlander, A., Hershkowitz, R. & Arcavi, A. (1989). Incipient "algebraic" thinking in pre-algebra students. In *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, (pp. 283-290). Paris, France.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM.

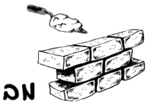
רזניק, צ. וטבת מ., (2002). ***מתימחשב*** *: בארמון המתמטיקה – אלגברה לכיתה ז' בעזרת מחשב חלק ג.* רחובות: מכון ויצמן למדע.

חומרים

דפי פעילות לתלמיד (6 עמודים).

זמן משוער

שני שיעורים.



מבנה הפעילות

1. שלושה עוקבים (שאלות 1–2) – עבודה בקבוצות ודיון.
2. ארבעה עוקבים (שאלות 3–8) – עבודה בקבוצות ודיון.
3. הוכחות ויזואליות של הפרש ריבועים (שאלות 9–10) – עבודה בקבוצות ודיון.
4. מכפלה שווה להפרש או לסכום (שאלות 11–12) – עבודה בקבוצות ודיון.

1. שלושה עוקבים (שאלות 1–2) – עבודה בקבוצות ודיון.

בכל אחת מן המשימות בפעילות זו מגלים חוקיות במספרים ובפעולות חשבון. בחלק זה של הפעילות מוצאים, בשלב ראשון, קשר בין הממוצע של שלושה מספרים עוקבים, לבין המספר האמצעי. בשלב שני, מרחיבים את החוקיות לשלושה מספרים בדילוגים שווים, וליותר משלושה מספרים בדילוגים שווים.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- דיון בבניית התבניות להוכחת החוקיות.

ניתן להוכיח את החוקיות בעזרת תבניות אלגבריות. התבניות שונות, לפי בחירת המשתנה. בדרך כלל מעדיפים לבחור כמשתנה את המספר הקטן מבין שלושת המספרים ומקבלים:

$$[n + (n + 1) + (n + 2)] : 3$$

$$(3n + 3) : 3 = n + 1.$$

דרך זו אמנם מוכיחה את החוקיות, כי אפשר לראות שתוצאת החילוק היא אכן המספר האמצעי, אבל היא אינה מבהירה את סיבת התופעה. לעומת זאת, אם בוחרים כמשתנה את המספר האמצעי מקבלים:

$$[(n – 1) + n + (n + 1)] : 3$$

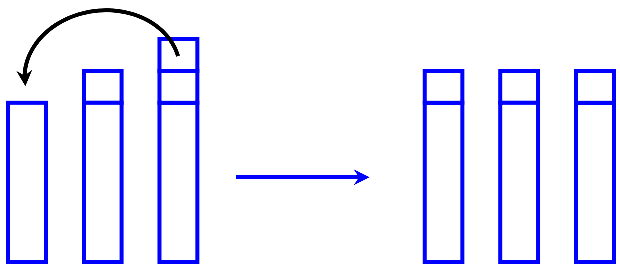
$$3n : 3 = n$$

דרך זו של בחירת המשתנה מסבירה את קבלת הממוצע, במקרה זה ברור כי התוספת (הדילוג) במספר הימני בשלישיה מתקזזת עם גריעת הדילוג במספר השמאלי. דרך זו מסבירה באותו אופן גם את ההכללות הנוספות לגבי שלשות של מספרים בדילוגים אחרים, או לגבי מספר אי-זוגי אחר של מספרים בדילוגים שווים.

בדיון מתייחסים לסוגים שונים של הוכחות של חוקיות:

- הוכחות המבוססות על מניפולציות אלגבריות שבהן מתקבלת בסוף התהליך תוצאה המוכיחה את ההכללה, אבל מהלך ההוכחה אינו מבהיר את הסיבה לקיום התכונה המוכחת (למשל, בדוגמה הראשונה למעלה).
- הוכחות המבוססות על מניפולציות אלגבריות – הפעלת שיקולים או שרטוטים, שבהן שלבי ההוכחה מבהירים את סיבת הטענה (למשל, בדוגמה השנייה למעלה).
- הוכחות ויזואליות המסתמכות על שרטוט או גרף, שהן תמיד מסבירות.

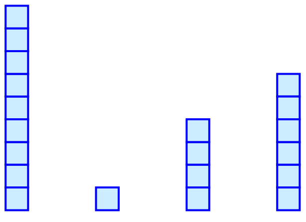
להלן הוכחה ויזואלית של ממוצע שלושת העוקבים:



ההוכחה הויזואלית הזו מסבירה את הסיבה לקיום הטענה, ואף את המניפולציות האלגבריות שבהוכחה האלגברית.

- דיון במושג הממוצע.

