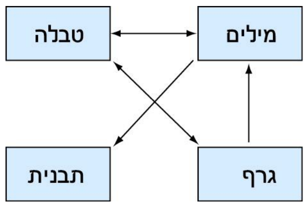
1.1 במעבדה למדריך

מטרות

- קישור בין מתמטיקה לחיי יום יום.
- הכרת ייצוגים שונים (טבלה, גרף ותבנית) לתיאור מתמטי של תופעה, וקריאת המידע מן הייצוגים השונים.
- מעבר בין ייצוגים.



- השוואה בין תהליכי שינוי על- ידי תיאורם באמצעות אותו ייצוג.
- הצגה מתמטית של ייצוגים שונים ללא קשר לסיפור, ומעבר ביניהם.
- הצבה בתבניות.
- פתרון משוואות.
- עיסוק במספרים חיוביים ושליליים, בשלמים ובשברים.

מקורות

הירשפלד, נ., רובינזון, נ., רדאי, א., ואבן, ר. (1996). מעבר בין ייצוגים. *תיק אלגברה*. רחובות: מרכז מורים מנור, מכון וייצמן למדע.

הירשפלד, נ., רובינזון, נ., רדאי, א., ואבן, ר. (1996). פנים רבות ל"משתנה". *תיק אלגברה*. רחובות: מרכז מורים מנור, מכון וייצמן למדע.

פרידלנדר, א., וטבח, מ.(2001). קידום חשיבה רב ייצוגית בתחילת לימודי האלגברה. *על"ה, (סתיו)27*, ע' 27–20.

קרסנטי, ר., והרכבי, א. (2003). *אפיוני למידה וחשיבה של תלמידים "חלשים" במתמטיקה: דו"ח מסכם לשנים 2002–2000*. http://stwww.weizmann.ac.il/manor/index-12.html

חומרים

מפגש ראשון: דפי פעילות לתלמיד (6 עמודים).

מפגש שני: דפי פעילות לתלמיד (5 עמודים).

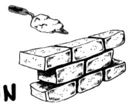
שני משחקים – רביעיות משוואות שברים (נספח א'),

רביעיות משוואות מספרים מכוונים (נספח ב').

זמן משוער

מפגש ראשון: שני שיעורים.

מפגש שני: שני שיעורים.



מבנה הפעילות

מפגש ראשון – ארבעה ייצוגים והשוואות

1. התייחסות נפרדת לכל אחד מארבעה ייצוגים: מילולי, מספרי, גרפי, אלגברי (שאלות 1–7) – עבודה בקבוצות ודיון.
2. רפלקציה על הייצוגים השונים – דיון כיתתי.
3. השוואות בין תהליכי שינוי על-ידי תיאורם באותו ייצוג (שאלות 8–12) – עבודה בקבוצות ודיון.
4. בחירת הייצוג העדיף (שאלות 13, 14) – עבודה בקבוצות ודיון.

מפגש שני – בעקבות הפעילות במעבדה

1. התאמה בין גרף לתבנית והצבה בתבניות (שאלות 1–3) – עבודה בקבוצות ודיון.
2. פתרון משוואות בדרך אלגברית ו/או גרפית (שאלות 4–7) – עבודה בקבוצות, משחק, הטרמה ודיון
3. פתרון אי-שוויון (שאלות 8–10) – שאלות ותשובות במליאה.

מפגש ראשון – ארבעה ייצוגים והשוואות

1. התייחסות נפרדת לכל אחד מארבעה ייצוגים: מילולי, מספרי, גרפי, אלגברי (שאלות 1–7) – עבודה בקבוצות ודיון.

קוראים את הסיפור, ועונים על השאלות 1–5.

השאלות מזמנות אפשרות להתיידד עם כל ייצוג באופן נפרד. בכל ייצוג נשאלות שאלות ישירות, הדורשות קריאה בלבד או חישוב, ושאלות הפוכות, הדורשות הפעלת שיקולים או שימוש בכלים אלגבריים. חלק מן השאלות דורשות חישובים במספרים שליליים, וחישובים בשברים.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- התייחסות למילה "לדעתכם" המופיעה בשאלות 1א, 2א, 4א.

