2.2 תובנה מספרית ותובנה אלגברית למדריך

מטרות

- הצבה בתבניות על-פי דרישה לתוצאות מסוימות.
- עיסוק במספרים מסוגים שונים (חיוביים ושליליים, שלמים ושברים, זוגיים וכדומה).
- פיתוח תובנה מספרית ותובנה אלגברית.
- העמקת המושג של תבניות תואמות.
- ביצוע מעברים בין ייצוג אלגברי וייצוג מספרי.
- הבנת משמעות המושג פתרון של משוואה.

מקורות

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*, 24-35.

Friedlander, A., Markovits, Z., and Bruckheimer, M. (1988). Overcoming barriers in function related concepts. *Mathematics in School, 17(4),* 18-21.

Markovits, Z., and Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25* (1), 4-29.

מרקוביץ, צ. *חוש למספרים: פעילויות לפיתוח החוש למספרים, החשיבה הכמותית והחשיבה המתמטית.* חולון: הוצאת יסוד.

פרידלנדר, א. וטבח, מ. (2001). קידום חשיבה רב ייצוגית בתחילת לימודי האלגברה. *על"ה* כתב עת להוראת המתמטיקה בבית הספר העל יסודי,27, עמודים 20-27.

חומרים

מפגש ראשון: דפי פעילות (3 עמודים כולל משחק).

משחק: חסימות

מפגש שני: דפי פעילות (4 עמודים)

זמן משוער

מפגש ראשון: שני שיעורים.

מפגש שני: שני שיעורים.

מבנה הפעילות

מפגש ראשון

1. חוש למספרים (שאלות 1–2) – עבודה בקבוצות ודיון.
2. כאילו ארץ עיר (שאלה 3) – עבודה בקבוצות ודיון.
3. משחק חסימות בזוגות (שאלה 4).

מפגש שני

1. מי גדול ממי? (שאלות 1–3) – עבודה בקבוצות ודיון.
2. כאילו מבחן (שאלה 4) – עבודה בקבוצות ודיון.
3. משמעות הפתרון (שאלה 5) – עבודה בקבוצות ודיון.

מהלך הפעילות

מפגש ראשון

1. חוש למספרים (שאלות 1–2) – עבודה בקבוצות ודיון.

בפתיחה עובדים על השאלות בפעילות. המשתלמים מתבקשים להסביר את דרכי פעולתם.

בכיתות הניסוי המורים עבדו בתחילה בגישה של ניסוי וטעייה, ואחר כך על-פי שיקולים. כל למשל, כדי שתוצאת ההצבה בתבנית $\frac{1}{8}a-4$ *תהיה מספר שלם, המספר המוצב צריך להתחלק ב- 8. כדי שהתוצאה תהיה מספר חיובי,* $\frac{1}{8}a$ *צריך להיות גדול מ- 4.*

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- דיון על מבנה השאלות.

מבקשים מן הלומדים למיין את סעיפי שאלה 1 לסעיפים שאפשר לפתור בעזרת שיקולים בלבד (סעיפים ב–ג), לכאלה שכדאי לפתור בעזרת שיקולים, ולכאלה שכדאי לפתור על-ידי שימוש במשוואה או באי-שיוויון (סעיפים ד–ה). פותרים את המשוואות והאי-שיוויונים המתאימים בסעיפים ד ו- ה , ומכריזים על השיקולים שהובאו בחשבון בסעיפים האחרים.

דנים על הדרך להתאים את השאלות לכיתות של בי"ס יסודי.

למשל, לרשום $\frac{1}{8}\cdot\square-4$ במקום התבנית $\frac{1}{8}\cdot a-4$, ולהחליף את הבקשה לקבל כתוצאה מההצבה מספר חיובי, בבקשה לקבל מספר גדול מ- 10. בכיתות מתקשות, כדאי להחליף גם את $\frac{1}{8}$ ל- $\frac{1}{2}$.

שאלה 2 בנויה כך שאפשר לענות עליה על-ידי הצבת המספרים הנתונים, או על-ידי שיקולים. המספר הרב של המספרים להצבה ניתן כדי לעודד הפעלת שיקולים.

בכיתות הניסוי, חלק מהלומדים פעלו בפזיזות, והגיעו למסקנות שהיו בדרך כלל שגויות.

כדי לענות על השאלה יש להתמצא היטב בחישובים בשברים ובמספרים חיוביים ושליליים. כמו כן, חשוב לזכור את סדר המספרים על הציר – במיוחד לגבי המספרים השליליים. כדי לענות על סעיפים ב ו- ד של השאלה, חשוב להיות מודעים לדרך בה נבחרו המספרים שנותנים את התוצאה המבוקשת בסעיפים א ו- ג.