ניתן להרחיב את הדיון הקודם לדיון על מושג הממוצע, שהוא מושג שמטפלים בו בבית הספר היסודי. הייצוג הויזואלי מדגים את משמעות המושג. כל עמודה מתארת מספר. ניתן להגיע לגובה אחיד של כל העמודות על-ידי העברת חלקים מחלק מן העמודות לעמודות אחרות (האנלוגיה בחישובים היא הקטנת חלק מן המספרים והגדלת מספרים אחרים). גובהם האחיד של העמודות שעברו שינוי זה, הוא הממוצע.



אפשר לתת את השרטוט שמשמאל, ולבקש למצוא את הממוצע של ארבעת המספרים, על-ידי העברת ריבועים מעמודה לעמודה, ולבדוק את התוצאה בדרך חישובית.

- דיון על אפשרויות להרחבת פעילות לכיוונים שונים.

דנים על ניצול הזדמנויות בהוראה, ו"זריעת זרעים" גם במצבים שהם לא שייכים לנושא המרכזי הנלמד – כמו למשל, ההרחבה של הדיון הקודם למושג הממוצע, שחרג מן הדיון המרכזי בחוקיות. מתייחסים לכך שעל-ידי ניצול הזדמנויות כאלה יוצרים בדרך כלל קישוריות בין נושאים ותחומים, ומונעים מידור. קישור בין נושאים ותחומים בדרך כלל מאפשר תובנה טובה יותר של המושגים, כי הם מובאים באופנים שונים ומנקודות מבט שונות. קישוריות נותנת גמישות בגישה לנושאים מתמטיים. בדיון הזה יש רפלקציה על הדיון הקודם.

2. ארבעה עוקבים (שאלות 3–8) – עבודה בקבוצות ודיון.

משימה זו מתחילה עם חוקיות המתקיימת בפעולות חשבון בין ארבעה עוקבים. מרחיבים לארבעה מספרים בדילוגים של 2, ושל 3, ומכלילים את ההכללות לדילוגים של d. במהלך ההכללות מבקשים השערות למקרים השונים, ובודקים אותן בעזרת דוגמאות. בסוף המשימה (בשאלה 8) מתייחסים לחוקיות אחרת בין ארבעה מספרים עוקבים. ההתייחסות היא בכיוון הפוך לקודם. בעוד שבחוקיות הקודמת מתחילים עם מספרים ואחרי גילוי החוקיות מוכיחים אותה בעזרת תבניות, פה יוצאים מתבניות ומסיקים מהן את החוקיות.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון בהשערות על סמך דוגמאות.

בתחילת הפעילות משערים השערות לגבי חוקיות על-פי מספר דוגמאות. ההשערות בדרך כלל מצליחות, כי התוצאות בתרגילים המובאים כדוגמאות הן מספרים קבועים.

כך למשל, הפרשי המכפלות עבור ארבעה מספרים עוקבים הוא תמיד 2, ועבור ארבעה מספרים בדילוגים של 2, הפרש המכפלות הוא 8.

לאחר שתי ההכללות האלה, מבקשים השערה לגבי הפרש המכפלות של ארבעה מספרים בדילוגים של 3. הכללה זו דורשת הכללה של ההכללות, ויש מספר דרכים לערוך שיקולים לצורך ההשערה.

- אפשר להתבונן בשני המספרים שהתקבלו (2 ו- 8), ולנסות למצוא מספר חדש המתאים לסדרת שני המספרים האלה. מובן שיש הרבה אפשרויות המתקבלות על הדעת, וזו הייתה המטרה במטלה הזו, לשער השערות שונות ולהפריך אותן על-ידי דוגמאות. הוספת מספר נוסף לסדרה, אחרי מציאת ההפרש הקבוע עבור דילוגים של 3, מורידה את מספר האפשרויות ההגיוניות להשערות מתאימות.

- אפשר להתבונן בהוכחה האלגברית עבור המקרה של דילוגים של 2.

תבניות לארבעה מספרים בדילוג של 2 הן: $a,\ a + 2,\ a + 4,\ a + 6$

הפרש המכפלות הוא: $(a + 2)\,(a + 4) – a(a + 6) =$

$$a^2 + 4a + 2a + 8 – a^2 – 6a = 8$$

בוחנים את מהלך ההוכחה ורואים כי 8 הוא תוצאה של מכפלת 2 ו- 4 שהם חלק מן התבנית של שני המספרים האמצעיים. בוחנים גם את הסיבה לכך שסכום שאר האיברים הוא אפס $(2 + 4 = 6)$.