בהתייחסות אפשר לדון על רציפות לעומת בדידות (במיוחד בייצוג של הטבלה), על דיוק לעומת קירוב (במיוחד בייצוג של הגרף), על קצב קבוע לעומת קצב משתנה.

בקורס הניסוי, המורים אמרו שאם בטבלה הטמפרטורה ירדה בדילוגים שווים של 20^0C, אז קצב ירידת הטמפרטורה חייב להיות קבוע. הם לא לקחו בחשבון שהטמפרטורה יכולה להשתנות ברווח בין שתי דקות.

- התייחסות לנושא של אוריינות. למשל, חלק מן הנתונים שנרשמו בהתחלה יבואו לידי שימוש בשלב מאוחר, ויש לחזור ולקרוא מן ההתחלה כדי לענות על השאלות.
- התייחסות לדרכי הפתרון השונות.

כדי לענות על השאלות ההפוכות (למשל, 1ב, 2ב, 5ב), חלק מן המורים בקורס הניסוי תרגמו את הסיטואציה למשוואה, ופתרו אותה, חלקם הפעילו שיקולים מספריים, וחלקם עברו לייצוג אחר שנוח להם, למשל לטבלה.

- התייחסות לשאלה 3.

אם המורים טוענים כי הטמפרטורות של קבוצות I ו- II לא השתוו, לא כדאי לתקן את הטעות בשלב זה. כדאי יהיה לחזור אליה בשלבים הבאים של המפגש, כאשר מטפלים בהשוואות בתוך הייצוגים הגרפיים ובתוך הייצוגים האלגבריים.

כל המורים בקורס הניסוי התייחסו למספרים שלמים בלבד, וטענו כי הטמפרטורות של קבוצות I ו- II לא השתוו.

- התייחסות לשאלה 5.

אין צורך בשלב זה להזכיר איך פותרים משוואה ריבועית. אפשר לפתור את המשוואה על-ידי הפעלת שיקולים או על-ידי ניסוי וטעייה.

2. רפלקציה על הייצוגים השונים – דיון כיתתי.

בודקים ביחד את שאלות 6 ו- 7. תוך כדי הבדיקה, ניתן לדון על היתרונות והחסרונות של כל ייצוג.

להלן מספר נקודות שהועלו בכיתות הניסוי.

הייצוג	יתרונות	חסרונות
מילולי	קל להבנה.	לפעמים דורש שיקולים קשים. לפעמים קשה להביע את המידע בצורה מילולית (ראו קבוצות III, ו- IV).
טבלה	ידידותית, נותנת מידע נקודתי מיידי.	בדידה – המידע הניתן אינו שלם.
גרף	רואים תמונה כללית: חיוביות, שליליות, עלייה, ירידה, קצב קבוע, קצב משתנה, נקודות מקסימום, נקודות מינימום.	המידע הנקודתי שהוא נותן, מקורב.
תבנית	קצרה, מכילה את כל המידע, ומאפשרת למיומנים לשלוף את כל המידע.	המידע לפעמים מסתתר, ודרושה מיומנות אלגברית לאתר אותו.

3. השוואות בין תהליכי שינוי על-ידי תיאורם באותו ייצוג (שאלות 8–12) – עבודה בקבוצות ודיון.

מטרת השאלות האלה לוודא שהמורים יודעים לעבור מייצוג לייצוג, בדרך ישירה או בעזרת תיווך של ייצוג אחר.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- דיון בתכונה או בתופעה הבולטת בכל ייצוג.

מתייחסים לתכונות שהועלו בטבלה שלעיל.

4. בחירת הייצוג העדיף (שאלות 13, 14) – עבודה בקבוצות ודיון.

בחלק זה של העבודה, השאלות אינן מכוונות ליצוג מסוים, וכל מורה יעבוד עם הייצוג שהוא בוחר.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- התייחסות ליתרונות ולחסרונות של כל ייצוג, מנקודת המבט של ההשוואה.