2. כאילו ארץ עיר (שאלה 3) – עבודה בקבוצות ודיון.

ממלאים את הטבלה. מלבד במשבצות שבטור הראשון ובטור השני, שאותן יש למלא במילים או בתבנית, בכל המשבצות האחרות יש למלא במספרים המקיימים את התכונות הרשומות. בחלק מן המשבצות, ישנן אפשרויות רבות למילוי, בחלקן יש רק אפשרות אחת, ובחלק אין אפילו אפשרות אחת.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון בדרכים למילוי הטבלה.

דנים בהבדל בין הצבה לבין מציאת מספרים הנותנים בהצבתם תוצאה מבוקשת (פעולות הפוכות זו לזו).

דנים במספר האפשרויות למלא כל משבצת, ובסיבה לכך.

דנים בהבדל בין מצב שבו אי אפשר למלא את המשבצת בגלל מגבלה הכלולה במטלה (a מספר חיובי) לבין מצב שבו אי אפשר למלא משבצת בגלל הגבלות מתמטיות (אין פתרון למשוואה).

דנים באופן מציאת המספרים המתאימים לתוצאה מבוקשת – שיקולים, פתרון משוואה (או משוואות), או פתרון אי-שיוויון.

- דיון בהתאמת הדף לכיתות שונות ולרמות שונות.

מבקשים הצעות כיצד להתאים את הדף לתלמידי כיתה ג שעדיין לא למדו שברים ואלגברה. למשל, לרשום משבצת במקום a, ולוותר על שלושת הטורים הראשונים, ועל חלק מן השורות.

מבקשים הצעות כיצד לשדרג את הדף כך שיתאים לתלמידים מתקדמים. למשל, אפשר לבקש תוצאות הצבה הנמצאות בתחומים שלמים, במקום מספר אחד: במקום מציאת מספר אחד שהצבתו תיתן מספר בין 1 ל- 10, אפשר לבקש את מציאת קבוצת כל המספרים שהצבתם תיתן מספר בין 1 ל- 10.

3. משחק חסימות בזוגות (שאלה 4).

כפעילות הכנה למשחק, ממיינים כרטיסים: בוחרים כרטיס תכונה, ומתאימים לו כרטיסי תבניות, או בוחרים כרטיס תבנית, ומתאימים לו כרטיסי תכונה וחסימה.

מסבירים את הוראות המשחק ומאפשרים ללומדים לשחק. מציינים כי אסטרטגיית המשחק דומה לאסטרטגיה של המשחק Race.

במשחק מיישמים ומסכמים את הנלמד בפעילות.

מפגש שני

1. מי גדול ממי ? (שאלות 1–3) – עבודה בקבוצות ודיון.

אחת התכונות של מספרים הוא הסדר ביניהם. כאשר נתונים שני מספרים ממשיים, ניתן לקבוע איזה מביניהם גדול מהשני או האם הם שווים. אין משמעות לחיפוש סדר בין תבניות. אולם שתי תבניות יכולות להיות תואמות, ואז בכל הצבה מתקבל אותו מספר. אם נשווה בין תבניות כאלה נקבל זהות, ואפשר ליצור אנלוגיה בין מקרה של זהות בתבניות למקרה של שוויון בין מספרים. בדומה לכך, ניתן למצוא זוג תבניות אשר בהצבת כל מספר (מקבוצת ההצבה המשותפת שלהן) מתקבל באחת התבניות מספר גדול יותר מזה המתקבל בהצבתו בתבנית השנייה. תכונה זו אנלוגית לתכונת הסדר בין מספרים. אולם בתבניות, להבדיל ממספרים, ישנן זוגות תבניות שאין "סדר" ביניהן, כי בהצבות שונות ה"סדר" משתנה. בחלק זה של הפעילות ממיינים זוגות של תבניות לזוגות שיש "סדר" ביניהן, ולזוגות שאין ביניהן מעין "סדר" זה. כאשר ה"סדר" קיים, קובעים מהו ה"סדר", וכאשר אינו קיים, בודקים מהם המספרים הגבוליים שבהם ה"סדר" מתהפך.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- פעולות בין מספרים וביטויין על ציר המספרים, בהקשר לקביעת סדר.