מתבוננים בתבניות לארבעה מספרים בדילוגים של 3: $a,\ a + 3,\ a + 6,\ a + 9$

ורואים כי מתקיימת בהן אותה חוקיות: $(3 + 6 = 9)$, ומשערים כי התוצאה תהיה $3 \cdot 6$.

בשאלה 5ד מתבקשים שיקולים כאלה במפורש. עידוד להתבוננות כזו בתבניות, כלומר, לא רק בתוצאה הסופית של פישוט אלא גם בכל שלביו, מפתח תובנה מספרית ואלגברית.

שאלה 6, בודקת אם אמנם נעשתה הכללה של ההכללות, ואם יש יכולת לישמה למקרים פרטיים, ללא צורך לעבור מחדש את כל התהליך לגבי כל רביעיה של מספרים בדילוגים שווים.

- דיון במעבר מן התבנית לטענה מילולית.

בשאלה 8 ניתנת טענה הכתובה בדרך אלגברית בעזרת שוויון בין שתי תבניות. בפעילויות הקודמות מתחילים עם מספרים ואחרי גילוי החוקיות מוכיחים אותה בעזרת תבניות. בשאלה זו יוצאים מתבניות ומסיקים מהן את החוקיות.

דנים בכך שאחת מן היכולות הדרושות לתובנה אלגברית היא היכולת לעבור בין ייצוגים הלוך ושוב. כדי לומר במילים את הטענה הכלולה בשוויון בין התבניות, יש להסתכל בתבניות גם באופן פרטני (יש ארבעה מספרים. המספר השני גדול ב- 1 מהראשון וכן הלאה) וגם באופן גלובלי (סכום של מספרים עוקבים) בדרך כלל קל יותר לראות את הפרטים, אבל ללא הראייה הגלובלית קשה מאוד לנסח במילים את הטענה המובעת בעזרת תבניות.

מתייחסים לכך שכאשר הטענות מובעות במילים, הן מפתיעות. כי הן אומרות ש**לכל** ארבעה מספרים עוקבים מתקיים שוויון שאינו אינטואיטיבי. אבל אם מסתכלים בתבניות ובוחנים גם את מהלך הפישוט שלהן, ההפתעה לפעמים נעלמת ואת מקומה תופסת ההבנה. בכיתות מתקדמות מבקשים לנסות למצוא טענות נוספות שאפשר להביע בעזרת מספרים עוקבים. אפשר לתת אגף אחד של השוויון. למשל: $n(n + 2) – (n + 1)(n + 3)$. את התבנית המפושטת אפשר להביע כך: $n + (n + 3)$.

כלומר, כדי ליצור סיטואציה שיש בה חוקיות אפשר לקחת תבנית, ולפשט אותה או ל"ארגן" אותה אחרת. אם התוצאה "מעניינת" או מפתיעה, מציגים אותה על-ידי מספר דוגמאות מספריות ומבקשים מן התלמידים לגלות את החוקיות ולהוכיח אותה.

3. הוכחות ויזואליות של הפרש ריבועים (שאלות 9–10) – עבודה בקבוצות ודיון.

הנוסחה $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$, ובפרט הנוסחה $a^2 – 1 = (a + 1)(a – 1)$, מזמנות אפשרויות רבות של טענות לגבי מספרים. אם מציבים מספרים במקום המשתנים מתגלה חוקיות בין מספרים. שאלות 9 ו- 10 מתייחסות לחוקיות המתבססת על נוסחת ההפרש של שני ריבועים.

באופן זה אפשר לבנות אוספי תרגילים שהם דוגמאות מספריות לאותה נוסחה.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- דיון בהוכחות ויזואליות.

אם במשימה הראשונה בפעילות זו לא הייתה התייחסות להוכחות ויזואליות, מתייחסים אליהן במשימה זו. הוכחה ויזואלית היא בדרך כלל הוכחה אינטואיטיבית, ללא מילים. שלא כמו הוכחות אלגבריות שבהן המעבר משלב לשלב לא תמיד מסביר, ההוכחה הויזואלית היא תמיד מסבירה. מתייחסים לכך שתלמידים שונים מעדיפים גישות שונות. ישנם תלמידים המעדיפים גישה אלגברית ויש כאלה המעדיפים גישה גרפית ויזואלית, לכן חשוב שדרכי ההוראה יהיו מגוונות.

דנים בשאלה האם שרטוט יכול בכלל לשמש כהוכחה כללית. מורים רבים טוענים (על סמך ניסיון בלימודי גיאומטריה בעבר), כי שרטוט אינו יכול לשמש כהוכחה כללית. חשוב לציין כי אם לא מייחסים

- דיון במבנה הפעילות שמטרתו להפעיל סוגים שונים של חשיבה.