למשל, אפשר להתייחס לשאלה 13א: האם במהלך הניסוי היה זמן שבו השתוו הטמפרטורות בקבוצות I ו- II? לפי הטבלה, שהיו בה מספרים שלמים, היה נראה שהטמפרטורות לא השתוו (חסרון של הטבלה). בשלב זה הגרף מראה כי הטמפרטורות משתוות (יתרון של הגרף). אולם על סמך הגרף לא ניתן למצוא את זמן ההשתוות המדויק (חסרון של הגרף). למציאת הזמן המדויק חייבים להשתמש בכלים אלגבריים (יתרון של התבנית).

- דיון על ההתאמה של הכלי האלגברי לשאלה הנשאלת.

למשל, השאלה: "מתי הטמפרטורות השתוו?", דורשת מציאת x , כלומר פתרון משוואה. השאלה: "מה הייתה הטמפרטורה כאשר הטמפרטורות השתוו?", דורשת הצבה באחת התבניות המרכיבות את המשוואה.

- מזכירים את הנוסחה שבעזרתה פותרים משוואה ריבועית.

מתייחסים לפתרונות המתאימים לתוכן הבעיה לעומת הפתרונות שאינם מתאימים לתוכן הבעיה.

מפגש שני – בעקבות הפעילות במעבדה

1. התאמה בין גרף לתבנית והצבה בתבניות (שאלות 1–3) – עבודה בקבוצות ודיון.

המטרה בעבודה בסעיף זה היא הצבה בתבניות והקשר לגרף.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- דרכים שונות להתאמה בין התבניות לגרפים שלהן (שאלה 1):

א. הצבה בתבניות, מציאת הנקודות המתאימות במערכת הצירים ושיוכן לגרף.

ב. מציאת נקודות על הגרף ובדיקה לאיזה תבנית הן מתאימות.

ג. הסתכלות גלובלית על הגרף בהבנה שהגרף של תבנית ממעלה ראשונה הוא קו ישר, ותבנית ריבועית נותנת פרבולה, ואחר כך שיוך כל גרף לתבנית שלו בהתאם למבנה שלה(symbol sense).

- התייחסות לשאלה 3א.

השאלה עוסקת במבנה התבניות (symbol sense) ובקשר שלהן לגרף (graph sense)

כאשר מציבים בתבניות ממעלה ראשונה מספרים בדילוגים שווים, מקבלים מספרים בדילוגים שווים, ולכן אין צורך להציב את כל המספרים. בדיון מראים את ההוכחה לכך באופן פרטי, ומדגישים את היכולת של האלגברה להראות הכללה של מקרים פרטיים.

לדוגמה: הצבה של a בתבנית $-20 + 5x$ תיתן $-20 + 5a$

הצבה של $a + 4$ בתבנית תיתן $-20 + 5(a + 4)$

וההפרש ביניהם ייתן $-20 + 5(a + 4) - (-20 + 5a) = 20$

כלומר ההפרש בין המספרים המתקבלים מהצבת שני מספרים הנמצאים בדילוג של 4 הוא קבוע (20).

שאלות נוספות אפשריות.

- מה יהיה ההפרש בהצבת מספרים עוקבים בתבניות מהצורה $ax + b$? איך רואים הפרש זה בגרף? מיהו המספר המייצג הפרש זה בתבנית?
- כיצד המספר החופשי שבתבנית (b) בא לידי ביטוי בגרף? הסבירו.

- התייחסות לשאלה 3 ב (בקבוצות מתקדמות).

כוונת השאלה להפנות תשומת לב לסימטריה של הפרבולה, שאפשר לראות אותה בגרף. ציר הסימטריה הוא $x = 3.5$ ולכן מספיק להציב מספרים מצד אחד של הציר ולקבל תוצאות של נקודות סימטריות. מטרת שאלה זו ודומיה לקשר בין הייצוגים, ולראות שמידע המתקבל מייצוג אחד עוזר לתפקד גם בייצוג אחר.

2. פתרון משוואות בדרך אלגברית ו/או גרפית (שאלות 7–4) – עבודה בקבוצות, משחק, הטרמה ודיון.