עבור זוגות תבניות שאחת מהן היא a (סעיפים א–ד), מציעים לשרטט ציר מספרים ללא שנתות (פרט לאפס) לכל סעיף. מסמנים בצד החיובי של הציר נקודה כלשהי עבור a. אם המקום של התבנית השנייה הוא תמיד באותו צד יחסית ל- a, ניתן לקבוע כי קיים "סדר קבוע" בין התבניות.

מוצאים את המקום המדויק או מקום אפשרי עבור התבנית השנייה. מאחר וגודל היחידה אינו ידוע, אי-אפשר לקבוע מקום מדויק עבור התבניות בסעיפים א ו- ב. אבל אפשר לקבוע באיזה צד יחסית ל- a, "נמצאת" התבנית. מתייחסים לכך שחיבור מספר חיובי (אצלנו 2) למספר כלשהו (אצלנו a) , שקול ל"הליכה ימינה" 2 יחידות על הציר מן המספר, או לחיבור קטע באורך 2 יחידות אל הקטע המייצג את a. בדומה לכך, חיסור מספר חיובי ממספר כלשהו שקול ל"הליכה שמאלה" על הציר. בסעיפים ג ו- ד, מקומו של a קובע באופן מדויק את מקום התבנית השנייה. מאחר ו- a חיובי, $2\cdot a$ הוא קטע באורך כפול מן הקטע המתאים ל- a, מן ה- 0 וימינה. לעומת זאת כדי למצוא את המקום המתאים ל- $a:2$ יוצרים קטע שאורכו מחצית הקטע המתאים ל- a. בכל אחד מן המקרים, מקום התבנית השנייה יחסית ל- a קבוע – כלומר, אפשר לדעת איזו תבנית מייצגת מספר גדול יותר בהצבת כל מספר.

אפשר להשוות בעזרת ציר המספרים גם את התבניות שבסעיף ה.

לסימון על ציר יתרונות רבים:

- מחדד את ההבנה של הסדר, ואת ההבנה של פעולות החשבון השונות.
- מבהיר את משמעות מושג המשתנה על-ידי סימון a במקום כלשהו על הציר.
- מחייב טיפול איכותי, כללי, בקשרים אפשריים בין כמויות על גבי ציר ללא שנתות.
- מחייב עיסוק באומדן, כי אפילו כאשר המקום נקבע, הסימון אינו מדויק.

- דיון במושגים גדול ב- , גדול פי.

מנצלים את התבניות הראשונות לדיון במושגים גדול ב- , וגדול פי.

שואלים: באילו סעיפים יש שתי תבניות המייצגות מספרים כך שהאחד גדול ב- 2 מהשני? גדול פי 2 מהשני? מתייחסים לכך שיש שני זוגות תבניות בתשובה לכל שאלה.

בסעיפים שבהם נקבע שיש "סדר", מבקשים לדעת בכמה או פי כמה גדול המספר המיוצג על-ידי תבנית אחת, מהמספר המיוצג על-ידי התבנית השנייה. למשל, בשאלה 1ה התשובה היא פי 4.

במהלך דיון זה, שבו מנסחים במילים את הכלול בתבניות, מתייחסים לכך שעבור כל התבניות שבשאלות 1 ו-2 אפשר לנסח את שאלת הסדר באופן מילולי בלי להשתמש בתבניות. למשל, בשאלה 1ג אפשר לשאול: מי גדול ממי, מספר חיובי כלשהו או מכפלתו ב- 2?

- השוואה בין סעיפים ד ו- ח.

סעיפים אלו נראים דומים, אבל ההבדל ביניהם גדול. בעוד שעבור מספר חיובי כלשהו, חילוקו ב- 2 "מקטין" את המספר, הרי אם מחלקים את 2 במספר המיוצג על-ידי a , אי אפשר לדעת אם מקבלים תוצאה גדולה או קטנה יותר מן המספר המקורי (a) אפילו אם ידוע כי המספר המקורי הוא חיובי. אם a מייצג מספר גדול מ-1, התוצאה תקטן, ואם a מייצג שבר בין 0 ל- 1, התוצאה תגדל.

- דיון בדרך למצוא מתי ה"סדר" מתהפך.