למשימות בפעילות זו יש מבנה די אחיד: בודקים דוגמאות (למשל, בשאלות 1א, 3א-ב, 9א) ← מגלים חוקיות (למשל, בשאלות 1ג, 3ג, 9ב) ← מוכיחים את החוקיות בשפה אלגברית (למשל, בשאלות 4ד, 5ד) או בהוכחה ויזואלית (למשל, בשאלות 9ד, 10ה), מיישמים את החוקיות על-ידי חשיבה הפוכה (למשל, בשאלות 1ו, 6, 9ה, 10ו). מבקשים מן המשתלמים לזהות את סוגי החשיבה הנדרשים לכל אחת מן המשימות. מתייחסים לחשיבה אלגוריתמית, להכללה, להנמקה והוכחה, ולחשיבה הפוכה.

- דיון בסימן השוויון ותפקידיו.

דנים ברעיון כי לסימן השוויון תפקידים רבים ותלמידים רבים מתבלבלים בין התפקידים השונים.

מבקשים דוגמאות.

בכל אחת מן דוגמאות הבאות סימן השוויון משמש בתפקיד אחר:

א. $3 + 4 =$ (משמעות של ביצוע פעולה ויצירת תוצאה).

ב. $3 + 4 = 2 + 5$ (משמעות של שוויון בין תוצאות במקרה מסוים).

ג. $3x + 4 = 10$ (משמעות של משוואה – שוויון עבור מספר או מספרים מסוימים).

ד. $a^2 – 1 = (a + 1)(a – 1)$ (משמעות של זהות – שוויון לכל הצבה).

ה. $s = vt$ (משמעות של נוסחה – האותיות מייצגות מספרים עם יחידות בעלי משמעות במציאות).

לפעמים, כדי להדגיש את התפקידים השונים, מסמנים את הזהות שבדוגמה ד בסימן $\equiv$.

תלמידים רבים אינם עוברים מן השלב של הדוגמה הראשונה שבה השוויון אומר שיש לפעול, אל השלב של הדוגמה השנייה שבה השוויון הוא יחס (רפלקסיבי, סימטרי וטרנסיטיבי). לכן חשוב כבר בבית הספר היסודי לתת תרגילים שבהם "התוצאה" כתובה בצד שמאל. כמו למשל, $10 = \_\_\_ + \_\_\_$, או שמבקשים לקבוע שוויון או אי-שוויון בין שני תרגילים.

מסתבר כי אפילו בזהות כמו בדוגמה ד, יש הבדל גדול ברמת הקושי לגבי תלמידים, אם מחליפים את הסדר בין שני האגפים.

$a^2 – 1 = (a + 1)(a – 1)$ שונה מ- $(a + 1)(a – 1) = a^2 – 1$. כי השוויון לא נתפס כסימטרי.

4. מכפלה שווה להפרש או לסכום (שאלות 11–12) – עבודה בקבוצות ודיון.

גם במשימה הזו הלומדים מתבקשים למצוא חוקיות על סמך סדרת שוויונים, ולהוכיח אותה.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- "הוכחה על כנפי דוגמה".

לא בכל מקרה יש צורך לעבור לתבניות כדי להשתכנע בנכונות הטענה לכל מספר. אם נקח לדוגמה את הטענה שבתרגיל 11, אפשר להשתכנע שהיא נכונה אם נרשום את השוויון קצת אחרת. $\frac{8-7}{7\cdot 8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{7}$. גם את נכונות הטענה שבתרגיל 12 אפשר להראות על-ידי מעבר לשבר מעורב ושימוש בחוק הפילוג. $21+\frac{21}{20}=21(1+\frac{1}{20})$.

כדאי לציין שתי נקודות חשובות.

- "הוכחה על כנפי דוגמה" אמנם יכולה לשכנע בנכונות הטענה, אך להבדיל ממקרה השרטוט שנידון קודם, אינה מהווה הוכחה כללית. בבית הספר היסודי, לעיתים, האפשרויות של שימוש בהוכחות מסוג אחר מצומצמות, ולכן דרך זו מקובלת יותר מאשר בשלבי לימוד מאוחרים יותר.
- ההבדל בין הבאת דוגמה מספרית אחת ובין "הוכחה על כנפי דוגמה" הוא דק (לפעמים הוא מתבטא רק באינטונציה), אך חשוב. על המורה לפתח יכולת הבחנה בין השניים ולהדגיש נקודה זו.

דנים בכך שבעלי חוש למספרים ובעלי טביעת עין לחוקיות ומבנים, יכולים ליעל את עבודתם מאוד, כי החוקיות מאפשרת קיצורי דרך. מבקשים מן המשתלמים לתת דוגמאות מן ההוראה למקרים שבהם חוקיות מייעלת את העבודה.