המטרה בשאלות אלו היא להראות את הקשר בין הצבה בתבנית לבין פתרון משוואה בדרך של שיקולים, בדרך פורמלית, ובעזרת הגרף. מציאת מספר שהצבתו בתבנית נותנת תוצאה מבוקשת היא בעצם פתרון משוואה. בבית הספר היסודי התלמידים פותרים משוואות רבות כאשר ניתן להם תרגיל שבו התוצאה ידועה ויש משבצת באמצע התרגיל שאותה יש למלא. במהלך הסעיפים במפגש זה יש הליכה מן האינטואיטיבי אל הפורמלי, מחיפוש מספר שהצבתו נותנת תוצאה מסוימת אל כתיבת משוואה, מפתרון משוואות בדרך של הליכה לאחור (זה קורה בדרך כלל במספרים מוכרים) אל פתרון משוואות פורמלי (זה נעשה כאשר המספרים פחות מוכרים כמו מספרים שליליים). כל זאת בתמיכה של הגרף, במיוחד כאשר אין זוכרים כיצד פותרים באופן פורמלי (כמו פתרון משוואה ריבועית).

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- דרכים שונות למציאת המספר להצבה (שאלה 4):

א. בעזרת שיקולים.

דוגמאות:

- בתבנית ממעלה ראשונה, למשל $-20 + 5x = 50$, רושמים $-20 + \boxed{} = 50$ (או מכסים את 5x בעזרת כף היד) ושואלים מה צריך להיות במשבצת (או מתחת ליד). מתקבלת התשובה 70. אחר כך רושמים $5\cdot\boxed{} = 70$ ומקבלים את המספר להצבה.
- במשוואה ריבועית הכתובה כמכפלה השווה 0, קיים השיקול שמכפלה שווה 0 אם לפחות אחד הגורמים הוא אפס. מצביעים על ההבדל בין מכפלה שווה לאפס לבין מכפלה השווה למספר אחר. במקרה השני יש אינסוף אפשרויות לגורמי המכפלה. אם ידוע שהפתרון שלם אפשר לנסות לפרק לגורמים ובעזרת שיקולים נוספים לנסות לפתור את המשוואה.

כדאי גם להציע פרוק לגורמים של התבנית $x^2 - 7x$ או לכתוב אותה בדרך שתבהיר מתי ההצבה נותנת 0: $x \cdot x - 7 \cdot x = 0$

ב. בעזרת פתרון פורמלי של משוואה.

השאלות הנשאלות אינן מחייבות פתרון אלגברי. אפשר לפתור את כולן בדרך גרפית. יש לבדוק אם מסגרת הזמן מתאימה להזכיר למורים את דרך הפתרון האלגברית של משוואות ממעלה ראשונה ושנייה.

רוב המורים בכיתות הניסוי ידעו לפתור משוואה פשוטה ממעלה ראשונה. כמעט אף אחד מהם לא זכר כיצד פותרים משוואה ממעלה שנייה.

ג. בעזרת פתרון גרפי.

כל השאלות ניתנות לפתרון בדרך גרפית.

- יתרונות וחסרונות של הייצוגים בנושא פתרון משוואות מהסוג $f(x) = c$

טבלה: החיסרון העיקרי של הטבלה הוא שהיא כוללת מספר סופי של מקרים.

אם c נמצא בטבלה, אז הפתרון מיידי על-ידי התבוננות בטבלה. אם c איננו בטבלה, אפשר לפעמים להתקרב אל הפתרון. במקרה זה חשוב שהטבלה תהיה מסודרת, כלומר, שיעורי x יופיעו בטבלה לפי סדר גודל.

אם אין למשוואה פתרון, החיפוש בטבלה ללא הכרת התנהגות הגרף לא יועיל.

גרף: הפתרון הגרפי הוא מיידי, כאשר הגרף כולל אותו – כלומר, אם אפשר למצוא נקודה מתאימה על ציר x המייצגת את הפתרון (לפעמים זהו פתרון מקורב). הגרף עדיף (כמעט תמיד) על הדרך האלגברית אם אין פתרון למשוואה – כמו למשל במקרה המשוואה שבשאלה 6, $(12 - x)(x + 5) = 110$.

תבנית: זהו הייצוג המאפשר, עבור משוואות מהסוג שלנו, את מציאת הפתרון המדוייק. חסרון הדרך הזו הוא שהיא אינה מיידית, ויש להכיר את הדרך הפורמלית למציאת הפתרון.