בדרך כלל, במקרים שבהם אין "סדר" בין שתי תבניות, ההיפוך בסדר חל במספר (נקודה על הציר) שהצבתו בשתי התבניות יוצרת שוויון. ייתכנו זוגות של תבניות שהשוואתן יוצרת כמה נקודות של "היפוך הסדר" ביניהן. כדי למצוא נקודות אלו, יש לפתור משוואה. בודקים משני צידי הפתרון כדי לברר מי גדול ממי. חוזרים ומבקשים לפעול בדרך זו (פתרון המשוואה כדי למצוא את נקודת השוויון) גם עבור המקרים שבהם יש "סדר", ומגלים כי במקרה של חיבור אין פתרון למשוואה, כלומר אין מספר שעבורו התבניות שוות, ותמיד אחת "גדולה" מהשנייה. לעומת זאת במקרה של כפל, יש פתרון והוא 0. כלומר הסיבה ל"סדר" במקרה זה, נעוצה בהגבלת המשתנה למספרים חיוביים בלבד.

דנים במקרים שבהם המשתנה אינו מוגבל למספרים חיוביים בלבד. מתייחסים לכך שהתשובות לא ישתנו כאשר מדובר בחיבור וחיסור בלבד, אבל בכפל וחילוק הן ישתנו. מבקשים להביא דוגמאות לכך. במקרה זה, גם הניסוח של גדול/קטן פי אינו נכון, ויש לומר רק פי.

- דיון בשאלה 3.

בשאלה 3 יש חריגה מארבע פעולות החשבון לחזקה ריבועית ולשורש. מתייחסים לשגיאה הנפוצה כי ריבוע של מספר תמיד גדול ממנו, שנובעת מן התפיסה השגויה שכפל תמיד מגדיל. בהזדמנות זו אפשר לברר מהם המוקשים בכל סעיף, ומהן התפיסות השגויות הגורמות להתקל במוקשים אלו. בסעיף ב אפשר להתייחס לנוסחאות הכפל המקוצר. אפשר לציין כי בתבניות ריבועיות יש לעיתים קרובות יותר מ"נקודת היפוך" אחת.

2. כאילו מבחן (שאלה 4) – עבודה בקבוצות ודיון.

בחלק זה של הפעילות יש טיפול בתבניות תואמות. בכל סעיף יש יותר מתשובה אחת. המסיחים מתבססים על תפיסות מוטעות בנושאים של חוקי פעולות החשבון וסדר פעולות החשבון.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון בחוקים ובעקרונות שעלו תוך כדי הפעילות.

כדי לפתור את הפעילות, יש לדעת את "חוקי הדקדוק" של פישוט תבניות אלגבריות. את החוקים האלה אפשר להפעיל באופן מיכני, על-סמך זכירת חוקי פעולות החשבון והמניפולציות האלגבריות (וזוהי מטרה לגיטימית לקראת סוף תהליך הלימוד), אבל אפשר גם להשתמש בשיקולים אינטואיטיביים (דרך מספרים) תוך התייחסות למשמעות האריתמטית - מספרית של חוקי הפישוט.

בדיון אוספים מן המורים את כל החוקים והעקרונות שהשתמשו בהם, וכן את כל התפיסות השגויות שעלולות לעלות אצל תלמידים.

דוגמאות:

א. מינוס לפני סוגריים הופך את הסימנים שבתוך הסוגריים.

ב. קיים חוק הפילוג (של הכפל מעל החיבור).

ג. קיים חוק הפילוג של החילוק מעל לחיבור (כאשר המחולק הוא הסכום).

ד. קיים חוק החילוף בכפל.

ה. קו שבר משמש כפעולת החילוק.

ו. חילוק במספר שקול לכפל בהופכי.

ז. חילוק במספר ולאחר מכן חילוק במספר נוסף, שקול לחילוק במכפלת המספרים.

ח. חילוק במספר ולאחר מכן חילוק במספר נוסף, אינו שקול לחילוק במנת המספרים.

ט. כדי לחלק סכום למספר אפשר לחלק כל מחובר למספר ולחבר את התוצאות.

י. כדי לחלק מכפלה למספר יש לחלק רק גורם אחד למספר.

יא. במקום להפחית סכום של מספרים, אפשר להפחית מספר אחד, ולאחר מכן להפחית מספר נוסף.

יב. קו שבר משמש כסוגריים.

בדיון מבקשים למיין את החוקים והעקרונות שנאספו לפי סוגי ניסוח שונים – פורמלי ואינטואיטיבי.

מתייחסים לחוקים שקולים המנוסחים בדרכים שונות (למשל, א ו- יא), ודנים על הניסוח העדיף בכל שלב בהוראה. בסעיף א החוק מנוסח בצורה פורמלית ובסעיף יא בצורה אינטואיטיבית. חוקים פורמליים, מטבעם, נשכחים לפעמים, ובמקרים מסוימים קשה לזהות את הצורך להשתמש בהם. לכן כדאי להמנע מהפעלת שיקולים פורמליים בלבד ולהתבסס במקביל גם על שיקולים אינטואיטיביים מעולם מספרים. כך למשל, התרגום של תבנית למילים תוך שימוש במילה "מספר" במקום האות, מבהירה פעמים רבות את החוק.

עורכים השוואות בין חוקים המתיחסים למצבים דומים בפעולות שונות. למשל, ז ו- יא, מתיחסים למצבים דומים בחילוק ובחיסור בהתאמה: דוגמה ז מתיחסת לחילוק בשרשרת (a:b:c), ואילו

דוגמה י"א מתייחסת לחיסור בשרשרת (a – b – c). מבקשים לנסות למצוא אנלוגיות נוספות, למשל, הטענה האומרת שחיסור שקול לחיבור הנגדי, אנלוגית לזו האומרת כי חילוק שקול לכפל בהופכי.
דנים באופן כללי על תפקידם של עריכת אנלוגיות בהוראה.

מנגידים בין חיבור וכפל (למשל, דוגמאות ט ו- י). סעיפים ה ו- ו בפעילות מתייחסים לדוגמאות אלו. בסעיף ה בפעילות אפשר לשאול: האם בחילוק של סכום למספר אפשר לחלק כל מחובר בנפרד באותו מספר? לעומת זאת בסעיף ו: האם בחילוק של מכפלה במספר אפשר לחלק כל גורם בנפרד? מבקשים דוגמאות מספריות לאשש את המסקנות.
דנים באופן כללי על תפקיד ההנגדה בהוראה.

- מתייחסים למטלה האחרונה של השלמת מסיחים, ודנים באסטרטגיה זו ככלי לטיפול בתפיסות שגויות גם בנושאים אחרים. מבקשים דוגמאות. דנים בחשיבות של מודעות המורים לשגיאות אופייניות ולתפיסות מוטעות של תלמידים. מציינים כי אפשר להביא תלמידים למודעות לגבי שגיאות אפשריות על-ידי בקשה לבנות בוחן סגור, עם מסיחים משמעותיים.

3. משמעות הפתרון (שאלה 5) – עבודה בקבוצות ודיון.

בחלק זה של הפעילות יש טיפול במשמעות של פתרון משוואות. המשוואות פשוטות, ומטרת הפעילות אינה לפתור אותן, אלא רק לאמוד את פתרונן.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- דיון בהערכת הפתרון לעומת פתרון שיטתי.

אין צורך לדון בחשיבות של הפתרון השיטתי, אבל חשוב לדון במקומו בהוראה של הפתרון האינטואיטיבי, ואומדן הפתרון, לעומת הפתרון השיטתי. הערכת הפתרון, ללא עבודה שיטתית על אגפי המשוואה, מבהירה את משמעות הפתרון. לעומת זאת פעמים רבות, הפתרון השיטתי מטשטש את משמעות התהליך והתוצאה המתקבלת. לכן חשוב במיוחד בתחילת לימוד הנושא, לתת לתלמידים תרגילים של אומדן, המסתמכים על האינטואיציה. גם במהלך הלימוד, רצוי לחזור אל האומדן וההערכה, כי בדרך זו חוזרים אל המשמעות. אומדן מוקדם בפתרון משוואה מסוימת מאפשר עימות עם הפתרון שמתקבל בדרך שיטתית ובדיקת הגיוניותו.

אמנם מדובר פה בפתרון משוואות, אבל אפשר להשליך את המסקנות על פתרון בכל נושא.

- דיון בעיצוב משימות

משווים את הפעילות בשאלה 5 עם זו שבשאלה 4. בשתי הפעילויות אפשר לעבוד באופן אינטואיטיבי (ראו הצעה לדיון בנקודה הקודמת), אבל בשאלה 4 האפשרות הזו מוסווית, ואילו בשאלה 5 היא מפורשת. לצורת ניסוח השאלה יש משמעות גדולה מאוד בהוראה. פעמים רבות תלמידים בוחרים בכלים שבהם יפתרו שאלה בהתאם לניסוח השאלה. למשל, אילו לא נאמרו בשאלה 5 המילים "מבלי לפתור את המשוואה", רוב התלמידים היו ניגשים לפתרונה בדרך שיטתית פורמלית. אחת ממטרות

ההוראה, היא ללמד תלמידים לשקול דרכים שונות לפתרון ולבחור את הדרך שהיא לדעתם היעילה ביותר, **לפני** שהם "מתנפלים עם העפרון על המחברת".