בכיתות הניסוי אחרי שכל המורים הסכימו כי הגרף הוא הייצוג שבעזרתו תינתן התשובה המהירה ביותר, הם התבקשו להוסיף לתוך הטבלה של שאלה 4 מספרים אחרים למשל להוסיף את המספר 42 תחת התבנית $5x + 20-$. ראינו כי במקרה זה הגרף נותן פתרון מקורב (יתרון, לצורך בדיקת הפתרון האלגברי) , ואילו התבנית נותנת פתרון מדויק.

- דיון על המשחק

האסטרטגיה של משחק רביעיות מוכרת בדרך כלל למורים ולתלמידים. במשחק שלנו המשתתף שמבקש קלף מקבל אותו רק אם פתר נכון את המשוואה. הפתרון נמצא על הקלף המבוקש, והוא מהווה בדיקה לפותר.

המשחק מובא בשתי גרסאות, גירסה הכוללת שברים וגירסה הכוללת מספרים שליליים.

בכיתות הניסוי כל קבוצת מורים בחרה את הגירסה שברצונה לשחק, והיו קבוצות שהספיקו לשחק בשתי הגירסאות. המשחק התקבל בהתלהבות.

מפנים תשומת לב המורים כי אפשר להסב את האסטרטגיה הזו למשחקים בנושאים שונים בחשבון מכיתה א ואילך. למשל רביעיות של ארבע פעולות עם אותם מספרים, או סוגריים בארבע מקומות שונים בתרגיל מורכב וכדומה.

- דיון על שאלה 7

יש שתי גישות למילוי המשימה. גישה אחת היא מן המשוואות אל הפתרונות. בגישה זו נרשום את שש המשוואות האפשריות בעזרת ארבע התבניות הנתונות, ונמצא את פתרונן. גישה שנייה היא מן הפתרונות אל המשוואות. בכל אחת מן הגישות אפשר לפתור את המשימה בייצוגים שונים. כאשר בשני

אגפי המשוואה יש תבניות, קשה לפתור אותה על-ידי שיקולים. גם חיפוש הפתרון בטבלה הוא מורכב, כי יש לערב בַחיפוש שתי טבלות. נותרנו עם הדרך הגרפית והדרך האלגברית.

בדרך גרפית (ארבעת הגרפים נתונים בעמוד 7.) אפשר לפתור על-ידי הליכה מנקודות החיתוך אל ציר x. לחילופין אפשר למצוא על ציר ה- x את הפתרונות הנתונים, ולחפש את נקודות החיתוך המתאימות להם. בשני המקרים יש לזהות לכל גרף את התבנית המתאימה לו.

בדרך אלגברית אפשר להרכיב תחילה את המשוואות ולפתור אותן בדרך סטנדרטית. לחילופין אפשר להציב את הפתרונות בארבע התבניות, ולגלות זוגות של תבניות הנותנות תוצאות שוות, וכך למצוא לכל פתרון את המשוואה המתאימה לו. הליכה מן הפתרון אל המשוואה מבהירה את המושג *פתרון של משוואה*. כאשר מרבים לפתור בדרך טכנית, שוכחים לפעמים את משמעות התוצאה המתקבלת.

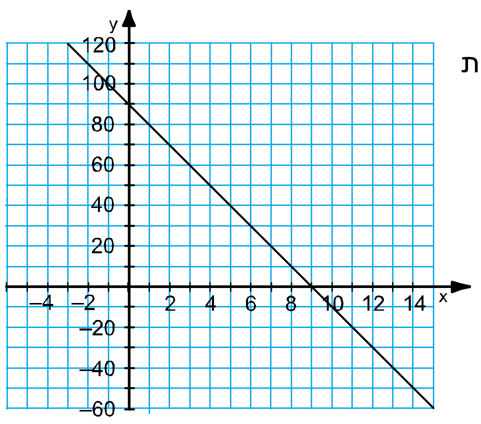
כדאי לדון בהבדל בין משמעות סימן השיוויון במשוואה לבין משמעותו בתרגיל, וכן בהבדל בין פתרון של משוואה לפתרון של תרגיל. משוואות מהצורה $f(x) = c$ מעמעמות את ההבדל, כי צורתן החיצונית של משוואות כאלה היא כמו של תרגיל. כמו כן, הצבת הפתרון במשוואה נותנת c, שנתפס כתשובה לתרגיל. לכן חשוב לעסוק גם במשוואות מהצורה $f(x) = g(x)$, אשר מחדדות את ההבדל. חשוב גם להציב את הפתרון במשוואות מהצורה האחרונה, ולראות כי תוצאת ההצבה אינה נמצאת באגף ימין של המשוואה. כדי לחזק את המושג פתרון של משוואה מבקשים מן המורים בזמן הדיון לבנות משוואות לפתרון נתון, לאו דוקא מן התבניות הנתונות. אם המורים בונים רק משוואות מהצורה $f(x) = c$, מבקשים מהם לבנות גם משוואות מהצורה $f(x) = g(x)$.

3. פתרון אי-שוויון (שאלות 8–10) – שאלות ותשובות במליאה.

בקבוצות הניסוי לא הספקנו במסגרת שעתיים להגיע לתרגילים אלו.

מתחילים עם פתרון גרפי.

הצעה למהלך



מציגים את התבנית $10x - 90$ והגרף שלה, ושואלים שאלות "פינג-פונג".

א. מהי תוצאת הצבה של $x = 6$? מתקבלת התוצאה 30.
מסמנים נקודה מתאימה על הגרף.

ב. הציעו מספר שהצבתו תיתן תוצאה גדולה מ- 30.
בודקים בגרף.

ג. הציעו מספר נוסף שיתן תוצאה גדולה יותר.

ד. סמנו מבין המספרים הבאים את המספרים שהצבתם תיתן תוצאה קטנה מ- 30.

-3, 0, 3, 5, 6, 8, 9, 12

ה. ראינו כי ככל שהמספר גדול יותר, הוא נותן תוצאה קטנה יותר. הסבירו, לפי התבנית, מדוע זה קורה.

ו. רשמו את כל המספרים שיתנו תוצאה גדולה יותר מ- 30.

מראים איך רושמים בסימנים את התשובה שנאמרה במילים: $x < 6$, וחוזרים אל השאלה כפי שהיא נשאלת בדף.

ז. מהו פתרון האי-שיוויון $30 < 10x – 90$?

מדגישים כי בפתרון גרפי של אי- שיוויון נפתור תחילה (אם אפשר, בדרך גרפית) את המשוואה המתאימה: $30 = 10x – 90$. רק אחר כך לפי צורת הגרף נחליט מהו התחום הפותר את האי-שיוויון.

פותרים את שאלה 8. בודקים אם יש תאום בין התוצאות בדרך אלגברית וגרפית. ייתכן שהמורים שכחו כי הכפלת שני האגפים במספר שלילי מחייבת הפיכת סימן הסדר. מקיימים דיון תוך תמיכה של הגרף.

עושים עבור תבניות ריבועיות מהלך דומה למהלך המוצע עבור תבנית לינארית: מתחילים מתבנית ריבועית מסוימת והגרף שלה, מציבים מספר ומתקבלת תוצאה. מסמנים נקודה מתאימה על הגרף. מבקשים מספרים שיתנו תוצאות יותר גדולות. מבררים לגבי מספרים שונים אם תוצאת הצבתם נותנת תוצאה גדולה יותר, שווה, או קטנה יותר. מבקשים את כל המספרים שנותנים תוצאה גדולה יותר. מראים כיצד רושמים זאת בסימנים, מתעכבים על ההבדל בכתיבה בין אי-שיוויון שנותן תחום רצוף לאי-שיוויון שנותן תחום מחולק.

מדגישים כי בפתרון גרפי של אי- שיוויון יש לפתור תחילה את המשוואה המתאימה.

פותרים את שאלה 9.

בדיון על שאלה 10, המורים שהספיקו לענות על השאלה, יספרו על דרכי הפתרון שלהם.
דנים על הסימטריה של הגרף כי המספר שנותן בהצבתו את התוצאה הנמוכה ביותר, נמצא על ציר הסימטריה. דנים גם על הדרך למצוא את ציר הסימטריה בעזרת ממוצע בין נקודות סימטריות (למשל נקודות חיתוך של הגרף עם ציר x).